多平面多视点单应矩阵间的约束[1)]

吴福朝[1,2] 胡占义[1]
[1](中国科学院自动化所模式识别国家重点实验室 北京 100080)
[2](安徽大学人工智能研究所 合肥 230039)
(E-mail: {fcwu, huzy}@nlpr.ia.ac.cn)

摘 要 用代数方法系统地讨论了多平面多视点下单应矩阵间的约束关系. 主要结论有(A)如果视点间摄像机的运动为纯平移运动,则1)对于所有平面关于两视点间的单应矩阵的集合,或单个平面关于所有视点的单应矩阵的集合的秩均等于4, 2)对于多平面多视点的标准单应矩阵的集合其秩仍等于4, 3)根据以上结论可推出现有文献中关于"相对单应矩阵"约束的所有结果; (B)如果视点间摄像机的运动为一般运动, 则1)对于所有平面关于两个视点间的单应矩阵集合的秩等于4的结论仍成立, 2)对于其它情况其秩不再等于4而是等于9.

关键词 单应矩阵, 相对单应矩阵
中图分类号 TP391

MULTI-VIEW AND MULTI-PLANE CONSTRAINTS ON HOMOGRAPHIES

WU Fu-Chao[1,2] Hu Zhan-Yi[1]
[1](*National Laboratory of Pattern Recognition, Institute of Automation, C A S, Beijing* 100080)
[2](*Artificial Intelligence Laboratory, University of Hefei, Hefei* 230039)
(E-mail: {fcwu, huzy}@nlpr.ia.ac.cn)

Abstract Homography estimation is widely used for 3D motion analysis, mosaicing, camera calibration and more. This paper is concentrated on the investigation on multi-view and multi-plane constraints on homographies. The main results are: A. when the camera is under a pure translation, then, 1) both the homographies of all planes between two view points, and the homographies of a plane for all view points are of rank 4, 2) the standard homographies in multi-view and multi-plane case are still of rank 4, 3) the above two results keep true for the relative homographies in the case of general camera motion; B. when the camera is under a general motion, 1) the homographies of all planes between two view points are also of rank 4, 2) however, the rank should be 9 rather than 4 in other cases.

Key words Homography, relative homography

1) 国家自然科学基金(60075004, 60033010)、"973"计划(G1998030502)和中国科学院机器人学开放研究实验室(RL200010)资助. 本文通讯作者胡占义.
收稿日期 2000-06-15 收修改稿日期 2001-04-10

1　引言

众所周知，给定二幅图像，如果空间点之间没有任何约束，那么二图像对应点之间的唯一约束是对极几何约束(epipolar geometry)[1]．对于三幅图像，对应点之间的约束是三阶张量(trifocal tensor)[2]．对于四幅图像，对应点之间的约束是四阶张量(quad-focal tensor)[3]．当图像的数目多于4时，对应点之间不再形成任何新的约束[4]．值得指出的是，不管是对极几何，还是三阶张量、四阶张量，这些约束均不能对图像点构成一一对应关系．然而，如果我们能够得到空间点的部分信息，显然，图像对应点之间的约束将会加强．从射影几何知道，如果空间点位于同一平面上且该平面不通过二摄像机的任一光心，那么此时二幅图像对应点之间存在一一对应关系，且这种一一对应关系可以用一个称为单应矩阵(homography)的变换矩阵来表示．本文主要研究在多视点多平面的情况下，对应的单应矩阵间的约束关系．换句话说，本文主要研究诸如在所有的单应矩阵中，最多有多少个单应矩阵是线性独立的，线性独立的条件又是什么等问题．

研究单应矩阵之间的约束问题不仅具有重要的理论意义，而且具有重要的具体应用价值．如通过单应矩阵之间的约束来鲁棒地获取空间小平面区域对应的单应矩阵、检测运动物体等．尽管文献中已有一些关于单应矩阵之间约束的探讨[5,6]，但这些工作均很不系统．这也是为什么本文要对单应矩阵进行进一步研究的主要原因．本文用代数方法比较系统地研究了单应矩阵之间的约束，关于相对单应矩阵之间约束的现有成果可作为我们结果的推论．

值得指出的是，本文并没有给出任何具体实验．这样作主要是考虑到以下原因：第一，本文结果的正确性由数学证明本身可以说明，不必要借助具体实验来验证；第二，关于这些结果的应用价值，文献[6]已经给出一些具体应用实例，目前我们还没有找到比文献[6]所给实验更具说服力的例子；第三，我们认为，理论结果本身有其自身的价值，有待于以后或他人发现更多的应用场所．

