



# 控制系统鲁棒故障检测的 $l^1$ 优化方法<sup>1)</sup>

方华京

(华中理工大学控制科学与工程系 武汉 430074)

(E-mail: hjfang@public.wh.hb.cn)

**摘 要** 提出一种新的基于  $l^1$  优化技术的鲁棒故障检测方法, 并且用统一的形式归纳了已有的此类方法. 最后通过仿真算例对它们进行了比较.

**关键词** 故障检测, 鲁棒性,  $l^1$  最优化, 输出观测器

**中图分类号** TP273

## $l^1$ OPTIMIZATION APPROACH TO CONTROL SYSTEM ROBUST FAULT DETECTION

FANG Hua-Jing

(Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

(E-mail: hjfang@public.wh.hb.cn)

**Abstract** A new robust fault detection method is proposed based on  $l^1$  optimization. A uniform formula is presented to unify several existing methods of the kind. Finally these methods are compared with through simulation examples.

**Key words** Fault detection, robustness,  $l^1$  optimization, output observer

## 1 引言

采用有效的故障诊断技术是提高现代复杂控制系统可靠性和安全性的重要途径, 文献[1,2]对这个领域的研究现状作了系统综述.

控制系统中不可避免的存在各种不确定性, 故障检测技术也需要考虑鲁棒性问题, 最优化技术是提高鲁棒性的常用方法. 控制系统鲁棒分析与设计的  $l^1$  优化理论<sup>[3]</sup> 已相当完善, 近年来开始用于其它鲁棒设计问题, 文献[4,5]分别给出了两种  $l^1$  优化鲁棒故障检测方法. 在本文中, 除了提出另一种新的方法之外, 同时也用统一的形式归纳前两种已有方法, 并通过

1) 国家自然科学基金项目(69774014)资助

仿真算例对三种方法的有效性进行比较. 为避免涉及的符号过于复杂, 下面仅以 SISO 系统为例进行讨论.

## 2 残差函数的参数化

考虑系统

$$y(z) = [G_p(z) + \delta G_p]u(z) + G_d(z)d(z) + G_f(z)f(z),$$

其中  $y(z), u(z), d(z), f(z)$  分别是输出、输入、扰动和故障信号;  $G_p(z)$  是系统名义模型,  $\delta G_p$  代表模型摄动(加摄动时  $\delta G_p = W_1(z)\Delta_p$ , 乘摄动时  $\delta G_p = G_p(z)W_1(z)\Delta_p$ ,  $W_1(z)$  是权函数,  $\Delta_p$  稳定);  $G_f(z), G_d(z)$  分别是稳定的故障和扰动传递函数.

记全体稳定的离散系统为集合  $A$ , 由文献[6]的输出观测器可得残差函数参数化式

$$r(z) = P(z)M_l(z)[\delta Gu(z) + G_d(z)d(z) + G_f(z)f(z)],$$

其中  $M_l^{-1}(z)N_l(z) = G_p(z)$  是名义模型在  $A$  中的双互质分解,  $P(z) \in A$  是任意稳定的传递函数.

因  $\Delta_p$  稳定,  $u(t)$  有界时可将  $\bar{d}(z) = [d(z) \quad \Delta_p u(z)]^T$  整个作为扰动信号, 于是

$$r(z) = [P(z)M_l(z)\bar{G}_d(z)]\bar{d}(z) + [P(z)M_l(z)G_f(z)]f(z) \quad (1)$$

其中  $\bar{G}_d(z) = [G_d(z) \quad G_\Delta(z)]$ , 加摄动时  $G_\Delta(z) = W_1(z)$ , 乘摄动时  $G_\Delta(z) = G_p(z)W_1(z)$  (要求  $G_p(z)$  稳定). 由  $l^1$  范数的定义可知  $\|P(z)M_l(z)\bar{G}_d(z)\|_A, \|P(z)M_l(z)G_f(z)\|_A$  分别表示了残差函数对任意有界扰动和故障信号可具有的最大增益, 所以应选择自由参数  $P^*(z)$  使得  $\|P^*(z)M_l(z)G_f(z)\|_A$  尽可能大, 同时  $\|P^*(z)M_l(z)\bar{G}_d(z)\|_A$  尽可能小, 下面通过  $l^1$  优化技术实现这一目标.

## 3 残差函数的几种 $l^1$ 优化方法

记  $K(z) = P(z)M_l(z), B_d(z) = K(z)G_d(z), B_\Delta(z) = K(z)G_\Delta(z), B_f(z) = K(z)G_f(z)$ .

