第 28 卷 第 6 期
2002 年 11 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 28, No. 6
Nov., 2002

挠性结构的输出反馈低阶自适应控制[1)]

刘一武 张洪华 吴宏鑫
(北京控制工程研究所 北京 100080)
(E-mail: whx_bice@homilt.com)

摘 要 在模型参考自适应方法的框架上，研究了挠性空间结构的输出反馈鲁棒自适应控制方法，对其稳定性与动态性能进行了理论分析. 该方法通过在标准控制律中增加控制补偿项，利用挠性结构的特点，将所能容许的乘性模型不确定性的 H_∞ 范数提高到接近 1 的程度，控制系统的动态性能可由控制器的设计参数调节. 对该方法进行了数值实验验证.

关键词 挠性结构，自适应控制，鲁棒控制，低阶控制
中图分类号 TP273.2

THE LOW-ORDER OUTPUT FEEDBACK ADAPTIVE CONTROL OF FLEXIBLE STRUCTURES

LIU Yi-Wu ZHANG Hong-Hua WU Hong-Xin
(*Beijing Institute of Control Engineering*, *Beijing* 100080)
(E-mail: whx_bice@homilt.com)

Abstract For improving the controller's robustness that is necessary to low-order control, a new output-feedback adaptive control approach for flexible structures is studied. Stability and transient performances of the control system are analyzed. With a term for compensation, the designed controller can tolerate greater multiplicative modeling uncertainty H_∞-norm which can be near 1, and transient performance can be improved by alteration of the designed parameters. The presented approach is validated with computer simulation results.

Key words Flexible structures, adaptive control, robust control, low-order control

1 引言

挠性结构的控制是工程中普遍存在的一种力学系统控制问题，一直存在建模的困难与低阶控制的需求. 特别是在航天控制方面，随着挠性结构的大型化，结构不仅维数大，而且自然阻尼轻、在低频段具有大量的密集模态，这使模型不确定问题变得更加突出. 针对挠性结构大的参数不确定性、尤其是低阶控制所不可避免的模型不确定性问题的控制方法研究，具

1) 国家自然科学基金重点项目(60034010)资助
收稿日期 2000-11-29 收修改稿日期 2001-05-28

有重要的理论与应用意义.

挠性空间结构的自适应控制方法很早就受到重视[1]. 自适应控制问世的最初动机,是为参数不确定的动态系统设计控制器,并在1980年取得了突破[2~4],在理想条件下设计全局稳定的自适应系统成为可能. 其后20年研究重点为针对未建模动态与有界扰动的鲁棒自适应控制,获得了不少研究成果[5~9],但稳定性结论一般都依赖于模型不确定性充分小. 另一个重要问题是如何改进自适应控制的动态性能,这方面的研究正方兴未艾[10,11]. 可以说,在解决参数不确知问题上,自适应技术已相当成熟,但在模型不确定性问题与系统动态性能的评估等方面,仍有待进一步深入和发展.

实现挠性结构的低阶控制,关键在于改进控制方法对模型不确定性的鲁棒性能. 本文在模型参考自适应控制的框架上,对挠性结构的低阶自适应控制及其性能进行研究,处理对象模型乘性不确定性的H_∞范数接近1的情况,这比一般的鲁棒自适应控制方法较大地放宽了建模条件,扩大了所提出的低阶控制方法的适用范围.

2 控制系统的构成

不考虑刚性模态,挠性结构输入输出关系可表示为

$$y(t) = G(s)[u](t) \tag{1}$$

式中$y(t)$是输出,$u(t)$是控制输入. 挠性结构传递函数$G(s)$阶数为N,具有以下特点:A1)分母分子的阶差为$n^*=2$;A2)挠性模态总具有一定的阻尼,因而极点稳定.

设对象(1)用一个具有同样控制输入的低阶系统建模

$$y_l(t) = G_l(s)[u](t), \quad G_l(s) = k_p Z(s)/P(s) \tag{2}$$

对其要求为:A3)阶数$n<N$,阶差取为$n^*=2$;A4)$Z(s)$,$P(s)$均为系数未知的Hurwitz首一多项式;A5)系数k_p已知. 对象(1)的传递函数也可表示为

$$G(s) = G_l(s)[1-\Delta_m(s)], \quad \Delta_m(s) = -G_l^{-1}\Delta(s) \tag{3}$$

式中$\Delta_m(s)$为模型的乘性不确定性. $\Delta(s)=G(s)-G_l(s)$是阶差为n^*的稳定传函.

在考虑系统频带受限时,引入假设:A6)若控制系统的频带受限,则存在上限频率ω_0,使得系统的信号$x(t)$与其指数加权截断$(e^{\delta(\tau-t)/2}x)_t$(其中$\delta>0,\tau\leqslant t$)属于集合$S_{\omega_0}\equiv\{x(t)\mid \text{if } \omega\geqslant\omega_0,\ X(\mathrm{j}\omega)=0\}$, $X(\mathrm{j}\omega)$是$x(t)$的Fourier变换.

根据模型参考自适应控制的框架,设计参考模型、控制律与自适应律如下.

参考模型:

$$y_m(t) = W_m(s)[r](t), \quad W_m(s) = k_m/P_m(s) \tag{4}$$

闭环输入$r(t)$一致有界,$P_m(s)$是阶数为n^*的Hurwitz首一多项式. 记$c_0=k_m/k_p$.

控制律:在一般模型参考自适应控制的基础上,取

$$u(t) = \theta^{\mathrm{T}}(t)\omega(t) + c_0 r(t) + u_e(t) \tag{5}$$

式中$u_e(t)=-W_m^{-1}(s)F(s)[e](t)$,$F(s)=c_0[k_c N(s)/M(s)-1]Q(s)$为本文增加的控制补偿项,其中$k_c>0$为设计参数;$Q(s)=1/(\tau s+1)^{n^*}$,$\tau>0$;$N(s)$,$M(s)$是使$1/[c_0+F(s)]$稳定的任选同阶数的首一稳定多项式. $e(t)=y(t)-y_m(t)$为跟踪误差.

