短文

非线性时滞系统输出反馈镇定[1)]

伏玉笋 田作华 施颂椒
(上海交通大学自动化研究所 上海 200030)
(E-mail: fuyusun@huawei.com)

摘 要 该文首次研究了一类非线性时滞系统的镇定问题. 用 Backstepping 技术，给出了输出反馈控制器的构造性设计方法.

关键词 非线性时滞系统，输出反馈，递推设计，镇定
中图分类号 TP273

OUTPUT FEEDBACK STABILIZATION FOR TIME-DELAY NONLINEAR SYSTEMS

FU Yu-Shun TIAN Zou-Hua SHI Song-Jiao
(*Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030)
(E-mail: fuyusun@huawei.com)

Abstract The authors present the result on output feedback stabilization for a class of time-delay nonlinear systems. A constructive output feedback design is described to achieve asymptotic stability.

Key words Time-delay nonlinear system, output feedback, backstepping procedure, stabilization

1 引言

众所周知，时间延迟问题广泛存在于各种工程系统中，例如化工过程、液压系统等. 它的存在，常常是造成控制系统设计品质变坏的原因之一. 因此，时间延迟系统的控制问题一直备受关注. 无论是对不带有还是带有不确定项的线性时滞系统，人们已经做了较为充分的研究，但因非线性时滞系统这一对象本身的复杂性，人们研究得比较少，成果也不多. 主要的困难在于时滞系统的状态应该在无穷维空间中研究[1].

近年来，在非线性系统鲁棒与自适应控制的文献中[2]，人们努力探索输出反馈的设计方

1) 国家自然科学基金(60004005)资助
收稿日期 2000-06-13 收修改稿日期 2000-11-18

法. 本文用 Backstepping 技术,首次对一类非线性时滞系统,给出输出反馈控制器的设计算法. 尽管用输出反馈难以解决一般非线性时滞系统的镇定问题,但在本文所给出的条件下,确保了解决这一问题的可能性.

2　系统描述

考虑如下非线性时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t) + f_i(y(t)) + h_i(y(t-d)),\ i = 1,\cdots,n-1 \\ \dot{x}_n(t) = u + f_n(y(t)) + h_n(y(t-d)) \\ y = x_1 \end{cases} \tag{1}$$

其中 x_i, u, y 分别表示系统状态、控制输入和输出. 函数 f_i 和 h_i 是不确定项,且 $f_i(0)=0$, $h_i(0)=0$.

因为系统状态 $x_2,\cdots,x_n$ 是不可测量的,所以首先设计观测器对状态进行估计. 本文构造如下观测器

$$\dot{\hat{x}}_i = \hat{x}_{i+1} + k_i(y - \hat{x}_1),\quad i = 1,\cdots,n \tag{2}$$

其中 $\hat{x}_{n+1}=u$. 观测误差 $\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}$ 满足

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = A\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{f}(y(t)) + \boldsymbol{h}(y(t-d)) \tag{3}$$

其中 $A=\begin{bmatrix} -k_1 & & \\ \vdots & & I \\ -k_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{f}(y(t))=\begin{bmatrix} f_1(y(t)) \\ \vdots \\ f_n(y(t)) \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{h}(y(t-d))=\begin{bmatrix} h_1(y(t-d)) \\ \vdots \\ h_n(y(t-d)) \end{bmatrix}$, A 要被设计成稳定阵. 这样整个系统表示如下:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = A\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{f}(y(t)) + \boldsymbol{h}(y(t-d)) \\ \dot{y}(t) = \hat{x}_2(t) + \tilde{x}_2(t) + f_1(y(t)) + h_1(y(t-d)) \\ \dot{\hat{x}}_i = \hat{x}_{i+1} + k_i(y - \hat{x}_1),\ i = 2,\cdots,n-1 \\ \dot{\hat{x}}_n = u + k_n(y - \hat{x}_1) \end{cases} \tag{4}$$

本文通过 Backstepping 方法对系统$(y,\hat{x}_2,\cdots,\hat{x}_n)$进行输出反馈控制器设计. 在 Backstepping 设计中,误差变量 z_i 给定如下:

$$z_1 = y,\ z_i = \hat{x}_i - \alpha_{i-1}(\bar{\hat{x}}_{i-1},\ y),\ i = 2,\cdots,n \tag{5}$$

其中 $\bar{\hat{x}}_i=[\hat{x}_2\ \ \cdots\ \ \hat{x}_i]^{\mathrm{T}}$. 求导可以得到

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \hat{x}_2 + \tilde{x}_2 + f_1(y(t)) + h_1(y(t-d)) \\ \dot{z}_i = \hat{x}_{i+1} + k_i\tilde{x}_1 - \sum_{l=2}^{i-1} \dfrac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{x}_l}(\hat{x}_{l+1} + k_l\tilde{x}_1) - \\ \qquad \dfrac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y}(\hat{x}_2 + \tilde{x}_2 + f_1(y(t)) + h_1(y(t-d))) \end{cases} \tag{6}$$

