短文

模糊控制系统的全局稳定性

李绍宽 朱坤平
(东华大学应用数学系 上海 200051)
(E-mail: skli@dhu.edu.cn)

摘 要 利用合同变换的方法讨论了模糊控制系统的全局稳定性,给出了当初始状态为任意的正则模糊集时,模糊控制系统的状态都收敛于其平衡态的充要条件.

关键词 全局稳定性,平衡状态,合同变换
中图分类号 O159

GLOBAL STABILITY OF FUZZY CONTROL SYSTEMS

LI Shao-Kuan ZHU Kun-Ping
(*Department of Applied Mathematics, Dong Hua University, Shanghai* 200051)
(E-mail: skli@dhu.edu.cn)

Abstract The global stability of fuzzy control systems is discussed using the congruency transformation method. A necessary and sufficient condition of the system convergence to equilibrium state with any normal initial state is presented.

Key words Global stability, equilibrium state, congruency transformation

1 引言

稳定性是对控制系统最基本的性能要求,近年来对 T-S 模型的稳定性研究取得了一些较为深刻的结果,如文献[1～3]. 但是对常规模糊控制系统的稳定性研究进展却非常缓慢,文献[4]首先定义了有关模糊系统的稳定及平衡态等基本概念,并讨论了系统 $X_{k+1}=X_k\circ R$ 的稳定性;文献[5]提出了基于系统的物理意义,利用能量函数来研究模糊系统稳定性的方法;文献[6～8]给出了把闭环模糊系统表示为 $X_{k+1}=X_k\circ R(p)$ 的方法. 本文针对当系统的初始状态为任意的正则模糊集时,模糊系统的状态能否收敛于系统的平衡态定义了模糊系统的全局稳定性;对形如 $X_{k+1}=X_k\circ R$ 的模糊系统给出了全局稳定的充要条件;对于不能表示为 $X_{k+1}=X_k\circ R$ 的闭环模糊系统,也给出了系统全局稳定的一个充分条件.

收稿日期 2000-05-09 收修改稿日期 2001-01-22

2 稳定性分析

按照文献[6]的处理方法,离散型闭环模糊控制系统总可以表示为 $\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{x}(k)\circ R(p)$ 的形式,在一定条件下,闭环模糊系统还可以表示为 $\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{x}(k)\circ R$.

定义 1. 对模糊控制系统 $\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{x}(k)\circ R(p)$,若在任意的正则初始状态下,$\boldsymbol{x}(k)$都收敛于系统的平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$,则称模糊控制系统 $\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{x}(k)\circ R(p)$是全局稳定的.

对于模糊系统 $\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{x}(k)\circ R$,若 $\boldsymbol{x}(k)$的论域为有限集 $X=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,$\boldsymbol{x}_e=(\mu_{x_e}(a_1),\mu_{x_e}(a_2),\cdots,\mu_{x_e}(a_n))$为系统的平衡状态,把 $\boldsymbol{x}$ 简记为 $\boldsymbol{x}_e=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则易于验证如下定理.

定理 1. 对任意的正则初始状态,模糊系统 $\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{x}(k)\circ R$ 收敛于 $\boldsymbol{x}_e$ 的充要条件是 R^m 收敛于 R_e,其中

$$R_e=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ & & \cdots & \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}.$$

为了给出模糊系统 $\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{x}(k)\circ R$ 全局稳定的充要条件,我们首先讨论当 $\boldsymbol{x}_e$ 的各个分量互不相同时的情形,不妨设 $\boldsymbol{x}_e$ 的各个分量满足 $x_1>x_2>\cdots>x_n$,我们将证明模糊控制系统 $\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{x}(k)\circ R$ 的平衡态 $\boldsymbol{x}_e$ 是全局稳定的充要条件是 R 满足如下的条件:

$\mathring{1}$) $r_{ij}\leqslant x_j$, $i\leqslant j$;

$\mathring{2}$) $\bigvee\limits_{1\leqslant i<j} r_{ij}=x_j$, $j=2,3,\cdots,n$;

$\mathring{3}$) $\bigvee\limits_{1\leqslant j<i} r_{ij}\geqslant x_1$, $i=2,3,\cdots,n$;

$\mathring{4}$) $r_{11}=x_1$.

