第 28 卷 第 5 期 2002 年 9 月
自 动 化 学 报 ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 28, No. 5 Sept., 2002

研究简报

具有闭环区域极点和方差约束的鲁棒输出反馈控制[1)]

俞 立 陈国定
(浙江工业大学信息工程学院 杭州 310032)
(E-mail: lyu@mail.hz.zj.cn)

关键词 方差约束，区域极点配置，线性矩阵不等式，输出反馈
中图分类号 TP13

ROBUST OUTPUT FEEDBACK CONTROL WITH CLOSED-LOOP REGIONAL POLE AND VARIANCE CONSTRAINT

YU Li CHEN Guo-Ding
(*College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou* 310032)
(E-mail: lyu@mail.hz.zj.cn)

Key words Variance constraints, regional pole placement, LMI, output feedback

1 引言

自方差控制提出以来，已得到了广泛的研究，取得了一系列的研究成果[1~2]. 文献[2]研究了一类不确定连续系统具有闭环区域极点和方差约束的鲁棒控制问题，提出了鲁棒状态反馈控制器的设计方法. 本文进一步研究该问题的输出反馈控制器设计问题.

2 问题的描述和准备

考虑由以下状态空间模型描述的一类不确定系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A+\Delta A)\boldsymbol{x}(t) + (B+\Delta B)\boldsymbol{u}(t) + D\boldsymbol{w}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = C_1\boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) = C_2\boldsymbol{x}(t)\end{cases} \tag{1}$$

上式中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 是系统的状态向量；$\boldsymbol{u}(t)\in R^m$ 是控制输入；$\boldsymbol{y}(t)\in R^p$ 是测量输出，$\boldsymbol{z}(t)\in R^q$

1) 国家自然科学基金(69974036)、浙江省自然科学基金重点项目(zd9905)和教育部高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划资助
收稿日期 2000-08-04 收修改稿日期 2001-01-15

是被调输出；$\boldsymbol{w}(t)\in R^{l}$ 是一个具有单位密度的零均值白噪声过程，并假定和系统的初始状态不相关；A,B,C_1,C_2 和 D 是已知的常数矩阵；ΔA 和 ΔB 是具有以下形式的不确定矩阵

$$[\Delta A \quad \Delta B] = MF[N_1 \quad N_2] \tag{2}$$

这里 $F\in R^{i\times j}$ 是满足 $FF'\leqslant I$ 的未知实矩阵；M,N_1 和 N_2 是已知的常数矩阵. 考虑以下的输出反馈控制器

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_c(t) = A_c\boldsymbol{x}_c(t) + B_c\boldsymbol{y}(t)\\ \boldsymbol{u}_c(t) = C_c\boldsymbol{x}_c(t) + D_c\boldsymbol{y}(t)\end{cases} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{x}_c(t)\in R^{n}$ 是控制器的状态. 将控制器(3)应用于系统(1)，得到闭环系统

$$\begin{cases}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t) = (\bar{A} + \bar{M}F\bar{N})\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \bar{D}\boldsymbol{w}(t)\\ \boldsymbol{z}(t) = \bar{C}\bar{\boldsymbol{x}}(t)\end{cases} \tag{4}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}_c(t)\end{bmatrix},\quad \bar{A} = \begin{bmatrix}A + BD_cC_1 & BC_c\\ B_cC_1 & A_c\end{bmatrix},\quad \bar{D} = \begin{bmatrix}D\\ 0\end{bmatrix},\quad \bar{M} = \begin{bmatrix}M\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\bar{N} = [N_1 + N_2D_cC_1 \quad N_2C_c],\quad \bar{C} = [C_2 \quad 0].$$

记 $D(q,r)$ 是复平面上中心在 $-q+j0(q>0)$、半径为 $r(r<q)$ 的圆盘. 则本文研究的问题是：对给定的系统(1)，圆盘 $D(q,r)$ 和对称矩阵 U，确定一个输出反馈控制器(3)，使得对所有允许的不确定性，i)闭环极点均在圆盘 $D(q,r)$ 中，ii)闭环稳态输出协方差满足 $\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{E}[\boldsymbol{z}(t)\boldsymbol{z}'(t)]<U$. 这样的控制器称为是系统(1)的鲁棒多目标输出反馈控制器.