本文不用逐步引进稳定化函数 α_i,可以同时得到它们. 在开始设计之前,先做一些准备工作. 因为 $\boldsymbol{f}(0)=0$ 和 $\boldsymbol{h}(0)=0$,所以 $\boldsymbol{f}(y(t))$ 和 $\boldsymbol{h}(y(t-d))$ 可以分别表示成

$$\boldsymbol{f}(y(t)) = y(t)\bar{\boldsymbol{f}}(y(t)),\quad \boldsymbol{h}(y(t-d)) = y(t-d)\bar{\boldsymbol{h}}(y(t-d)) \tag{7}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{f}}(y(t))=\begin{bmatrix}\bar{f}_1(y(t))\\ \vdots \\ \bar{f}_n(y(t))\end{bmatrix}$, $\bar{\boldsymbol{h}}(y(t-d))=\begin{bmatrix}\bar{h}_1(y(t-d))\\ \vdots \\ \bar{h}_n(y(t-d))\end{bmatrix}$. 不确定函数 $\bar{f}_i$ 和 $\bar{h}_i$ 满足如下假设.

假设 1. $|\bar{f}(y(t))|\leqslant\rho_{fi}(y(t))$,其中 $\rho_{fi}(y(t))$是已知光滑函数.

假设 2. $|\bar{h}_i(y(t-d))|\leqslant\rho_{hi}(y(t-d))$,其中 $\rho_{hi}(y(t-d))$是已知光滑函数.

3 主要结果

本节进行 Backstepping 设计. 选取如下李雅普诺夫函数

$$V=\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}P\tilde{\boldsymbol{x}}+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}\sum\nolimits_{i=2}^{n}z_i^2+\int_{t-d}^{t}q(y(\tau))\mathrm{d}\tau \tag{8}$$

其中 P 是正定阵,满足 $A^{\mathrm{T}}P+PA=-I$, $q(y)$是需要待定的非负函数.

下面选择 α_i 使得 $\dot{V}$负定. 沿着系统(3)和(6)的轨迹,有

$$\begin{aligned}
\dot{V}=&-\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2+(\boldsymbol{f}(y)+\boldsymbol{h}(y(t-d)))^{\mathrm{T}}p\tilde{\boldsymbol{x}}+\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}P(\boldsymbol{f}(y)+\boldsymbol{h}(y(t-d)))+\\
&y(\hat{x}_2+\tilde{x}_2+f_1(y)+h_1(y(t-d)))+\sum\nolimits_{i=2}^{n}z_i(\hat{x}_{i+1}+k_i\tilde{x}_1-\\
&\sum\nolimits_{l=2}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{x}_1}(\hat{x}_{l+1}+k_1\tilde{x}_1)-\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}(\hat{x}_2+\tilde{x}_2+f_1(y)+h_1(y(t-d))))+\\
&q(y(t))-q(y(t-d))\leqslant\\
&\left(-1+\left(\frac{1}{\varepsilon_f^2}+\frac{1}{\varepsilon_h^2}\right)\|P\|^2+\frac{1}{2\varepsilon_1^2}+\frac{1}{2}\sum\nolimits_{i=2}^{n}\frac{1}{\eta_i^2}\right)\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2+\\
&y\left(\alpha_1+\frac{1}{2}\delta_1^2+\frac{1}{2}\varepsilon_1^2+\frac{1}{2}\xi_1^2+\rho_{f1}(y)+\left(\varepsilon_f^2+\sum\nolimits_{i=2}^{n}\frac{1}{2\lambda_i^2}\|\boldsymbol{\rho}_f(y(t))\|^2\right)+\right.\\
&\sum\nolimits_{i=2}^{n-1}z_i\left(\alpha_i+\frac{1}{2}\delta_i^2z_i+\frac{1}{2\delta_{i-1}^2}z_i+k_i\tilde{x}_1-\sum\nolimits_{l=2}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{x}_1}(\hat{x}_{l+1}+k_1\tilde{x}_1\right)-\\
&\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\hat{x}_2+\frac{1}{2}\eta_i^2\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2z_i+\frac{1}{2}\lambda_i^2\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2z_i+\frac{1}{2}\gamma_i^2\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2z_i\Bigg)+\\
&z_n\left(u+\frac{1}{2\delta_{n-1}^2}z_n+k_n\tilde{x}_1-\sum\nolimits_{l=2}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial\hat{x}_1}(\hat{x}_{l+1}+k_1\tilde{x}_1)-\right.\\
&\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial y}\hat{x}_2+\frac{1}{2}\eta_n^2\left(\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial y}\right)^2z_n+\frac{1}{2}\lambda_n^2\left(\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial y}\right)^2z_n+\frac{1}{2}\gamma_n^2\left(\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial y}\right)^2z_n\Bigg)+\\
&q(y(t))-q(y(t-d))+\left(\varepsilon_h^2+\frac{1}{2\xi_1^2}+\sum\nolimits_{i=2}^{n}\frac{1}{2\gamma_i^2}\right)y^2(t-d)\|\boldsymbol{\rho}_h(y(t-d))\|^2.
\end{aligned}$$