2　单应矩阵的基本概念

令 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}'=(x',y',z')^{\mathrm{T}}$ 分别为同一场景点在摄像机的两个不同视点坐标系下的坐标，$\boldsymbol{m}=(u,v,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{m}'=(u',v',1)^{\mathrm{T}}$ 为两幅图像的对应点，我们有

$$\boldsymbol{m} \cong K\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{m}' \cong K\boldsymbol{x}' \tag{1}$$

其中“$\cong$”表示在相差一个非零标量因子意义下的相等，K 为摄像机内参数矩阵．

令 π 为一个平面，其规范法向量为 $\boldsymbol{n}$(即 $\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{n}_\pi}{d_\pi}$，其中 $\boldsymbol{n}_\pi$ 为平面的单位法向量，d_π 为第一个视点到平面的距离)，则对所有的空间点 $\boldsymbol{x}\in\pi$，有 $\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$，于是

$$\boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x} + \boldsymbol{t} = (R + \boldsymbol{t}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x} \tag{2}$$

所以有

$$\boldsymbol{m}' \cong H\boldsymbol{m} \tag{3}$$

其中

$$H = K(R + \boldsymbol{t}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}})K^{-1} \tag{4}$$

称为平面 π 关于两个视点的单应矩阵. 从式(3)可以看出,由对应点可以在相差一个常数因子意义下估计单应矩阵. 与单应矩阵相差一个非零标量因子的矩阵仍称为单应矩阵,特别称式(4)为标准单应矩阵.

当摄像机的运动为纯平移运动时,即 $R=I$,对应点的单应矩阵为 $H=\sigma(I+K\boldsymbol{t}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}K^{-1})$. 对应的标准单应矩阵为

$$H = I + K\boldsymbol{t}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}K^{-1} \tag{5}$$

如果能确定非零常数 σ,就可以确定标准单应矩阵. 由式(5)有 $H-\sigma I=\sigma K\boldsymbol{t}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}K^{-1}$. 因 $\mathrm{rank}(K\boldsymbol{t}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}K^{-1})=1$,所以 $\det(H-\sigma I)=0$ 且

$$\det([H-\sigma I]_{2\times 2}) = 0, \quad \forall\ [H-\sigma I]_{2\times 2} \in \Omega(H-\sigma I),$$

其中 $\Omega(H-\sigma I)$ 表示矩阵 $(H-\sigma I)$ 所有的 2 阶子矩阵. 因此 σ 是方程组

$$\det(H-\sigma I) = 0 \tag{6a}$$

$$\det([H-\sigma I]_{2\times 2}) = 0, \quad [H-\sigma I]_{2\times 2} \in \Omega(H-\sigma I) \tag{6b}$$

的一个解. 另一方面,式(6b)中包含有 6 个关于 σ 的一次方程,所以 σ 有唯一解. 这样,我们可以通过求解方程组(6b)中所包含的 6 个关于 σ 的一次方程来确定非零常数因子 σ,从而确定标准单应矩阵.

3 平移视点间单应矩阵的约束

3.1 两视点多平面

令 v_0,v_1 为摄像机的两个不同视点,v_0 是参考视点,v_1 是摄像机从 v_0 作平移运动 $(I,\boldsymbol{t})$ 后的视点,$H(v_1)$ 是关于视点对 (v_0,v_1) 的所有平面的单应矩阵的集合(以后简称视点 v_1 的所有平面的单应矩阵的集合). 对 $H(v_1)$ 中任意多个元素 $H^p(p=1,2,\cdots,k)$ 有 $H^p=\alpha_p(I+K\boldsymbol{t}\boldsymbol{n}^{p\mathrm{T}}K^{-1})$,其中 $\boldsymbol{n}^p$ 是与 H^p 对应的空间平面的规范法向量. 记

$$\boldsymbol{h}^p = (H_{11}^p, H_{12}^p, H_{13}^p, H_{21}^p, H_{22}^p, H_{23}^p, H_{31}^p, H_{32}^p, H_{33}^p)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{e} = (e_1,e_2,e_3)^{\mathrm{T}} = K\boldsymbol{t}, \quad \boldsymbol{a}^p = (a_1^p, a_2^p, a_3^p) = \boldsymbol{n}^{p\mathrm{T}}K^{-1},$$

则有

$$\boldsymbol{h}^p = \alpha_p E \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^{p\mathrm{T}} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p=1,2,\cdots,k,$$

