



任意切换下不确定线性切换系统的鲁棒镇定¹⁾

张霄力 赵军

(东北大学信息科学与工程学院 沈阳 110004)

关键词 切换系统, 共同 Lyapunov 函数, 状态反馈, 输出反馈

中图分类号 TP273

ROBUST STABILIZATION OF SWITCHED LINEAR SYSTEMS WITH UNCERTAINTY UNDER ARBITRARY SWITCHING

ZHANG Xiao-Li ZHAO Jun

(School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004)

Key words Switched systems, common Lyapunov function, state feedback, output feedback

1 引言

切换系统是一类重要的混合系统, 它的稳定性是研究最为集中的问题之一. 目前已引起国内学者的广泛关注^[1,2]. 对于线性切换系统, 共同 Lyapunov 函数的存在性与任意切换策略下系统的稳定性是等价的^[3]. 目前已取得的成果中, 切换系统中同时具有外部干扰和输入通道也具有不确定性问题的研究几乎未见到有结果报道. 本文考虑了一类标称系统存在共同 Lyapunov 函数的不确定线性切换系统鲁棒镇定问题. 对系统具有外部干扰的同时输入通道也具有不确定性, 扰动项不满足通常的匹配条件, 分别设计出状态反馈和输出反馈的鲁棒控制器, 确保闭环系统在任意给定的切换策略下在其平衡点处是渐近稳定的.

2 问题的描述和主要结果

考虑下面的不确定切换系统

1) 国家自然科学基金(79970114)、国家攀登计划、国家留学回国人员基金和教育部及东北大学骨干教师基金资助

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A_i \mathbf{x} + B_i(I + E_i)\mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y} = C_i \mathbf{x} \end{cases} \quad (1)$$

这里 $i \in M = \{1, 2, \dots, m\}$ 表示系统(1)的 m 个切换子系统; $\mathbf{x} \in R^n, \mathbf{u} \in R^r, \mathbf{y} \in R^r$ 分别是系统的状态、控制输入和输出向量; A_i, B_i, C_i 分别是第 i 个子系统的状态矩阵、输入增益矩阵和输出矩阵; E_i 是第 i 个子系统输入不确定性, $\Delta \mathbf{f}_i(\mathbf{x})$ 是第 i 个子系统的不确定项. 相对于系统(1)的标称系统为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A_i \mathbf{x} + B_i \mathbf{u}_i, \\ \mathbf{y} = C_i \mathbf{x}, \end{cases} \quad i \in M = \{1, 2, \dots, m\} \quad (2)$$

引入符号 $\lambda_{\max}(P), \lambda_{\min}(P)$ 表示正定矩阵 P 的最大特征值和最小特征值; $\|(\cdot)\|$ 表示向量或矩阵的欧氏范数. 首先要构造状态反馈鲁棒控制器. 对此, 关于系统(1)作以下假设.

假设 1. 对于切换系统(2)的每个子系统存在共同的 Lyapunov 函数, 即下列 Riccati 不等式

$$(A_i + \alpha_i I)^T P + P(A_i + \alpha_i I) - \beta_i P B_i B_i^T P < 0 \quad (3)$$

有正定解矩阵 P , 这里 α_i, β_i 是大于 0 的任意常数.

假设 2. 存在 m 个常数 $\eta_i < 1$, 使得

$$\|E_i\| \leq \eta_i \quad (4)$$

将不确定项 $\Delta \mathbf{f}_i(\mathbf{x})$ 分解成满足匹配条件和 not 满足匹配条件的两项

$$\Delta \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) = B_i \Delta \mathbf{f}_i^1(\mathbf{x}) + \Delta \mathbf{f}_i^2(\mathbf{x}) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5)$$

假设 3. 存在 m 个连续函数 $\varphi_i(\mathbf{x})$ 和 m 个常数 δ_i , 使得

$$\|\Delta \mathbf{f}_i^1(\mathbf{x})\| \leq \varphi_i(\mathbf{x}), \quad \|\Delta \mathbf{f}_i^2(\mathbf{x})\| \leq \delta_i \|\mathbf{x}\|,$$

且

$$\Delta \mathbf{f}_i^1(0) = 0, \quad \Delta \mathbf{f}_i^2(0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (6)$$

定理 1. 若系统(1)满足假设 1~3, 并且存在的正常数 δ_i 满足 $\delta_i \lambda_{\max}(P) \leq \alpha_i \lambda_{\min}(P)$, 则在任意切换策略下系统(1)可经状态反馈镇定.