式(5)中其它符号定义与说明:$\omega=[\omega_1^{\mathrm{T}},\omega_2^{\mathrm{T}},y]^{\mathrm{T}}$,$\omega_1=\dfrac{a(s)}{\Lambda(s)}u$,$\omega_2=\dfrac{a(s)}{\Lambda(s)}y$,其中$a(s)=[1,s,\cdots,s^{n-2}]^{\mathrm{T}}$,$\Lambda(s)$为任选的$n-1$阶Hurwitz首一多项式;$\theta=[\theta_1^{\mathrm{T}},\theta_2^{\mathrm{T}},\theta_3]^{\mathrm{T}}$是$\theta^*=[\theta_1^{*\mathrm{T}},\theta_2^{*\mathrm{T}},$

$\theta_3^*]^{\mathrm{T}}$ 的估计($\theta_1^*,\theta_2^*\in R^{n-1},\theta_3^*\in R$)，参数 θ^* 使得式(2)满足[3]$W_m(s)=c_0G_l(s)[1-F_1(s)-F_2(s)G_l(s)]^{-1}$，其中 $F_1(s)=\theta_1^{*\mathrm{T}}a(s)/\Lambda(s)$，$F_2(s)=\theta_2^{*\mathrm{T}}a(s)/\Lambda(s)+\theta_3^*$. 记 $\tilde{\theta}=\theta-\theta^*$.

参数自适应律：采用死区算法，并对建模误差上界进行估计.

首先给出必要的符号. 规范信号 $m^2(t)$：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m^2=-\delta_0m^2+\delta_0+u^2+y^2$，$m(0)=1$，选取参数 $\delta_0>0$ 使得 $P_m(s)$，$\Lambda(s)$ 的根都在 $\mathrm{Re}[s]<-\delta_0/2$ 的范围. 引入 $\phi=W_m[\omega]$，可导出 $c_0y=W_m[u]-\theta^{*\mathrm{T}}\phi+\eta$，$\eta\equiv(c_0+W_mF_2)[y-y_l]$，则误差 $\varepsilon\equiv\theta^{\mathrm{T}}\phi+c_0y-W_m(u)=\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\phi+\eta$，其中 η 有上界 $|\eta(t)|\leqslant\lambda(t)+\beta m(t)$，$\lambda(t)$ 是与初态有关的指数衰减项，常数 $\beta>0$. 因而 $\eta^2(t)\leqslant\gamma(t)=\delta_1+\delta_2m^2(t)$，$\delta_1,\delta_2$ 为正常数. 设对 $\gamma(t)$ 的估计为 $\hat{\gamma}(t)=\hat{\delta}_1+\hat{\delta}_2m^2(t)$，记 $\tilde{\delta}_1=\hat{\delta}_1-\delta_1$，$\tilde{\delta}_2=\hat{\delta}_2-\delta_2$.

自适应律为

$$\dot{\theta}(t)=-k(t)\Gamma\varepsilon(t)\phi(t)/m^2(t),\ \dot{\hat{\delta}}_1(t)=k(t)p/(2m^2(t)),\ \dot{\hat{\delta}}_2(t)=k(t)p/2 \tag{6}$$

式中 $\Gamma=\Gamma^{\mathrm{T}}>0$，$p>0$. 取 $\zeta>1$，当 $\varepsilon^2>\zeta^2\hat{\gamma}(t)$ 时，取 $k(t)=1-\zeta\sqrt{\hat{\gamma}(t)}/|\varepsilon|$，否则 $k(t)=0$.

3 主要结果

根据改进的控制方法，获得了关于系统鲁棒稳定性(定理 1)与系统跟踪性能(定理 2)的两个主要结果.

定理 1. 设对象(1)与其参数未知的低阶模型(2)分别满足假设 A1)～A5)，记最小的模型乘性不确定性大小 $\|\Delta_m(s)\|_\infty$ 为 c_Δ，则对于式(1)，(4)～(6)构成的闭环系统：1) 取 $N(s)=M(s)=1$，若 c_0 的值充分大、k_c 近似 1 且 τ 适当小，则存在 $0<c_\Delta^*\leqslant(1-\varepsilon_0)/2$，当 $c_\Delta\leqslant c_\Delta^*$ 时，闭环信号有界稳定；2)若系统的频带有限，满足假设 A6)，只要 k_c 的值适当大且 τ 适当小，则对于 $c_\Delta\leqslant1-\varepsilon_0$，闭环信号有界稳定. (其中 $\varepsilon_0>0$ 可以很小).

两种情况规范信号 $m(t)$ 均有如下形式的上界

$$|m(t)|\leqslant\bar{m}=\sqrt{2}C_1\exp\{(C_2^2\beta_1+C_3^2\beta_3)|\tilde{\theta}(0)|^2+(C_2^2\beta_2+C_3^2\beta_4)[\tilde{\delta}_1^2(0)+\tilde{\delta}_2^2(0)]\}$$

式中常数 $\beta_i\geqslant0(i=1\sim4)$ 与自适应律参数有关. 情形 1)：$C_1\sim c(1-2c_\Delta-c/|c_0|)^{-1}$，$C_2,C_3\sim c|c_0|^{-1}(1-2c_\Delta-c/|c_0|)^{-1}$；情形 2)：$C_1\sim c(1-c_\Delta-c/|k_c|)^{-1}$，$C_2,C_3\sim c|k_c|^{-1}(1-c_\Delta-c/|k_c|)^{-1}$.

为表述简洁，若无必要说明，本文用通用符号 c 表示正常数.

在证明主要结果前，先给出一些将用到的术语、记号与引理.

x_t 表示信号 x 在时刻 t 的截断. 向量范数 $\|x_t\|_2^\delta\equiv\left(\int_0^t\mathrm{e}^{-\delta(t-\tau)}[x^{\mathrm{T}}(\tau)x(\tau)]\mathrm{d}\tau\right)^{1/2}$.