其中 $E=\begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & e_2 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & 1 \end{bmatrix}$. 令 $H(v_1)=[\boldsymbol{h}^1\quad \boldsymbol{h}^2\quad \cdots\quad \boldsymbol{h}^k]_{9\times k}$,则

$$H(v_1)=E\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}^{1\mathrm{T}} & \boldsymbol{a}^{2\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{a}^{k\mathrm{T}}\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_k\end{bmatrix}_{P\times P}=E\begin{bmatrix}K^{-T} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}^{1\mathrm{T}} & \boldsymbol{n}^{2\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{n}^{k\mathrm{T}}\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_k\end{bmatrix} \tag{7}$$

所以 $\mathrm{rank}(H(v_1))\leqslant 4$. 此外还有

(A1) E 是列满秩. 这是因为 v_0,v_1 为两个不同视点，所以有 $\boldsymbol{t}\neq 0$，而摄像机内参数阵 K 总是可逆矩阵，从而有 $\boldsymbol{e}=K\boldsymbol{t}\neq 0$，由此可推知 E 的列向量线性无关，即 E 是列满秩；

(A2) 如果 k 张平面中存在 4 张平面其法向量不共面，则$\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}^{1\mathrm{T}} & \boldsymbol{n}^{2\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{n}^{k\mathrm{T}}\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$是行满秩；如 $\boldsymbol{n}^1,\boldsymbol{n}^2,\boldsymbol{n}^3,\boldsymbol{n}^4$ 不共面，则 $\det\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}^{1\mathrm{T}} & \boldsymbol{n}^{2\mathrm{T}} & \boldsymbol{n}^{3\mathrm{T}} & \boldsymbol{n}^{4\mathrm{T}}\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\right)\neq 0$，因此$\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}^{1\mathrm{T}} & \boldsymbol{n}^{2\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{n}^{k\mathrm{T}}\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$是行满秩；

(A3) 对角阵$\begin{bmatrix}\alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_k\end{bmatrix}$是可逆矩阵，因为 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为非零常数.

因此，由(A1)，(A2)，(A3)并结合式(7)，我们有下述结论.

结论 1. 1) $H(v_1)$ 的秩仅与平面法向量 $\boldsymbol{n}^i$ 有关而与摄像机内参数阵 K 无关；2) 如果 k 张平面中存在 4 张平面其法向量不共面，则 $\mathrm{rank}(H(v_1))=4$.

因 $H(v_1)$ 中必存在对应于法向量不共面的 4 张平面的单应矩阵，所以我们有下述命题.

命题 1. 设 v_0,v_1 为摄像机的两个不同视点，v_1 相对 v_0 摄像机的平移运动为 (I,t)，则 $\mathrm{rank}(H(v_1))=4$.

命题 1 说明，$H(v_1)$ 中存在 4 个单应矩阵，其它的单应矩阵均可由这 4 个单应矩阵线性表示.

3.2 多视点一平面

令 v_0 是参考视点，π 为一个不通过参考视点 v_0 的空间平面，V 是相对于 v_0 摄像机作平移运动下的所有视点的集合. 令 π 关于 $v_j\in V$ 的单应矩阵为 H^i，$H(\pi)=\{H^j|v_j\in V\}$ 是平面 π 关于所有视点的单应矩阵的集合. 记 $\boldsymbol{n}$ 为平面 π 关于参考视点 v_0 的规范法向量，视点 $v_j\in V$ 下摄像机的平移运动为 $(I,\boldsymbol{t}^j)$，于是 $H^j=\alpha_j(I+K\boldsymbol{t}^j\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}K^{-1})$，　$j=1,2,\cdots,l$.

记 $\boldsymbol{h}^j=(H^j_{11},H^j_{12},H^j_{13},H^j_{21},H^j_{22},H^j_{23},H^j_{31},H^j_{32},H^j_{33})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}^j=(e^j_1,e^j_2,e^j_3)^{\mathrm{T}}=K\boldsymbol{t}^j$，$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)=\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}K^{-1}$，则有

$$\boldsymbol{h}^j=\alpha_j A\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}^j\\ 1\end{bmatrix},\quad j=1,2,\cdots,l \tag{8}$$

其中 $A=\begin{bmatrix}a_1 & 0 & 0 & 1\\ a_2 & 0 & 0 & 0\\ a_3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_1 & 0 & 0\\ 0 & a_2 & 0 & 1\\ 0 & a_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_1 & 0\\ 0 & 0 & a_2 & 0\\ 0 & 0 & a_3 & 1\end{bmatrix}$. 令 $H(\pi)=[\boldsymbol{h}_1\quad \boldsymbol{h}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{h}_l]_{9\times l}$，则

$$H(\pi)=A\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}^1 & \boldsymbol{e}^2 & \cdots & \boldsymbol{e}^l\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_l\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}K & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}^1 & \boldsymbol{t}^2 & \cdots & \boldsymbol{t}^l\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_l\end{bmatrix}\tag{9}$$