通过直接计算易于证明如下定理.

定理 2. 若 R 为满足条件 $\mathring{1}$)~$\mathring{4}$)的模糊关系矩阵,则对任意的正整数 m,R^m 也满足条件 $\mathring{1}$)~$\mathring{4}$).

定理 3. 设 $\boldsymbol{x}_e=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,其中 $x_1>x_2>\cdots>x_n$,则模糊控制系统 $\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{x}(k)\circ R$ 在任意的正则初始状态下收敛于 $\boldsymbol{x}_e$ 的充要条件是 R 满足条件 $\mathring{1}$)~$\mathring{4}$).

证明. "⇒"(必要性).

1)若 $\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{x}(k)\circ R$ 在任意的正则初始状态下收敛于 $\boldsymbol{x}_e$,必有 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{x}_e\circ R$,即

$x_1r_{11}\vee x_2r_{21}\vee\cdots\vee x_nr_{n1}=x_1$, 又因为 $x_1>x_2>\cdots>x_n$,故 $r_{11}\geqslant x_1$,同理有

$x_1r_{12}\vee x_2r_{22}\vee\cdots\vee x_nr_{n2}=x_2$, 故 $r_{12}\leqslant x_2$;

$x_1r_{13}\vee x_2r_{23}\vee\cdots\vee x_nr_{n3}=x_3$, 故 $\max\{r_{13},r_{23}\}\leqslant x_3$;

$\cdots$

$x_1r_{1n}\vee\cdots\vee x_2r_{2n}\vee\cdots\vee x_nr_{nn}=x_n$, 故 $\max\{r_{1n},r_{2n},\cdots,r_{n-1,1}\}\leqslant x_n$.

又根据定理 1 知序列 R^m 收敛于 R_e,故必有 $r_{ii}\leqslant x_i,\forall\ i\in\{1,2,\cdots,n\}$;否则,设有 $r_{i_0i_0}>x_{i_0}$,则

$$r_{i_0i_0}^{(2)}=\bigvee_{k=1}^{n}(r_{i_0k}\wedge r_{ki_0})>x_{i_0};$$

$$r_{i_0i_0}^{(3)}=\bigvee_{k=1}^{n}(r_{i_0k}^{(2)}\wedge r_{ki_0})>x_{i_0};$$

$$\cdots$$

$$r_{i_0i_0}^{(m)}=\bigvee_{k=1}^{n}(r_{i_0k}^{(m-1)}\wedge r_{ki_0})>x_{i_0}.$$

故 $r_{i_0i_0}^{(m)}$不可能收敛于 x_{i_0},这与 R^m 收敛于 R_e 矛盾. 综上可得 $r_{11}=x_1$,且有

$$r_{ij}\leqslant x_j,\quad i\leqslant j \tag{1}$$

2) 由定理 1 知序列 R^m 收敛于 R_e,即存在 M, 当 $m\leqslant M$ 时有

$$r_{21}^{(m+1)}=\bigvee_{k=1}^{n}(r_{2k}\wedge r_{k1}^{(m)})=x_1,$$

由式(1) $r_{2k}\leqslant x_k(2\leqslant k\leqslant n)$,得 $r_{21}\geqslant x_1$;

$r_{31}^{(m+1)}=\bigvee_{k=1}^{n}(r_{3k}\wedge r_{k1}^{(m)})=x_1$, 又 $r_{3k}\leqslant x_k(3\leqslant k\leqslant n)$, 故 $r_{31}\vee r_{32}\geqslant x_1$;

$\cdots$

$r_{n1}^{(m+1)}=\bigvee_{k=1}^{n}(r_{nk}\wedge r_{k1}^{(m)})=x_1$,由 $r_{nn}\leqslant x_n$,故 $r_{n1}\vee r_{n2}\vee\cdots\vee r_{n,n-1}\geqslant x_1$.