设传递函数阵 $T(s)$ 的每个元素都是真(proper)且在 $\mathrm{Re}[s]\geqslant-\delta/2$ 解析，定义

$$\|T(s)\|_\infty^\delta\equiv\|T(s-\delta/2)\|_\infty$$

$$\|T(s)\|_2^\delta\equiv\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{trace}[T^*(\mathrm{j}\omega-\delta/2)T(\mathrm{j}\omega-\delta/2)]\mathrm{d}\omega\right)^{1/2}\quad(T(s)\text{ 严格真})$$

$$\|(T)_{\omega_0}\|_\infty\equiv\sup_{\omega\in[0,\omega_0]}\{\lambda_{\max}[T^*(\mathrm{j}\omega)T(\mathrm{j}\omega)]\}^{1/2}$$

$$\|(T)_{\omega_0}\|_\infty^\delta\equiv\sup_{\omega\in[0,\omega_0]}\{\lambda_{\max}[T^*(\mathrm{j}\omega-\delta/2)T(\mathrm{j}\omega-\delta/2)]\}^{1/2}$$

根据控制系统的构成，容易得到

$$e=G_{y1}[\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\omega]+G_f[\eta] \tag{7}$$

$$y = G_{y1}(s)[\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\omega] + G_{y2}(s)[u] + W_m(s)[r] \tag{8}$$

$$u = G_{u1}(s)[\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\omega] + G_{u2}(s)[u] + \Delta_m(s)[u] + G_l^{-1}W_m[r] \tag{9}$$

式中 $G_f=1/(c_0+F)$, $G_{y1}=G_fW_m$, $G_{y2}=G_f(c_0+W_mF_2)\Delta$, $G_{u1}=G_l^{-1}G_{y1}$, $G_{u2}=G_l^{-1}G_{y2}$. 所有这些传递函数真、稳定，且 G_{y1}, G_{y2}严格真、阶差为 2，取 $\delta>0$ 使这些传递函数在 $\mathrm{Re}[s]\geqslant-\delta/2$ 解析，则下列记号表示的范数存在：

$g_c\equiv\|G_f(s)\|_\infty^\delta$, $g_{yi}\equiv\|G_{yi}(s)\|_\infty^\delta$, $\bar{g}_{yi}\equiv\|sG_{yi}(s)\|_\infty^\delta$, $g_{ui}\equiv\|G_{ui}(s)\|_\infty^\delta$, $h_{yi}\equiv\|G_{yi}(s)\|_\infty$, $h_{ui}\equiv\|G_{ui}(s)\|_\infty$, $f_{yi}\equiv\|G_{yi}(s)\|_2^\delta$, $g_{u3}\equiv\|\Delta_m(s)\|_\infty^\delta$, $c_\Delta\equiv\|\Delta_m(s)\|_\infty$, $i=1,2$.

引理 1. 设 $\tau\delta\ll1$. 1) 取 $N(s)=M(s)=1$，若 k_c 近似 1，则 g_{y1}, g_{u1}有正比于$|c_0|^{-1}$的上界，此外若 c_0 较大，δ 很小，则 $g_{u2}\leqslant(1+\bar{\varepsilon}_1)c_\Delta$, $g_{y2}\leqslant c(1+\bar{\varepsilon}_2)c_\Delta/|c_0|$，其中 $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2\ll1$; 2) 若 $k_c\gg1$，则 $\|(G_i)_{\tau^{-1}}\|_\infty^\delta$(下标 i 对应 $y1,y2,u1,u2$)与 $\|(sG_j)_{\tau^{-1}}\|_\infty^\delta$(下标 j 对应 $y1,y2$)均有正比于$|k_c|^{-1}$的上界.

证明. 可导出 g_c 介于 $c_1(k_c|c_0|)^{-1}$与 $c_2|c_0|^{-1}$之间，而 g_{y1}, g_{u1}正比于 g_c, g_{y2}, g_{u2}正比于 g_c 与 c_Δ 而 k_c 近似 1，从而证得 1). 对于情形 2)可导出 $\|(G_f)_{\tau^{-1}}\|_\infty^\delta$有上界 $c|k_c|^{-1}$，再利用相关的传递函数的性质以及与 G_f 的关系可证 2). 证毕.

引理 2. 设 $\omega_0,\delta>0$，系统 $x_{\mathrm{out}}(t)=T(s)[x_{\mathrm{in}}](t)$的传递函数阵 $T(s)$稳定且真. 1) 若 $x_{\mathrm{in}}\in S_{\omega_0}$，则 $\|x_{\mathrm{out}}\|_2\leqslant\|(T)_{\omega_0}\|_\infty\|x_{\mathrm{in}}\|_2$; 2) 若 $T(s)$在 $\mathrm{Re}[s]\geqslant-\delta/2$ 解析，$(\mathrm{e}^{\delta(\tau-t)/2}x_{\mathrm{in}})_t\in S_{\omega_0}$，则 $\|(x_{\mathrm{out}})_t\|_2^\delta\leqslant\|(T)_{\omega_0}\|_\infty^\delta\|(x_{\mathrm{in}})_t\|_2^\delta$.

证明. 将信号在频域表示，由 $x_{\mathrm{in}}\in S_{\omega_0}$与 Parseval 恒等式可得到结论 1). 对输入输出信号指数加权并截断，导出$(\mathrm{e}^{\delta(\tau-t)/2}x_{\mathrm{out}})_t(\tau)=P_tT(s-\delta/2)[(\mathrm{e}^{\delta(\tau-t)/2}x_{\mathrm{in}})_t](\tau)$, P_t 是截断算子，利用 $\|x_t\|_2^\delta=\|(\mathrm{e}^{\delta(\tau-t)/2}x)_t\|_2$ 与$(\mathrm{e}^{\delta(\tau-t)/2}x_{\mathrm{in}})_t\in S_{\omega_0}$，类似结论 1)的证明并应用不等式 $\|P_tT[x]\|_2\leqslant\|T[x]\|_2$，就有 $\|(x_{\mathrm{out}})_t\|_2^\delta\leqslant\|(T)_{\omega_0}\|_\infty^\delta\|(x_{\mathrm{in}})_t\|_2^\delta$. 证毕.