所以 $\mathrm{rank}(H(\pi))\leqslant 4$. 此外还有

(B1) A 是列满秩. 因 π 为一个不通过参考视点 v_0 的空间平面，所以有 $\boldsymbol{n}\neq 0$，从而必有 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)=\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}K^{-1}\neq 0$，由此可推知 A 的列向量线性无关，即 A 是列满秩；

(B2) 如果 l 个视点中存在 4 个视点所对应的摄像机的平移向量不共面，则 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}^1 & \boldsymbol{t}^2 & \cdots & \boldsymbol{t}^l\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$是行满秩的；

(B3) 对角阵$\begin{bmatrix}\alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_l\end{bmatrix}$是可逆矩阵.

因此，由(B1)，(B2)，(B3)并结合式(9)，我们有下述结论.

结论 2. 1)$H(\pi)$的秩仅与平移向量 $\boldsymbol{t}^i$ 有关而与内参数阵 K 无关；2)如果 l 个视点中存在 4 个视点所对应的摄像机的平移向量不共面，则 $\mathrm{rank}(H(\pi))=4$.

这样，我们有下述命题.

命题 2. 令 π 为一个空间平面，v_0 是参考视点，V 是相对于 v_0 摄像机作平移运动的所有视点的集合，则 $\mathrm{rank}(H(\pi))=4$.

命题 2 说明，V 中存在 4 个视点，其它视点的单应矩阵均可以由这 4 个视点下的单应矩阵线性表示.

3.3 多视点多平面

令 P 是空间平面的集合，v_0 是参考视点，V 是相对于 v_0 摄像机作平移运动的所有视点的集合. 设 $\pi_1,\pi_1,\cdots,\pi_k\in P$，$v_1,v_2,\cdots,v_l\in V$，$\pi_i$ 关于视点对(v_0,v_j)的标准单应矩阵为 H_i^j. 记 $\boldsymbol{h}_i^j$ 是标准单应矩阵 H_i^j 所对应的 9 维列向量.

由 3.1 节的讨论，我们有

$$H(v_j)=[\boldsymbol{h}_j^1\quad \boldsymbol{h}_j^2\quad \cdots\quad \boldsymbol{h}_j^k]_{9\times k}=E_j\begin{bmatrix}K^{-\mathrm{T}} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{4\times 4}\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}^{1\mathrm{T}} & \boldsymbol{n}^{2\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{n}^{k\mathrm{T}}\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix},$$

其中 $E_j=\begin{bmatrix}e_1^j & 0 & 0 & 1\\ 0 & e_1^j & 0 & 0\\ 0 & 0 & e_1^j & 0\\ e_2^j & 0 & 0 & 0\\ 0 & e_2^j & 0 & 1\\ 0 & 0 & e_2^j & 0\\ e_3^j & 0 & 0 & 0\\ 0 & e_3^j & 0 & 0\\ 0 & 0 & e_3^j & 1\end{bmatrix}$，$j=1,2,\cdots,l$. 令 $\widetilde{H}(v)=\begin{bmatrix}H(v_1)\\ H(v_2)\\ \vdots\\ H(v_l)\end{bmatrix}_{9l\times k}$，则

$$\widetilde{H}(v)=\begin{bmatrix}E_j\\E_j\\\vdots\\E_j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K^{-\mathrm{T}} & 0\\0 & 1\end{bmatrix}_{4\times 4}\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}^{1\mathrm{T}} & \boldsymbol{n}^{2\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{n}^{k\mathrm{T}}\\1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix},$$

于是 $\mathrm{rank}(\widetilde{H}(v))\leqslant 4$. 这样，由结论 1，我们有以下命题.

命题 3. 令 P 是空间平面的集合，v_0 是参考视点，V 是相对于 v_0 摄像机作平移运动的所有视点的集合，设 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_k\in k$, $v_1,v_2,\cdots,v_l\in V$. 若这 k 张平面中存在 4 张平面其法向量不共面，则 $\mathrm{rank}(\widetilde{H}(v))=4$.