为使  $P(z) \in A$ , 应使  $K(z) \in A$ , 且在  $M_l(z)$  的单位圆外零点处  $K(z)$  全部等于零. 设  $M_l(z)$  在单位圆外有  $n$  个零点  $\rho_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 为简化叙述设它们互异且均为实数, 于是  $P(z) \in A$  的条件是

$$K(z) \in A, \quad \text{且 } K(\rho_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

取有限数据长度  $\tau$ , 记

$$B_d = \begin{bmatrix} b_0^d \\ b_1^d \\ \vdots \\ b_{\tau-1}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0^d & 0 & \cdots & 0 \\ g_1^d & g_0^d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{\tau-1}^d & g_{\tau-2}^d & \cdots & g_0^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_{\tau-1} \end{bmatrix} = G_d K, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1^{-1} & \cdots & \rho_1^{-(\tau-1)} \\ 1 & \rho_2^{-1} & \cdots & \rho_2^{-(\tau-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho_n^{-1} & \cdots & \rho_n^{-(\tau-1)} \end{bmatrix},$$

其中  $b_i^d, g_i^d, k_i, i=0, 1, \dots, \tau-1$  分别是  $B_d(z), G_d(z), K(z)$  的脉冲响应序列前  $\tau$  项. 再与  $B_d = G_d K$  类似的定义  $B_\Delta = G_\Delta K, B_f = G_f K$ , 约束关系(2)可化为

$$EK = 0, \quad G_d^{-1}B_d = G_\Delta^{-1}B_\Delta = G_f^{-1}B_f \quad (3)$$



**方法一.** 下面的优化问题是对文献[4]的方法经变形后并利用式(1)参数化后得出

$$J = \min_{\substack{P(z) \in A \\ K(z) = P(z)M_f(z)}} \{ \alpha_1 \| K(z)G_d(z) \|_A + \alpha_2 \| K(z)G_\Delta(z) \|_A + \alpha_3 \| K(z)G_f(z) - 1 \|_A \} \quad (4)$$

其中  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是权系数. 这个优化问题是要使残差函数的输出逼近故障信号, 同时降低扰动及模型不确定性对残差输出的影响.

记  $\bar{B}_f^T = [\bar{b}_0 \ \bar{b}_1 \ \cdots \ \bar{b}_{r-1}]^T = [b_0^f - 1 \ b_1^f \ \cdots \ b_{r-1}^f]^T$ ,  $e_1 = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T$ , 并由式(3)和  $l^1$  范数的定义, 问题(4)可化为

$$\begin{cases} \mu = \min \{ \alpha_1 \sum_{i=0}^{r-1} |b_i^d| + \alpha_2 \sum_{i=0}^{r-1} |b_i^\Delta| + \alpha_3 \sum_{i=1}^{r-1} |\bar{b}_i| \} \\ s. t. \quad EG_d^{-1}B_d = 0 \\ G_d^{-1}B_d = G_\Delta^{-1}B_\Delta \\ G_d^{-1}B_d = G_f^{-1}\bar{B}_f + G_f^{-1}e_1 \end{cases} \quad (5)$$

由  $l^1$  优化理论<sup>[3]</sup>, 问题(5)可转换为一个线性规划问题求解.

**方法二.** 文献[5]给出了一种  $l^1$  优化故障检测方法

$$\begin{aligned} \mu &= \min_{\substack{P(z) \in A \\ K(z) = P(z)M_f(z)}} \frac{\| K(z)[G_d(z) \ G_\Delta(z)] \|_A}{\| K(z)G_f(z) \|_A} = \\ &= \min_{\substack{P(z) \in A \\ K(z) = P(z)M_f(z)}} \frac{\| K(z)G_d(z) \|_A + \| K(z)G_\Delta(z) \|_A}{\| K(z)G_f(z) \|_A} \end{aligned} \quad (6)$$

这个  $l^1$  优化问题的目标是极小化  $\| \partial r / \partial \bar{d} \|_A / \| \partial r / \partial f \|_A$ . 文献[5]已证明可通过解  $2^r$  个线性规划求解这个问题.