因为与对象初态的相关项呈指数衰减，下文推导中忽略初态相关项.

引理 3[5]. $u/m, y/m, \omega/m, \phi/m, \eta/m\in L_\infty$.

引理 4. 若参数自适应律由式(6)给出，设 $d(t)=\varepsilon(t)k(t)$，则 1)参数 θ 连续有界；2)参数 $\hat{\delta}_1$, $\hat{\delta}_2$ 连续有界，并且收敛；3) $d(t)/m(t)\in L_2$; 4) $\dot{\theta}\in L_2$.

证明. 取 Lyapunov 函数 $V(t)=(\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\tilde{\theta}+p^{-1}\tilde{\delta}_1^2+p^{-1}\tilde{\delta}_2^2)/2$，可证得 $\dot{V}(t)\leqslant-d^2(t)(1-\zeta^{-2})/(2m^2)\leqslant0$，即 $V(t)\in L_\infty$且 $d/m\in L_2$，则参数 θ, $\hat{\delta}_1$, $\hat{\delta}_2$ 有界且 $\hat{\delta}_1$, $\hat{\delta}_2$ 必收敛于常值，再由 $\dot{\theta}^{\mathrm{T}}\dot{\theta}=\phi^{\mathrm{T}}\Gamma^{\mathrm{T}}\Gamma\phi\cdot d^2/m^4$ 与 $\phi/m\in L_\infty$，证得 $\dot{\theta}\in L_2$. 证毕.

引理 5. 对于自适应律(6)，

$$\int_t^{t+T}d^2/m^2\mathrm{d}t\leqslant\beta_1|\tilde{\theta}(t)|^2+\beta_2[\tilde{\delta}_1^2(t)+\tilde{\delta}_2^2(t)],\ \forall\, t,T\geqslant0$$

$$\int_t^{t+T}\dot{\theta}^{\mathrm{T}}\dot{\theta}\,\mathrm{d}t\leqslant\beta_3|\tilde{\theta}(t)|^2+\beta_4[\tilde{\delta}_1^2(t)+\tilde{\delta}_2^2(t)],\forall\, t,T\geqslant0$$

式中 $\beta_1=(1-\zeta^{-2})^{-1}\lambda_m^{-1}$, $\beta_2=(1-\zeta^{-2})^{-1}p^{-1}$, $\beta_3=\lambda_M^2\beta_0^2\beta_1$, $\beta_4=\lambda_M^2\beta_0^2\beta_2$. 其中 $\lambda_m=\lambda_{\min}(\Gamma)$, $\lambda_M=\lambda_{\max}(\Gamma)$, β_0 是$|\phi|/m$ 的上界.

证明. 可从引理 4 的详细证明过程导出，略. 证毕.

定理 1 证明. 取 $0<\delta\leqslant\delta_0$，定义 $m_f(t)=1+\|u_t\|_2^\delta+\|y_t\|_2^\delta$，易证$|m(t)|\leqslant m_f(t)$，若 $m_f(t)$有界，则根据引理 3 就可保证闭环信号有界.

由 $\omega(t)$的定义及式(8)，(9)，根据文献[11]中的引理 2.1，有

$$\|\omega_t\|_2^\delta\leqslant cm_f,\quad \|\dot{\omega}_t\|_2^\delta\leqslant cm_f+\|\dot{y}_t\|_2^\delta,\quad |\omega|\leqslant cm_f+|y|$$

$$\|y_t\|_2^\delta\leqslant c+g_{y1}\|(\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\omega)_t\|_2^\delta+g_{y2}\|u_t\|_2^\delta,\quad \|u_t\|_2^\delta\leqslant c+g_{u1}\|(\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\omega)_t\|_2^\delta+g_{u2}\|u_t\|_2^\delta+g_{u3}\|u_t\|_2^\delta$$

$$|y|\leqslant c+f_{y1}\|(\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\omega)_t\|_2^\delta+f_{y2}\|u_t\|_2^\delta,\quad \|\dot{y}_t\|_2^\delta\leqslant c+\bar{g}_{y1}\|(\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\omega)_t\|_2^\delta+\bar{g}_{y2}\|u_t\|_2^\delta$$

利用这些式子与 $\tilde{\theta}$ 有界可导出

$$m_f\leqslant c+(g_{y1}+g_{u1})\|(\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\omega)_t\|_2^\delta+(g_{y2}+g_{u2}+g_{u3})m_f \tag{10}$$

$$|\omega|\leqslant c+(c+cf_{y1}+f_{y2})m_f,\quad \|\dot{\omega}_t\|_2^\delta\leqslant c+(c+c\bar{g}_{y1}+\bar{g}_{y2})m_f \tag{11}$$

设 $\Lambda_0(s)=\alpha^{n^*}/(s+\alpha)^{n^*}$,$s\Lambda_1(s)=1-\Lambda_0(s)$,$(\alpha>\delta/2)$. 由文献[11]中的引理 2.3

$$\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\omega=\Lambda_1[\dot{\tilde{\theta}}^{\mathrm{T}}\omega+\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\dot{\omega}]+\Lambda_0W_m^{-1}[\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}W_m[\omega]+W_c[(W_b[\omega^{\mathrm{T}}])\dot{\tilde{\theta}}]] \tag{12}$$

式中 $W_i(s)$ 的定义参见文献[11]中的引理 2.3,其中 $W_b(s)$ 严格真,利用式(12)与

$$|W_b(s)[\omega^{\mathrm{T}}]|\leqslant c\|\omega_t\|_2^\delta\leqslant cm_f,\quad \|(\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\dot{\omega})_t\|_2^\delta\leqslant c\|\dot{\omega}_t\|_2^\delta\leqslant c+c(c+c\bar{g}_{y1}+\bar{g}_{y2})m_f$$

$$\|(\dot{\tilde{\theta}}^{\mathrm{T}}\omega)_t\|_2^\delta\leqslant\|(|\dot{\tilde{\theta}}||\omega|)_t\|_2^\delta\leqslant(c+cf_{y1}+f_{y2})\|(|\dot{\tilde{\theta}}|m_f)_t\|_2^\delta$$