由 3.2 节的讨论，我们有

$$H(\pi_i)=[\boldsymbol{h}_1^i \quad \boldsymbol{h}_2^i \quad \cdots \quad \boldsymbol{h}_l^i]_{9\times l}=A_i\begin{bmatrix}K & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\quad i=1,2,\cdots,k \tag{10}$$

于是

$$\widetilde{H}(\pi)=\begin{bmatrix}H(\pi_1)\\H(\pi_2)\\\vdots\\H(\pi_k)\end{bmatrix}_{9k\times l}=\begin{bmatrix}A_i\\A_2\\\vdots\\A_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}_1 & \boldsymbol{t}_2 & \cdots & \boldsymbol{t}^l\\1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix} \tag{11}$$

其中 $A_i=\begin{bmatrix}a_1^i & 0 & 0 & 1\\a_2^i & 0 & 0 & 1\\a_3^i & 0 & 0 & 1\\0 & a_1^i & 0 & 0\\0 & a_2^i & 0 & 1\\0 & a_3^i & 0 & 0\\0 & 0 & a_1^i & 0\\0 & 0 & a_2^i & 0\\0 & 0 & a_3^i & 1\end{bmatrix}$，所以 $\mathrm{rank}(\widetilde{H}(\pi))\leqslant 4$. 于是由结论 2，我们有如下命题.

命题 4. 令 P 是空间平面的集合，v_0 是参考视点，V 是相对于 v_0 摄像机作平移运动的所有视点的集合，设 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_k\in P$, $v_1,v_2,\cdots,v_l\in V$. 若这些视点中存在 4 个视点其平移向量不共面，则 $\mathrm{rank}(\widetilde{H}(\pi))=4$.

注 1. 对于非标准单应矩阵，命题 3 和 4 不再成立.

注 2. 将平面 Π_i 关于视点对 (v_0,v_j), $j=1,2,\cdots,l$ 的标准单应矩阵 $H_{i,j}$ 排成表 1 的形式.

表 1

	v_1	v_2	v_3	v_4	$\cdots$	v_l
Π_1	H_{11}	H_{12}	H_{13}	H_{14}	$\cdots$	H_{1l}
Π_2	H_{21}	H_{22}	H_{23}	H_{24}	$\cdots$	H_{2l}
Π_3	H_{31}	H_{32}	H_{33}	H_{34}	$\cdots$	H_{3l}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
Π_k	H_{k1}	H_{k2}	H_{k3}	H_{k4}	$\cdots$	H_{kl}

根据命题 1 和 2，每一行与每一列均存在 4 个线性无关的单应矩阵. 不妨假定第一行的

初始 4 个单应矩阵 $H_{11},H_{12},H_{13},H_{14}$线性无关,第一列的初始 4 个单应矩阵 $H_{11},H_{21},H_{31},H_{41}$线性无关.

根据结论 1,2 和命题 3,4 可推知:

1) 对任意的 j, $H_{1j},H_{2j},H_{3j},H_{4j}$线性无关;

2) 对任意的(i,j_1,j_2),若常数 $\lambda_{ij_1}^1,\lambda_{ij_1}^2,\lambda_{ij_1}^3,\lambda_{ij_1}^4$与 $\lambda_{ij_2}^1,\lambda_{ij_2}^2,\lambda_{ij_2}^3,\lambda_{ij_2}^4$, 使得

$$H_{ij_1}=\lambda_{ij_1}^1 H_{1j_1}+\lambda_{ij_1}^2 H_{2j_1}+\lambda_{ij_1}^3 H_{3j_1}+\lambda_{ij_1}^4 H_{4j_1},$$

$$H_{ij_2}=\lambda_{ij_2}^1 H_{1j_2}+\lambda_{ij_2}^2 H_{2j_2}+\lambda_{ij_2}^3 H_{3j_2}+\lambda_{ij_2}^4 H_{4j_2},$$

则$(\lambda_{ij_1}^1,\lambda_{ij_1}^2,\lambda_{ij_1}^3,\lambda_{ij_1}^4)=(\lambda_{ij_2}^1,\lambda_{ij_2}^2,\lambda_{ij_2}^3,\lambda_{ij_2}^4)$;

3) 对任意的 i,$H_{i1},H_{i2},H_{i3},H_{i4}$线性无关;

4) 对任意的 i_1,i_2,j,若常数 $\lambda_{i_1j}^1,\lambda_{i_1j}^2,\lambda_{i_1j}^3,\lambda_{i_1j}^4$与 $\lambda_{i_2j}^1,\lambda_{i_2j}^2,\lambda_{i_2j}^3,\lambda_{i_2j}^4$,使得

$$H_{i_1j}=\lambda_{i_1j}^1 H_{i_11}+\lambda_{i_1j}^2 H_{i_12}+\lambda_{i_1j}^3 H_{i_13}+\lambda_{i_1j}^4 H_{i_14},$$

$$H_{i_2j}=\lambda_{i_2j}^1 H_{i_21}+\lambda_{i_2j}^2 H_{i_22}+\lambda_{i_2j}^3 H_{i_23}+\lambda_{i_2j}^4 H_{i_24},$$

则$(\lambda_{i_1j}^1,\lambda_{i_1j}^2,\lambda_{i_1j}^3,\lambda_{i_1j}^4)=(\lambda_{i_2j}^1,\lambda_{i_2j}^2,\lambda_{i_2j}^3,\lambda_{i_2j}^4)$.