故有 $\bigvee_{1\leqslant j<i} r_{ij}\geqslant x_1,\ i=2,3,\cdots,n.$

3) 若 R 不满足条件 $\mathring{2}$),结合式(1)知必存在正整数 k,满足

$$\max\{r_{1k},r_{2k},\cdots,r_{k-1,k}\}<x_k \tag{2}$$

$r_{ik}^{(2)}=r_{i1}r_{1k}\vee r_{i2}r_{2k}\vee\cdots\vee r_{i,k-1}r_{k-1,k}\vee r_{ik}r_{kk}\vee\cdots\vee r_{in}r_{nk},\ i<k$,再结合式(1),(2)得

$$r_{ik}^{(2)}<x_k,\quad i<k \tag{3}$$

$r_{ik}^{(3)}=r_{i1}r_{1k}^{(2)}\vee r_{i2}r_{2k}^{(2)}\vee\cdots\vee r_{i,k-1}r_{k-1,k}^{(2)}\vee r_{ik}r_{kk}^{(2)}\vee\cdots\vee r_{in}r_{nk}^{(2)}(i<k)$, 根据式(1)～(3)知必有 $r_{ik}^{(3)}<x_k,i<k$. 由归纳法易得对任意的正整数 m 有 $r_{ik}^{(m)}<x_k,\ i<k$,这与 R^m 收敛于 R_e 矛盾,故 $\bigvee_{1\leqslant i<j} r_{ij}=x_j,\ j=2,3,\cdots,n$. 综上 R 满足条件 $\mathring{1}$)～$\mathring{4}$).

本定理充分性的证明由数学归纳法易于直接验证.　　证毕.

对于更一般化的情形,若 $\boldsymbol{x}_e$ 的各分量不是严格递减的,设 $\tilde{\boldsymbol{x}}_e=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n)$且 $\tilde{\boldsymbol{x}}_e$ 的各分量互不相同,显然通过一系列的对换可把 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 变为 $\boldsymbol{x}_e=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,其中 $x_1>x_2>\cdots>x_n$. 注意到对 $\tilde{\boldsymbol{x}}_e$ 的每一次对换相当于 $\tilde{\boldsymbol{x}}_e$"右乘"一个相应的初等矩阵,于是有 $\boldsymbol{x}_e=\tilde{\boldsymbol{x}}_e\circ P$,其中 P 为单位矩阵经一系列相应的列对换得到的初等矩阵,此时显然有 $P^{\mathrm{T}}\circ P=P\circ P^{\mathrm{T}}$ 为单位矩阵.

定义 2. 称模糊矩阵 A,B 是第一类合同的,若存在 P, 使得 $P^{\mathrm{T}}\circ A\circ P=B$,其中 P 为单位矩阵经若干次列对换得到的初等矩阵.

定理 4. 设 $\tilde{\boldsymbol{x}}_e=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n)$且 $\tilde{\boldsymbol{x}}_e$ 的各分量互不相同,则模糊系统 $\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{x}(k)\circ R$ 在任意的正则初始状态下收敛于 $\tilde{\boldsymbol{x}}_e$ 的充要条件是 $R=P\circ Q\circ P^{\mathrm{T}}$,其中 P 为单位矩阵经若干次列对换得到的初等矩阵,满足 $\tilde{\boldsymbol{x}}\circ P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\triangleq\boldsymbol{x}_e$, 并且 $x_1>x_2>\cdots>x_n$,Q 为满足条件 $\mathring{1}$)～$\mathring{4}$)的模糊矩阵.