得到

$$\|(\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\omega)_t\|_2^\delta\leqslant c+c(c+c\bar{g}_{y1}+\bar{g}_{y2})m_f/\alpha+$$

$$c\alpha^{n^*}\|(\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\phi)_t\|_2^\delta+\{c\alpha^{n^*}+c(c+cf_{y1}+f_{y2})/\alpha\}\cdot\|(|\dot{\tilde{\theta}}|m_f)_t\|_2^\delta \tag{13}$$

代入到式(10)

$$m_f\leqslant\{c+c(g_{y1}+g_{u1})\}+c(g_{y1}+g_{u1})\alpha^{n^*}\|(\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\phi)_t\|_2^\delta+$$

$$(g_{y1}+g_{u1})\{c\alpha^{n^*}+c(c+cf_{y1}+f_{y2})/\alpha\}\cdot\|(|\dot{\tilde{\theta}}|m_f)_t\|_2^\delta+$$

$$\{(g_{y2}+g_{u2}+g_{u3})+c(g_{y1}+g_{u1})(c+c\bar{g}_{y1}+\bar{g}_{y2})/\alpha\}m_f \tag{14}$$

又

$$(\|m_t\|_2^\delta)^2=\int_0^t \mathrm{e}^{-\delta(t-\tau)}\left[1+\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\delta_0(\tau-s)}(u^2(s)+y^2(s))\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}\tau\leqslant\alpha_0+\alpha_1m_f^2(t) \tag{15}$$

其中 $\alpha_1=1/(\delta_0-\delta)$,$\alpha_0=\max\{1/\delta-\alpha_1,0\}$. 利用 $|\varepsilon|\leqslant|d|+\zeta\sqrt{\hat{\gamma}}$

$$(\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\phi)^2=(\varepsilon-\eta)^2\leqslant2\varepsilon^2+2\eta^2\leqslant4d^2+4\zeta^2\hat{\gamma}+2\eta^2 \tag{16}$$

由引理 4,取 $\hat{\delta}_1,\hat{\delta}_2$ 的极限 $\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2$,则 $\hat{\gamma}(t)\leqslant\bar{\varepsilon}_1+\bar{\varepsilon}_2m^2(t)$,从而有

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-\delta(t-\tau)}\hat{\gamma}(\tau)\mathrm{d}\tau\leqslant\bar{\varepsilon}_1\int_0^t \mathrm{e}^{-\delta(t-\tau)}\mathrm{d}\tau+\bar{\varepsilon}_2\int_0^t \mathrm{e}^{-\delta(t-\tau)}m^2(\tau)\mathrm{d}\tau\leqslant c+\bar{\varepsilon}_2(\|m_t\|_2^\delta)^2 \tag{17}$$

记 $g_\eta\equiv\|(c_0+W_mF_2)\Delta\|_m^\delta$,则 $\|\eta_t\|_2^\delta\leqslant g_\eta\|u_t\|_2^\delta\leqslant g_\eta m_f(t)$. 由式(15)~(17)

$$\|(\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\phi)_t\|_2^\delta\leqslant c+\sqrt{4\zeta^2\bar{\varepsilon}_2\alpha_1+2g_\eta^2}m_f(t)+2\|d_t\|_2^\delta \tag{18}$$

将式(18)代入到式(14),并令

$$C=1-\{(g_{y2}+g_{u2}+g_{u3})+$$

$$c\alpha^{-1}(g_{y1}+g_{u1})\cdot(c+c\bar{g}_{y1}+\bar{g}_{y2})+c(g_{y1}+g_{u1})\alpha^{n^*}\sqrt{4\zeta^2\bar{\varepsilon}_2\alpha_1+2g_\eta^2}\}$$

$$C_1=\{c+c(g_{y1}+g_{u1})+c(g_{y1}+g_{u1})\alpha^{n^*}\}/C,\quad C_2=c(g_{y1}+g_{u1})\alpha^{n^*}/C$$

$$C_3=(g_{y1}+g_{u1})\{c\alpha^{n^*}+c\alpha^{-1}(c+cf_{y1}+f_{y2})\}/C$$

得到 $m_f\leqslant CC_1+(1-C)m_f+CC_2\|d_t\|_2^\delta+CC_3\|(|\dot{\tilde{\theta}}|m_f)_t\|_2^\delta$. δ 取得足够小,因而 $g_{u3}\approx c_\Delta$,若 $c_\Delta\leqslant1-\varepsilon_0$,则存在与 ε_0 相当大的 ε_1 使得 $g_{u3}\leqslant1-\varepsilon_1$. 对于定理中 1),由引理 1 中的 1),$g_{y1}$

$\leqslant c|c_0|^{-1}$, $g_{u1}\leqslant c|c_0|^{-1}$, $g_{u2}\leqslant(1+\bar{\varepsilon}_1)c_\Delta$, $g_{y2}\leqslant cc_\Delta/|c_0|$, $(\bar{\varepsilon}_1\ll 1)$，则

$$C\geqslant 1-(2+\bar{\varepsilon}_1)c_\Delta-c/|c_0|\geqslant\varepsilon_0+\varepsilon_0\bar{\varepsilon}_1/2-\bar{\varepsilon}_1/2-c/|c_0|$$