3.4 相对单应矩阵

令 v_0 为参考视点,$v_1,v_2,\cdots,v_l$ 是相对于 v_0 摄像机的运动为$(R^j,\boldsymbol{t}^j)$的其它视点,参考平面 π_r 在参考视点 v_0 下的方程为 $\boldsymbol{n}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$. $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_k$ 是其它平面,它们关于参考视点 v_0 的方程为 $\boldsymbol{n}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$, $p=1,2,\cdots,k$. 令 H_r^j,H_p^j 分别为平面 π_r,π_p 关于视点对(v_0,v_j)的标准单应矩阵. 称矩阵

$$H_{pr}^j=(H_r^j)^{-1}H_p^j \tag{12}$$

为(π_r,π_p)的关于视点对(v_0,v_j)的相对单应矩阵[6].

利用 Sherman-Morisson 公式[7],可推知

$$H_{pr}^j=(I+e^j a_{pr}^{\mathrm{T}}) \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{e}^j=K\tilde{\boldsymbol{t}}^j$, $\boldsymbol{a}_{pr}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{n}_p-\boldsymbol{n}_r)^{\mathrm{T}}K^{-1}$,$\tilde{\boldsymbol{t}}^j=\dfrac{R^{j\mathrm{T}}\boldsymbol{t}^j}{1+\boldsymbol{n}_r^{\mathrm{T}}R^{j\mathrm{T}}\boldsymbol{t}^j}$. 于是 H_{pr}^j等价于摄像机相对于参考视点作平移运动$(I,\tilde{\boldsymbol{t}}^j)$关于平面 π_{pr}:$(\boldsymbol{n}_p-\boldsymbol{n}_r)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$ 的标准单应矩阵,其对应的列向量记为 $\boldsymbol{h}_j^{pr}$.

推论 1. 令 $H^j=\lfloor \boldsymbol{h}_j^{1r}\quad \boldsymbol{h}_j^{2r}\quad \cdots\quad \boldsymbol{h}_j^{kr}\rfloor$ $(j=1,2,\cdots,l)$, 则 $\mathrm{rank}(H^j)\leqslant 4$ 且

$$\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix}H^1\\H^2\\\vdots\\H^l\end{bmatrix}\right)\leqslant 4.$$

推论 2. 令 $H_{pr}=\lfloor \boldsymbol{h}_1^{pr}\quad \boldsymbol{h}_2^{pr}\quad \cdots\quad \boldsymbol{h}_l^{pr}\rfloor$ $(p=1,2,\cdots,k)$,则 $\mathrm{rank}(H_{pr})\leqslant 4$ 且

$$\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix}H_{1r}\\H_{2r}\\\vdots\\H_{kr}\end{bmatrix}\right)\leqslant 4.$$

4　一般视点间单应矩阵的约束

4.1　两视点多平面

令 v_0,v_1 为摄像机的两个不同视点,v_0 是参考视点,v_1 对应的摄像机运动为$(R,\boldsymbol{t})$;$\hat{H}(v_1)$ 是关于视点对 v_0,v_1 的所有平面的单应矩阵的集合. 对 $\hat{H}(v_1)$中任意多个元素 $H^p(p=1,2,\cdots,k)$有

$$H^p = \alpha_p(KRK^{-1} + K\boldsymbol{t}\boldsymbol{n}^{p\mathrm{T}}K^{-1}) \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{n}^p$ 是与 H^p 对应的空间平面的规范法向量,α_p 为非零常数.

记 $\boldsymbol{h}^p = (H^p_{11},H^p_{12},H^p_{13},H^p_{21},H^p_{22},H^p_{23},H^p_{31},H^p_{32},H^p_{33})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{e} = (e_1,e_2,e_3)^{\mathrm{T}} = K\boldsymbol{t}$,

$\boldsymbol{a}^p = (a^p_1,a^p_2,a^p_3) = \boldsymbol{n}^{p\mathrm{T}}K^{-1}$, $H_\infty = KRK^{-1}$,

$\boldsymbol{h}_\infty = (H_{\infty11},H_{\infty12},H_{\infty13},H_{\infty21},H_{\infty22},H_{\infty23},H_{\infty31},H_{\infty32},H_{\infty33})^{\mathrm{T}}$,

则有

$$\boldsymbol{h}^p = \alpha_p(\boldsymbol{h}_\infty + E\boldsymbol{a}^{p\mathrm{T}}),\ p = 1,2,\cdots,k \tag{15}$$