证明. 若 $\tilde{\boldsymbol{x}}_e\circ P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\triangleq\boldsymbol{x}_e(x_1>x_2>\cdots>x_n)$,其中 P 为单位矩阵经若干次列

对换得到的初等矩阵，于是 $\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{x}(k)\circ R$ 在任意的正则初始状态 $\boldsymbol{x}$ 下收敛于 $\tilde{\boldsymbol{x}}_e$，即

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}\circ R^m \to \tilde{\boldsymbol{x}}_e \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{x}\circ P\circ P^{\mathrm{T}}\circ R^m\circ P \to \tilde{\boldsymbol{x}}_e\circ \boldsymbol{P} = \boldsymbol{x}_e \\ &\Leftrightarrow (\boldsymbol{x}\circ P)\circ(P^{\mathrm{T}}\circ R\circ P)^m \to \boldsymbol{x}_e \end{aligned}$$

记 $P^{\mathrm{T}}\circ R\circ P$ 为 Q，因 Q 为满足条件 $\mathring{1}$)～$\mathring{4}$)的矩阵，故 $R=P\circ Q\circ P^{\mathrm{T}}$.

由定理 4 直接可得如下定理.

定理 5. 模糊控制系统 $\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{x}(k)\circ R$ 在任意的正则初始状态下收敛于 $\tilde{\boldsymbol{x}}_e$ 且 $\tilde{\boldsymbol{x}}_e$ 的各分量互不相同的充要条件是 R 与满足条件 $\mathring{1}$)～$\mathring{4}$)的模糊矩阵是第一类合同的.

对于可以表示为 $\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{x}(k)\circ R$ 的开环或闭环模糊系统，可根据上述定理来判别系统的全局稳定性. 又按照文献[6]的方法，离散型的闭环模糊系统总可表示为 $\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{x}(k)\circ R(p)$，其中 $R(p)$ 为与正整数 p 有关的一个模糊矩阵，并且满足 $\boldsymbol{x}(k)\circ R_1\leqslant \boldsymbol{x}(k)\circ R(p)\leqslant \boldsymbol{x}(k)\circ R_2$，$R_1,R_2$ 为由模糊规则确定的两个模糊关系矩阵，于是，结合定理 4 显然又有如下定理.

定理 6. 若存在 P，使得 R_1,R_2 均与满足条件 $\mathring{1}$)～$\mathring{4}$)的模糊矩阵是第一类合同的，则闭环模糊系统 $\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{x}(k)\circ R(p)$ 一定是全局稳定的(且平衡状态为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\circ P^{\mathrm{T}}$).

3 结语

由于根据开环对象和期望的闭环特性可以进行模糊控制器的设计，而最基本的期望闭环特性就是稳定性，最好是全局稳定性. 由于本文给出了系统全局稳定时 R 的具体形式，因此本文的结论还可以直接应用于模糊控制器的设计.

参 考 文 献

1 Kim W C *et al.* Stability analysis and stabilization of fuzzy state space models. *Fuzzy Sets and Systems*, 1995, **71**: 131～142

2 Kim E *et al.* Numerical stability analysis of fuzzy control systems via quadratic programming and linear matrix inequalities. *IEEE Trans. Syst. Man. Cybern*, 1999, **29**: 333～346

3 Wang H O *et al.* An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. *IEEE Trans. Fuzzy syst*, 1996, **4**: 14～23

4 Tong R M. Analysis and control of fuzzy systems using finite discrete relations. *Int. J. Control*, 1978, **27**: 431～440

5 Kiszka J B *et al.* Energetistic stability of fuzzy dynamic systems. *IEEE Trans. syst. Man. Cybern*, 1985, **15**: 783～791

6 陈建勤等. 模糊系统的闭环模型及稳定性分析. 自动化学报, 1994, **20**(1): 1～9

7 Chen Jian-Qin *et al.* Analysis and synthesis of fuzzy closed-loop control systems. *IEEE Trans. Man. Cybern*, 1995, **25**: 881～888

8 Chen Jian-Qin *et al.* Study on stability of fuzzy closed-loop control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, **57**: 159～168

李绍宽 博士，东华大学应用数学系教授. 主要研究领域是算子理论.

朱坤平 东华大学应用数学系讲师，自动化系博士生. 主要研究领域为模糊系统的稳定性.