只要 $\varepsilon_0\geqslant\bar{\varepsilon}_1/2$，$c_0$ 的值充分大，就有 $C>0$. 对于情形 2)，设 $\omega_0=1/\tau$，根据引理 2，只要 τ 取得很小，证明中用到形如 $\|(x_{\text{out}})_t\|_2^\delta\leqslant\|T\|_\infty^\delta\|(x_{\text{in}})_t\|_2^\delta$ 的不等式就可以用 $\|(x_{\text{out}})_t\|_2^\delta\leqslant\|(T)_{\omega_0}\|_\infty^\delta\|(x_{\text{in}})_t\|_2^\delta$ 替换，因此系数 C 中的 $g_{yi},\bar{g}_{yi},g_{ui}\,(i=1,2)$ 就可以用相应的 $\|(T)_{\omega_0}\|_\infty^\delta$ 替代，由引理 1 中的 2)，这些 $\|(T)_{\omega_0}\|_\infty^\delta$ 有上界 $c/|k_c|$，所以适当大的 k_c 值就可保证 $C>0$. 平方 $m_f\leqslant C_1+C_2\|d_t\|_2^\delta+C_3\|(|\dot{\tilde{\theta}}|m_f)_t\|_2^\delta$ 并利用 Schwarz 不等式

$$m_f^2\leqslant 2C_1^2+2C_2^2\int_0^t\mathrm{e}^{-\delta(t-\tau)}d^2(\tau)\mathrm{d}\tau+2C_3^2\int_0^t\mathrm{e}^{-\delta(t-\tau)}|\dot{\tilde{\theta}}|^2m_f^2\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$2C_1^2+2C_2^2\int_0^t\mathrm{e}^{-\delta(t-\tau)}(d/m)^2m_f^2\mathrm{d}\tau+2C_3^2\int_0^t\mathrm{e}^{-\delta(t-\tau)}|\dot{\tilde{\theta}}|^2m_f^2\mathrm{d}\tau \tag{19}$$

根据引理 4，$\dot{\tilde{\theta}}\in L_2$，$d/m\in L_2$，由 Bellman-Gronwall 引理[12]，可证得 $m_f(t)$ 有界. 令 $h(t)=2C_2^2(d/m)^2+2C_3^2|\dot{\tilde{\theta}}|^2$，由式(19)得

$$m_f^2(t)/(2C_1^2)\leqslant 1+\int_0^t\mathrm{e}^{-\delta(t-\tau)}h(\tau)\left[\exp\int_\tau^t\mathrm{e}^{-\delta(t-s)}h(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}\tau=\exp\left[\int_0^t\mathrm{e}^{-\delta(t-\tau)}h(\tau)\mathrm{d}\tau\right]$$

再由引理 5，得到

$$|m(t)|\leqslant\bar{m}=\sqrt{2}C_1\exp\{(C_2^2\beta_4+C_3^2\beta_6)|\tilde{\theta}(0)|^2+(C_2^2\beta_5+C_3^2\beta_7)[\tilde{\delta}_1^2(0)+\tilde{\delta}_2^2(0)]\}$$

根据系数 C_1,C_2,C_3 的定义可估计出近似值. 证毕.

推论 1. 设 $\omega_0=1/\tau$，定理 1 中 c_Δ 用 $\|(\Delta_m(s))_{\omega_0}\|_\infty$ 替换，定理 1 中的 2)成立.

证明. 系统频带受限，在定理 1 证明中可将 $\|\cdot\|_\infty$ 替换为 $\|(\cdot)_{\omega_0}\|_\infty$ 从而得证. 证毕.

定理 2. 在定理 1 的条件下(对于情形 2)附加条件 $\varepsilon_0>\bar{\varepsilon}_1$，其中 $\bar{\varepsilon}_1$ 是很小的正常数)，闭环系统的跟踪误差 $e(t)$ 满足

$$\int_0^t e^2(\tau)\mathrm{d}\tau/t\leqslant c\{1+\bar{m}^2+\alpha_\Delta(1+k_f^{-2}\bar{m}^2)\}/k_f^2 \tag{20}$$

式中，$\bar{m}$ 在定理 1 中定义，对于情形 1)，$k_f\equiv c_0$，$\alpha_\Delta=[1-(2+\bar{\varepsilon}_1)c_\Delta]^{-1}$；对于 2)，$k_f\equiv k_c$，$\alpha_\Delta=(1-c_\Delta-c|k_c|^{-1})^{-1}$. 此外，在定理 1 中 2)的条件下，若 $\tau=0$，则

$$\sup_{t\geqslant 0}|e(t)|\leqslant c|k_c|^{-1}\bar{m} \tag{21}$$

证明. 式(7)可写为 $e=G_{y1}(s)[\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\omega]+G_{y2}(s)[u]$. 取 $0<\delta\leqslant\delta_0$，则 $\|e_t\|_2\leqslant h_{y1}\|(\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\omega)_t\|_2+h_{y2}\|u_t\|_2$, $\|u_t\|_2\leqslant h_{u1}\|(\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\omega)_t\|_2+h_{u2}\|u_t\|_2+c_\Delta\|u_t\|_2+c\|r_t\|_2$，根据自适应参数与闭环输入有界

$$\|e_t\|_2\leqslant ch_{y1}\|\omega_t\|_2+h_{y2}\|u_t\|_2,\ (1-h_{u2}-c_\Delta)\|u_t\|_2\leqslant ch_{u1}\|\omega_t\|_2+ct^{1/2} \tag{22}$$

由定理 1 的证明，$|\omega|\leqslant c+(c+cf_{y1}+f_{y2})m_f$，对该式平方积分并利用 $m_f\leqslant\bar{m}$ 得

$$(\|\omega_t\|_2)^2\leqslant ct+2(c+cf_{y1}+f_{y2})^2\bar{m}^2t \tag{23}$$

引理 1 在 $\delta=0$ 时仍然成立. 由定理 1 中 1)的条件，$h_{y1},h_{y2},h_{u1}<c|c_0|^{-1}$，$h_{u2}\leqslant(1+\bar{\varepsilon}_1)c_\Delta$. 只要 $\varepsilon_0>\bar{\varepsilon}_1$ 可保证 $(1-h_{u2}-c_\Delta)>0$，综合式(22)，(23)得到式(20). 对于定理 1 中 2)的条件，式(22)，(23)中的 $h_{yi},h_{ui}(i=1,2)$ 可由相应传递函数的范数 $h_i^*=\|(\cdot)_{\omega_0}\|_\infty$ 替代，由引理 1，它们均正比于 $|k_c|^{-1}$，因而，只要 $c_\Delta<1$，k_c 适当大，可保证 $(1-h_{u2}^*-c_\Delta)>0$，同样得到式(20). 又 $|e(t)|\leqslant f_{y1}\|(\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\omega)_t\|_2^\delta+f_{y2}\|u_t\|_2^\delta$，对于定理 1 中 2)的条件与 $\tau=0$，容易验证 f_{y1}，f_{y2} 有界 $c|k_c|^{-1}$，再利用定理 1 证明中关于 ω 的不等式可推出式(21). 证毕.