其中 $E=\begin{bmatrix} e_1 I \\ e_2 I \\ e_3 I\end{bmatrix}$($I$ 是 3 阶单位距阵),于是

$$H(v_1) = [\boldsymbol{h}^1\quad \boldsymbol{h}^2\quad \cdots\quad \boldsymbol{h}^P]_{9\times k} =$$

$$([\boldsymbol{h}_\infty\quad \boldsymbol{h}_\infty\quad \cdots\quad \boldsymbol{h}_\infty]_{9\times k} + E[\boldsymbol{a}^{1\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{a}^{2\mathrm{T}}\quad \cdots\quad \boldsymbol{a}^{k\mathrm{T}}]_{3\times k})\begin{bmatrix}\alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_k\end{bmatrix} \tag{16}$$

由于 $\mathrm{rank}([\boldsymbol{h}_\infty\quad \boldsymbol{h}_\infty\quad \cdots\quad \boldsymbol{h}_\infty]) = 1$, $\mathrm{rank}(E[\boldsymbol{a}^{1\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{a}^{2\mathrm{T}}\quad \cdots\quad \boldsymbol{a}^{k\mathrm{T}}]_{3\times k}\leqslant 3$,所以 $\mathrm{rank}(H(v_1)\leqslant 4)$. 因此 $\mathrm{rank}(\hat{H}(v_1))\leqslant 4$,而 $H(v_1)\subset\hat{H}(v_1)$,于是结合命题 1 我们有下述命题.

命题 5. 令 v_0,v_1 为摄像机的两个不同视点,v_0 是参考视点,v_1 对应的摄像机的运动为$(R,\boldsymbol{t})$,则 $\mathrm{rank}(\hat{H}(v_1))=4$.

4.2　多视点一平面

令 π 为一个空间平面,v_0 是参考视点,V 是相对于 v_0 摄像机作刚体运动的所有视点的集合. 令 π 关于视点对$(v_0,v_j)\in V$ 的单应矩阵为 H^j,$H(\pi)=\{H^j|v_j\in V\}$是平面 π 关于所有视点 V 的单应矩阵的集合. 记 $\boldsymbol{n}$ 为平面 π 关于参考视点 v_0 的规范法向量,$v_j\in V$ 的刚体运动为$(R^j,\boldsymbol{t}^j)$,于是 $H^j=\alpha_j(KR^jK^{-1}+K\boldsymbol{t}^j\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}K^{-1})$, $j=1,2,\cdots,l$.

记 $\boldsymbol{h}^j=(H^j_{11},H^j_{12},H^j_{13},H^j_{21},H^j_{22},H^j_{23},H^j_{31},H^j_{32},H^j_{33})^{\mathrm{T}}$, $H(\pi)=[\boldsymbol{h}_1\quad \boldsymbol{h}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{h}_l]_{9\times l}$. 我们的问题是 $\mathrm{rank}(H(\pi))\leqslant 4$ 仍然成立吗? 回答是否定的. 研究发现,一般地仅有 $\mathrm{rank}(H(\pi))\leqslant 9$,并且等式可以成立.

例. 摄像机内参数阵 $K=\mathrm{diag}(1\,000,1\,000,1)$,空间平面 π 关于参考视点下的方程 $50x+50y+50z=1$,即平面的规范法向量为 $\boldsymbol{n}=(50,50,50)^{\mathrm{T}}$,其它 9 个视点关于参考视点的运动分别为

$v_1:\left(R_z\left(\frac{\pi}{3}\right),(10,10,10)^{\mathrm{T}}\right)$, $v_2:\left(R_y\left(\frac{\pi}{4}\right),(10,0,0)^{\mathrm{T}}\right)$, $v_3:\left(R_x\left(\frac{\pi}{6}\right),(0,10,0)^{\mathrm{T}}\right)$,

$v_4:\left(R_z\left(-\frac{\pi}{3}\right),(0,0,10)^{\mathrm{T}}\right)$, $v_5:\left(R_y\left(\frac{\pi}{2}\right),(10,10,0)^{\mathrm{T}}\right)$, $v_6:\left(R_x\left(-\frac{\pi}{6}\right),(10,0,10)^{\mathrm{T}}\right)$,

$v_7:\left(R_z\left(-\frac{\pi}{6}\right),(0,10,10)^{\mathrm{T}}\right)$, $v_8:\left(R_y\left(\frac{\pi}{6}\right),(10,-10,10)^{\mathrm{T}}\right)$,

$v_9:\left(R_x\left(-\frac{\pi}{4}\right),(-10,10,10)^{\mathrm{T}}\right)$.