上面的不等式可由 Young 不等式[3]导出. 可以看出,如果我们选择 $q,u,\alpha_i,\varepsilon_f,\varepsilon_h,\varepsilon_1,\eta_i$ 使得下面的式子成立

$$-a=-1+\left(\frac{1}{\varepsilon_f^2}+\frac{1}{\varepsilon_h^2}\right)\|P\|^2+\frac{1}{2\varepsilon_1^2}+\frac{1}{2}\sum\nolimits_{i=2}^{n}\frac{1}{\eta_i^2}<0 \tag{9}$$

$$q(y(t))=\left(\varepsilon_h^2+\frac{1}{2\xi_1^2}+\sum\nolimits_{i=2}^{n}\frac{1}{2\gamma_i^2}\right)y^2(t)\|\boldsymbol{\rho}_h(y(t))\|^2 \tag{10}$$

$$\alpha_1 = -c_1 y - \left(\frac{1}{2}\delta_1^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_1^2 + \frac{1}{2}\xi_1^2\right) y - y\rho_{f1}(y) - \left(\varepsilon_f^2 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2\lambda_i^2}\right) y \| \rho_f(y(t)) \|^2 - \left(\varepsilon_h^2 + \frac{1}{2\xi_1^2} + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2\gamma_i^2}\right) y \| \rho_h(y(t)) \|^2 \tag{11}$$

$$\alpha_i = -c_i z_i - \left(\frac{1}{2}\delta_i^2 z_i + \frac{1}{2\delta_{i-1}^2} z_i + k_i \tilde{x}_i - \sum_{l=2}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{x}_l}(\hat{x}_{l+1} + k_l \tilde{x}_1) - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y}\hat{x}_2 + \frac{1}{2}\eta_i^2\left(\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2 z_i + \frac{1}{2}\lambda_i^2\left(\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2 z_i + \frac{1}{2}\gamma_i^2\left(\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2 z_i\right) \tag{12}$$

$$u = -c_n z_n - \left(\frac{1}{2\delta_{n-1}^2} z_n + k_n \tilde{x}_1 - \sum_{l=2}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{x}_l}(\hat{x}_{l+1} + k_l \tilde{x}_1) - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y}\hat{x}_2 + \frac{1}{2}\eta_n^2\left(\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y}\right)^2 z_n + \frac{1}{2}\lambda_n^2\left(\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y}\right)^2 z_n + \frac{1}{2}\gamma_n^2\left(\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y}\right)^2 z_n\right) \tag{13}$$

其中 $\rho_f(y(t)) = \begin{bmatrix} \rho_{f1}(y(t)) \\ \vdots \\ \rho_{fn}(y(t)) \end{bmatrix}$， $\rho_h(y(t-d)) = \begin{bmatrix} \rho_{h1}(y(t-d)) \\ \vdots \\ \rho_{hn}(y(t-d)) \end{bmatrix}$，$c_i > 0$. 那么，沿着闭环系统(3)，(6)和(13)，有

$$\dot{V} \leqslant -a \| \tilde{x} \|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i z_i^2 \tag{14}$$

因此有下面的结果.

定理 1. 存在基于观测器的输出反馈控制器，使得非线性时滞系统(1)渐近稳定.

4　结束语

本文首次研究了非线性时滞系统的输出反馈镇定问题，给出了控制器的构造性设计算法. 尽管系统的非线性项仅仅依赖于输出，但输出反馈控制器的设计要比状态反馈控制器的设计复杂得多.

参　考　文　献

1　李森林，温立志. 泛函微分方程. 长沙：湖南科学技术出版社，1987

2　Krstic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P V. Nonlinear and Adaptive Control Design. New York: Wiley, 1995

3　Hardy G, Littlewood J E, Polya G. Inequalities. 2nd ed. London: Cambridge University Press, 1989

4　Deng H, Krstic M. Output-feedback stochastic nonlinear stabilization. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1999, **44**(2): 328～333

伏玉笋　博士研究生. 目前从事鲁棒与非线性控制的研究.

田作华　教授，系主任. 目前从事新型监控技术的研究.

施颂椒　教授，博士生导师. 目前从事鲁棒控制、自适应控制及非线性控制的研究.