4 仿真

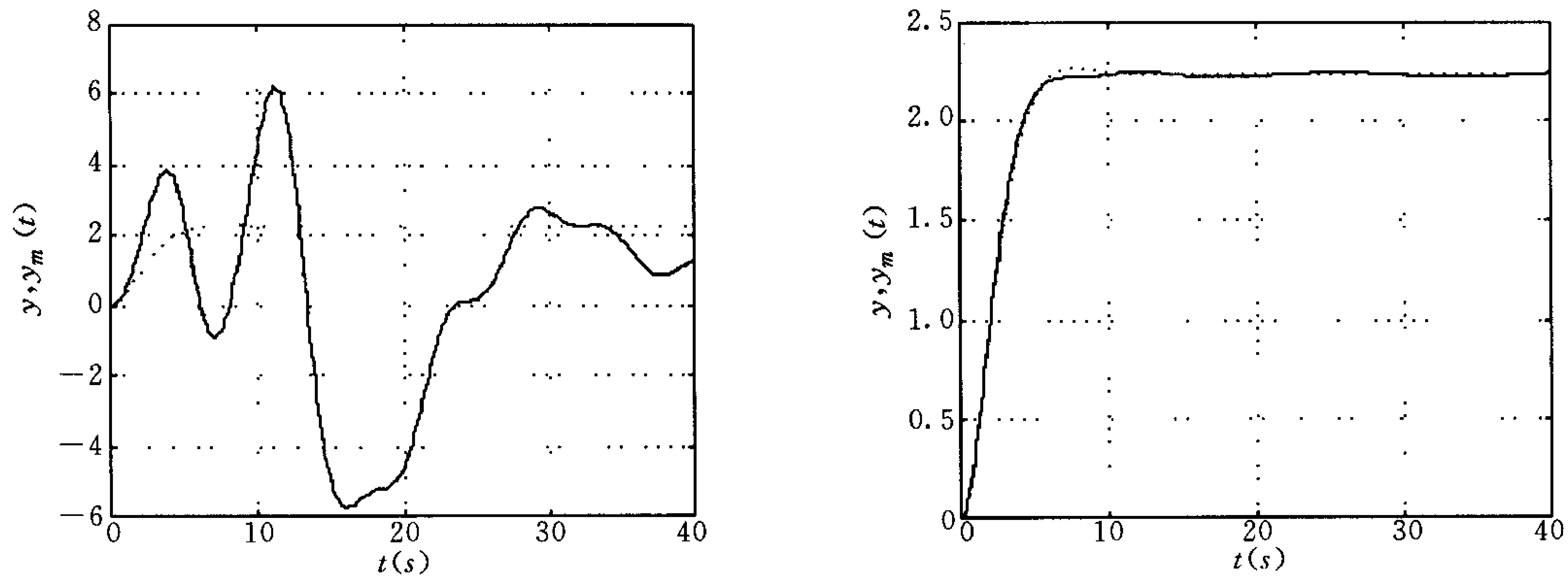
以某挠性附件的简化模型为被控对象（含一对密集模态）

$$\frac{1}{I_v}\left(\frac{1.6421}{s^2+0.00322s+0.1225}+\frac{12}{s^2+0.00253s+0.4}+\frac{0.73}{s^2+0.00756s+0.49}+\right.$$
$$\left.\frac{0.163}{s^2+0.0607s+3.3489}+\frac{12}{s^2+0.1466s+9.9856}\right) \tag{24}$$

参考模型取 $k_m/(s^2+1.072s+0.4489)$，$c_0=k_m/k_p=0.377$，取 $k_m=1$，$I_v=10$. 设计控制器时假设对象其它参数未知. 参数 $\tau=0.1$，$\delta_0=0.125$，$\Gamma=I$，$p=1$.