上式中 $R_x(\theta),R_y(\theta),R_z(\theta)$表示绕摄像机坐标系的 x,y,z 轴旋转 θ 弧度. 通过计算,我们有

$$H(\pi)=\begin{bmatrix}
\frac{1001}{2} & 500+\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{2} & 500 & 501 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1001}{2} & -499 \\
500+\frac{\sqrt{3}}{2} & 500 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 500 & 500 & \frac{1}{2} & 500 & -500 \\
500000 & 500(1000+\sqrt{2}) & 0 & 0 & 501000 & 500000 & 0 & -500(-1000+\sqrt{3}) & -500000 \\
500-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 500 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 500 & 0 & \frac{999}{2} & -500 & 500 \\
\frac{1001}{2} & 1 & 500+\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 501 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 500+\frac{\sqrt{3}}{2} & -499 & 500+\frac{1}{\sqrt{2}} \\
500000 & 0 & 500500 & 0 & 500000 & -500 & 500000 & -500000 & 500(1000-\sqrt{2}) \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{1000\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{1000} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2000} & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2000} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1001}{2000} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1000+\sqrt{2}}{2000} \\
501 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 501 & 0 & 500+\frac{\sqrt{3}}{2} & 501 & \frac{1001}{2} & 500+\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{bmatrix},$$

由于 $\det(H(\pi))=31\,250\,000(71-127\sqrt{2}-17\sqrt{3}+59\sqrt{6})\neq 0$,因此 $\mathrm{rank}(H(\pi))=9$. 注意到 $H(\pi)$的秩与摄像机内参数的值无关,因此有下述命题.

命题 6. 令 π 为一个空间平面,v_0 是参考视点,V 是相对于 v_0 摄像机作刚体运动的所有视点的集合,则$\mathrm{rank}(H(\pi))=9$.

4.3 多视点多平面

令 P 是空间平面的集合,v_0 是参考视点,V 是相对于 v_0 摄像机作平移运动的所有视点的集合. 设 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_k\in P$,$v_1,v_2,\cdots,v_l\in V$, π_i 关于 $v_0,v_j\in V$ 的单应矩阵为 H_j^i.

记 $H(v_j)=[\boldsymbol{h}_j^1\quad \boldsymbol{h}_j^2\quad \cdots\quad \boldsymbol{h}_j^k]$, $H(\pi_i)=[\boldsymbol{h}_1^i\quad \boldsymbol{h}_2^i\quad \cdots\quad \boldsymbol{h}_l^i]$, 其中 $\boldsymbol{h}_j^i$ 是单应矩阵 H_j^i 所对应的 9 维列向量;令 $\widetilde{H}(v)=\begin{bmatrix}H(v_1)\\H(v_2)\\\vdots\\H(v_l)\end{bmatrix}$, $\widetilde{H}(\pi)=\begin{bmatrix}H(\pi_1)\\H(\pi_2)\\\vdots\\H(\pi_k)\end{bmatrix}$,我们可以证明下述命题成立.

命题 7. 1)$\mathrm{rank}(\widetilde{H}(v))\leqslant 9$,并且等式可以成立;2)$\mathrm{rank}(\widetilde{H}(\pi))\leqslant 9$,并且等式可以成立.

5 结束语

本文系统地研究了多视点多平面情况下单应矩阵之间的约束关系.这些研究不仅具有重要的理论研究意义,而且具有重要的具体应用价值.例如,如何利用这些约束关系来鲁棒地获取空间小平面区域对应的单应矩阵,如何利用这些约束关系来检测运动物体.当然,我们期望今后这些理论结果能够找到更多更广的应用场所.

参 考 文 献

1 Luong Q T, Faugeras O D. The fundamental matrix: theory, algorithms, and stability analysis. *Inter. Journal of Computer Vision*, 1996, **17**:43~75

2 Amnon Shashua. Algebraic functions for recognition. *IEEE-T PAMI*, 1995, **17**(8):779~789

3 Hartley R I. Computation of quadrifocal tensor. In: Proc. ECCV'98, 1998, I:20~35

4 Heyden A. A common framework for multiple view tensors. In: Proc. ECCV'98,1998, I:3~19

5 Amnon Shashua, Shai Avidan. The rank-4 constraint in multiple (>=3) view geometry. In: Proc. ECCV'96, 1996

6 Lihi Zelnik-Manor, Michal Irani. Multi-view subspace constraints on homographies. In: Proc. ICCV'99, 1999. 710~715

7 Vetterling W T, Press W H, Teukolsky S A, Flannery B P. Numerical Recipes in C. Cambridge, MA: Cambridge University Press, 1992

吴福朝 简介见本刊第27卷第6期.

胡占义 简介见本刊第27卷第6期.