引理 1[2]. 对系统(4)和圆盘 $D(q,r)$，如果存在常数 $\varepsilon>0$ 和对称正定矩阵 P，使得

$$\begin{bmatrix}-rP & P\bar{A}'+qP & P\bar{N}' & 0 & 0\\ * & -rP & 0 & \bar{D} & \bar{M}\\ * & * & -\varepsilon I & 0 & 0\\ * & * & * & -rq^{-1}I & 0\\ * & * & * & * & -\varepsilon^{-1}I\end{bmatrix}<0 \tag{5}$$

其中 $*$ 表示由矩阵的对称性得到的子块. 则对所有允许的不确定性，系统的所有极点均位于圆盘 $D(q,r)$ 中. 进而，系统(4)的稳态状态方差矩阵 $X=\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{E}[\bar{\boldsymbol{x}}(t)\bar{\boldsymbol{x}}'(t)]$ 存在，且满足 $X<P$.

3　主要结论

基于引理 1，利用矩阵的 Schur 补性质，可以得到系统(1)存在鲁棒多目标输出反馈控制器的条件.

定理 1. 考虑闭环系统(4)，对给定的圆盘 $D(q,r)$ 和对称矩阵 U，如果存在常数 $\varepsilon>0$ 和对称正定矩阵 P，使得矩阵不等式(5)和

$$\begin{bmatrix}-U & \bar{C}P\\ P\bar{C}' & -P\end{bmatrix}<0 \tag{6}$$

成立，则控制器(3)是系统(1)的一个鲁棒多目标输出反馈控制器.

以下，采用文献[3]引进的变量替换方法，将(5)式转换成关于变量 P,A_c,B_c,C_c 和 D_c

的一个线性矩阵不等式. 为此，首先将矩阵 P 和它的逆作以下分块

$$P=\begin{bmatrix} Y & S \\ S' & W \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}=\begin{bmatrix} X & T \\ T' & Z \end{bmatrix},$$

其中 $X,Y\in R^{n\times n}$ 是对称矩阵. 由等式 $P^{-1}P=I$ 可得 $TS'=I-XY$. 定义一组新变量

$$\begin{cases} \hat{A}=X(A+BD_cC_1)Y+XBC_cS'+TB_cC_1Y+TA_cS' \\ \hat{B}=XBD_c+TB_c \\ \hat{C}=D_cC_1Y+C_cS' \\ \hat{D}=D_c \end{cases} \tag{7}$$

则对给定的正定矩阵 X,Y 和可逆矩阵 S,T，控制器参数矩阵 A_c,B_c,C_c 和 D_c 可以由 $\hat{A},\hat{B}$，$\hat{C}$ 和 $\hat{D}$ 唯一确定. 进一步通过矩阵运算，从定理 1 可以得到如下定理.

定理 2. 考虑系统(1)，对给定的圆盘 $D(q,r)$ 和正定矩阵 U，如果存在一个标量 $\varepsilon>0$，使得具有未知变量 $X,Y,\hat{A},\hat{B},\hat{C}$ 和 $\hat{D}$ 的矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -rX & -rI & A'X+C_1'\hat{B}'+qX & A'+C_1'\hat{D}'B'+qI & N_1'+C_1'\hat{D}'N_2' & 0 & 0 \\ * & -rY & \hat{A}'+qI & YA'+\hat{C}'B'+qY & YN_1'+\hat{C}'N_2' & 0 & 0 \\ * & * & -rX & -rI & 0 & XD & XM \\ * & * & * & -rY & 0 & D & M \\ * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -rq^{-1}I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon^{-1}I \end{bmatrix}<0 \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} -U & C_2 & C_2Y \\ * & -X & -I \\ * & * & -Y \end{bmatrix}<0 \tag{9}$$

是可行的，则系统(1)存在形如(3)式的鲁棒多目标输出反馈控制器.

注 1. 对于给定的 ε，(8)和(9)式是一组线性矩阵不等式，因此可以利用现有的求解线性矩阵不等式的软件包来求解该线性矩阵不等式组.

注 2. 如果线性矩阵不等式组(8)和(9)是可行的，则从其任意一个可行解按以下步骤可求得系统(1)的一个鲁棒多目标输出反馈控制器：

1) 根据 $TS'=I-XY$，通过矩阵 $I-XY$ 的奇异值分解，确定两个可逆矩阵 S 和 T；

2) 通过(7)式确定控制器参数矩阵 A_c,B_c,C_c 和 D_c.

参 考 文 献

1 Skelton R E, Iwasaki T, Grigoriadis K M. A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design. London: Taylor & Francis, 1998

2 俞立. 具有区域极点和方差约束的不确定连续系统鲁棒控制. 自动化学报，2000，**26**(4):509～514

3 Scherer C, Gahinet P, Chilali M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1997, **42**(7):896～911

俞 立，陈国定 见本刊 26 卷第 1 期.