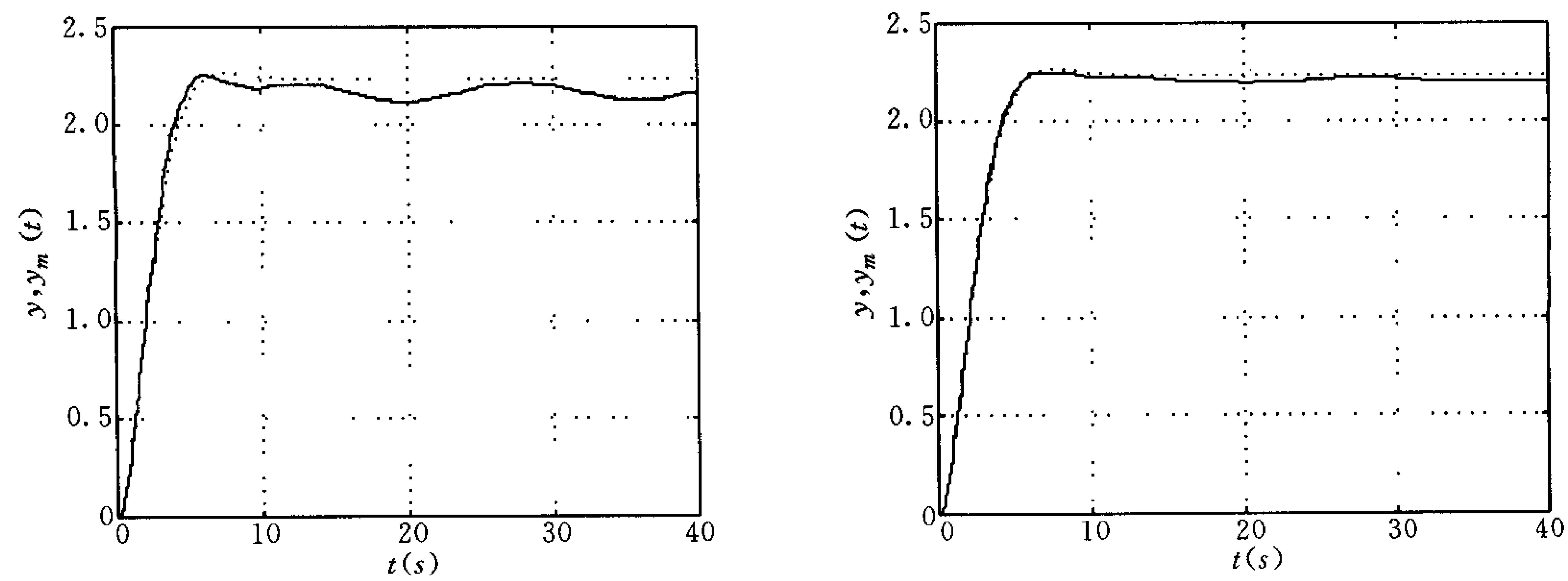
首先，对典型的模型参考自适应方法与本文方法进行比较. 为保证典型方法的稳定性，被控对象取为式(24)的前两个模态，由于不存在模型不确定性，典型方法能确保系统渐近稳定，但是从图 1 可以看出，其动态性能较差，在 40 秒内跟踪误差较大，控制量在 1.0 左右. 而本文方法（取 $k_c=30$）在整个控制时间内跟踪误差均在 0.05 以下，相对误差小于 2.2%，控制量 0.5 左右，控制系统的动态性能得到显著的改善.

其次，10 阶对象式(24)被当作 4 阶模型进行控制器设计. 输入为阶跃信号，k_c 由 5 到 30，仿真结果表明，它们的控制量大致相近，而控制性能依次更优，跟踪误差的大小大致反比于 k_c，而控制量的大小基本上与 k_c 无关. 图 2 给出了 $k_c=10,30$ 时的仿真结果. 对方波、正弦



(a) 典型的模型参考自适应控制　　(b) 本文方法($k_c=30$)

图 1　典型方法与本文方法比较（4 阶对象输出—；参考输出…）



(a) $k_c=10$　　(b) ($k_c=30$)

图 2　本文方法的10阶对象输出（对象输出—；参考输出…）

等多种有界输入信号下的控制性能进行了仿真实验,得出的结论相似.也对非零初始状态的情况进行了仿真,即使在控制量限幅的约束下,结构振动也可很快得到抑制,跟踪效果明显.这些实验结果不再列出.

5 结论

利用挠性结构的特点,在模型参考自适应方法的框架上研究了一种新的控制方法:

1) 扩大了自适应控制器所能容许的乘性模型不确定;

2) 控制系统跟踪误差上限可由控制器设计参数调节,这为控制系统具有优良的动态性能与稳态性能提供了保障.

对于模型高频增益未知但符号已知的情况,可增加对高频增益进行估计的环节,依照相似路线进行分析.对含刚性模态的结构,可先用 PD 等方法进行内环反馈镇定,再用本文方法设计外环控制,以提高系统动态性能.

参 考 文 献

1 Balas M, Johnson Jr C R. Toward adaptive control of large structures in space. In: Narendra K S, Monopoli R, Applications of Adaptive Control. New York: Academic, 1980

2 Morse A S. Global stability of parameter adaptive control systems. *IEEE Trans. Automa. Control*, 1980, **25**(3): 433~439

3 Narendra K S, Lin Y H, Valavani L S. Stable adaptive controller design—Part II: Proof of stability. *IEEE Trans. Automa. Control*, 1980, **25**(3): 440~448

4 Goodwin G C, Ramadge P J, Caines P E. Discrete time multivariable adaptive control. *IEEE Trans. Automa. Control*, 1980, **25**(3): 449~456

5 Ioannou P A, Tsakalis K S. A robust direct adaptive controller. *IEEE Trans. Automa. Control*, 1986, **31**(11): 1033~1043

6 Ioannou P A, Datta A. Robust adaptive control: A unified approach. *Proceedings of the IEEE*, 1991, **79**(12): 1736~1767

7 Tsakalis K S. Robustness of model reference adaptive controllers: An input-output approach. *IEEE Trans. Automa. Control*, 1992, **37**(5): 556~565

8 Tao G. A robust adaptive law for $l^{1+\alpha}$ modeling errors. *IEEE Trans. Automa. Control*, 1999, **44**(1): 186~190

9 Feng G. Analysis of a new algorithm for continuous-time robust adaptive control. *IEEE Trans. Automa. Control*, 1999, **44**(9): 1764~1768

10 Sun J. A modified model reference adaptive control sheme for improved transient performance. *IEEE Trans. Automa. Control*, 1993, **38**(8): 1755~1759

11 Datta A, Ioannou P A. Performance analysis and improvement in model reference adaptive control. *IEEE Trans. Automa. Control*, 1994, **39**(12): 2370~2387

12 Desoer C A, Vidyasagar M. Feedback Systems: Input-Output Properties. New York: Academic, 1975

刘一武 1998 年毕业于重庆大学自动化学院,获博士学位,1998 至 2000 年在北京控制工程研究所作博士后.研究领域有航天控制、鲁棒控制、小波分析应用.

张洪华 1991 年毕业于北京航空航天大学获博士学位,研究员.研究领域有挠性航天器动力学与控制、星群星座控制.

吴宏鑫 研究员,博士生导师,主要研究方向有自适应控制、智能控制等.