证明. 对系统(1)构造如下的状态反馈控制器 $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^1 + \mathbf{u}_i^2$,

$$\text{其中} \quad \mathbf{u}_i^1 = -\frac{\beta_i}{2(1-\eta_i)} B_i^T P \mathbf{x}, \quad \mathbf{u}_i^2 = \begin{cases} -\frac{\varphi_i(\mathbf{x})}{(1-\eta_i)} \frac{B_i^T P \mathbf{x}}{\|B_i^T P \mathbf{x}\|}, & \|B_i^T P \mathbf{x}\| \neq 0 \\ 0, & \|B_i^T P \mathbf{x}\| = 0 \end{cases} \quad (7)$$

取 Lyapunov 函数为 $V(t) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$. 通过计算可得 Lyapunov 函数 $V(t)$ 沿由系统(1)和控制器(7)构成的闭环切换系统的每一子系统轨迹的导数均满足 $\dot{V}(t) < 0$, 所以系统(1)在任意的切换策略下, 都可经状态反馈 \mathbf{u} 镇定. 证毕.

下面构造输出反馈控制器以确保闭环系统在其平衡点处渐近稳定, 据文献[4], 讨论系统(1)的输出反馈镇定问题的另一个基本条件和不确定项应满足以下假设.

假设 4. 存在 m 个可逆矩阵 Q_i , 使下式成立

$$B_i^T P = Q_i C_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (8)$$

假设 5. 存在已知连续函数 $\xi_i(\mathbf{y}), \psi_i(\mathbf{y})$, 使得下式成立

$$\|\Delta \mathbf{f}_i^1(\mathbf{x})\| \leq \xi_i(\mathbf{y}), \quad \|\Delta \mathbf{f}_i^2(\mathbf{x})\| \leq \psi_i(\mathbf{y}) \|\mathbf{y}\| \quad (9)$$

定理 2. 若系统(1)满足假设 1, 2, 4, 5, 则系统(1)在任意切换策略下可经输出反馈

镇定.

证明. 对系统(1)构造输出反馈控制器 $u_i = u_i^1 + u_i^2$,

$$\text{其中} \quad u_i^1 = -\frac{\beta_i}{2(1-\eta_i)} Q_i y, \quad u_i^2 = \begin{cases} S, & \|y\| \neq 0 \\ 0, & \|y\| = 0 \end{cases} \quad (10)$$

这里 $S = -\frac{\xi_i(y)(Q_i^{-1})^T y \|Q_i\|}{(1-\eta_i) \cdot \|y\|} - \frac{\psi_i^2(y)(Q_i^{-1})^T y \|P\|^2}{(1-\eta_i) \cdot 2\epsilon}$, 其中 ϵ 是大于 0 的常数. 利用控制器(10), 可以证明定理 2. 证毕.

参 考 文 献

- 1 谢广明, 郑大钟. 线性切换系统的能控性和能达性. 控制理论与应用, 1999, **16**(增刊):135~140
- 2 Ren Yan-Pin, Zhang Zuo, Wu Qiu-Feng. Stability analysis of a class of switched systems. In: Proceedings of 14th IFAC World Congress, Beijing, 1999. 515~519
- 3 Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems. *Control Systems Magazine*, 1999, **19**(5):59~70
- 4 Emelyanov S V. Discontinuous output feedback stabilizing in uncertain MIMO plant. *International Journal of Control*, 1992, **51**(1):83~107

张霄力 2001年在东北大学信息科学与工程学院获工学博士学位. 现在清华大学自动化系从事博士后研究工作. 研究方向为混合系统、切换系统的稳定性研究、复杂非线性系统的结构研究.

赵 军 东北大学信息科学与工程学院教授, 博士生导师, 中国自动化学会控制理论委员会委员. 主要研究方向为复杂非线性系统结构研究、混合系统、切换系统稳定性研究.