**方法三.** 这里给出另一种新的方法, 构造  $l^1$  最优化问题

$$J = \min_{\substack{P(z) \in A \\ K(z) = P(z)M_f(z)}} \{ \alpha_1 \| K(z)[G_d(z) \ G_\Delta(z)] \|_A - \alpha_2 \| K(z)G_f(z) \|_A \} \quad (7)$$

其中  $\alpha_1, \alpha_2$  是权系数. 这个优化问题可以理解为, 求最优残差函数使得  $\| \partial r / \partial f \|_A - \| \partial r / \partial \bar{d} \|_A$  的差值尽可能大, 从而使检测方法具有鲁棒性. 利用  $l^1$  范数的定义和式(2)并增加一个权系数后可将问题(7)转化为

$$\begin{cases} \mu = \min \{ \alpha_1 (\sum_{i=0}^{r-1} |b_i^d| + \alpha_2 \sum_{i=0}^{r-1} |b_i^\Delta|) - \alpha_3 (\sum_{i=0}^{r-1} |b_i^f|) \} \\ s. t. \quad EG_d^{-1}B_d = 0 \\ G_d^{-1}B_d = G_\Delta^{-1}B_\Delta \\ G_d^{-1}B_d = G_f^{-1}B_f \end{cases} \quad (8)$$

**定理 1.** 设  $X_d^*, Y_d^*, X_\Delta^*, Y_\Delta^*, X_f^*, Y_f^*$  是如下混合 0-1 型整数线性规划的最优解

$$\mu = \min \{ \alpha_1 (\sum_{i=0}^{r-1} (x_i^d + y_i^d) + \alpha_2 \sum_{i=0}^{r-1} (x_i^\Delta + y_i^\Delta) - \alpha_3 \sum_{i=0}^{r-1} (x_i^f + y_i^f)) \} \quad (9)$$

$$s. t. \quad [EG_d^{-1} \quad -EG_d^{-1}] \begin{bmatrix} X_d \\ Y_d \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

$$[G_d^{-1} \quad -G_d^{-1}] \begin{bmatrix} X_d \\ Y_d \end{bmatrix} - [G_\Delta^{-1} \quad -G_\Delta^{-1}] \begin{bmatrix} X_\Delta \\ Y_\Delta \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

$$[G_d^{-1} \quad -G_d^{-1}] \begin{bmatrix} X_d \\ Y_d \end{bmatrix} - [G_f^{-1} \quad -G_f^{-1}] \begin{bmatrix} X_f \\ Y_f \end{bmatrix} = 0 \quad (12)$$

$$x_i^f \leq Ms_i, \quad y_i^f \leq M(1 - s_i), \quad i = 0, 1, \dots, \tau - 1 \quad (13)$$

其中  $s_i = 0$  或  $1$ ;  $M$  是充分大的正数;  $X_d, Y_d, X_\Delta, Y_\Delta, X_f, Y_f \geq 0$ , 则  $B_d^* = X_d^* - Y_d^*, B_\Delta^* = X_\Delta^* - Y_\Delta^*, B_f^* = X_f^* - Y_f^*$  是问题(8)的最优解, 并且

$$\begin{aligned} \mu^* &= \alpha_1 \left( \sum_{i=0}^{\tau-1} |b_i^{d*}| + \alpha_2 \sum_{i=0}^{\tau-1} |b_i^{\Delta*}| \right) - \alpha_3 \left( \sum_{i=0}^{\tau-1} |b_i^{f*}| \right) = \\ &\alpha_1 \sum_{i=0}^{\tau-1} (x_i^{d*} + y_i^{d*}) + \alpha_2 \sum_{i=0}^{\tau-1} (x_i^{\Delta*} + y_i^{\Delta*}) - \alpha_3 \sum_{i=0}^{\tau-1} (x_i^{f*} + y_i^{f*}). \end{aligned}$$

**证明.** 因  $B_d = X_d - Y_d, B_\Delta = X_\Delta - Y_\Delta, B_f = X_f - Y_f$ , 约束方程(10)~(12)与优化问题(8)的约束方程是等价的.

约束条件(13)可保证有关系  $x_i^f y_i^f = 0, i = 0, 1, \dots, \tau - 1$ , 这使得  $|b_i^f| = x_i^f + y_i^f$ . 若再能设法证明对于最优解  $X_d^*, Y_d^*, X_\Delta^*, Y_\Delta^*, X_f^*, Y_f^*$ , 存在关系  $x_i^{d*} y_i^{d*} = 0, x_i^{\Delta*} y_i^{\Delta*} = 0, i = 0, 1, \dots, \tau - 1$ , 便可有  $|b_i^{d*}| = x_i^{d*} + y_i^{d*}, |b_i^{\Delta*}| = x_i^{\Delta*} + y_i^{\Delta*}$ , 即两个优化问题等价.

设存在某个  $k$ , 有  $x_k^{d*} y_k^{d*} \neq 0$ . 不失一般性, 设  $x_k^{d*} - y_k^{d*} > 0$ . 构造向量  $X_d', Y_d'$  使  $i \neq k$  时,  $x_i^{d'} = x_i^{d*}, y_i^{d'} = y_i^{d*}$ ;  $i = k$  时,  $x_i^{d'} = x_i^{d*} - y_i^{d*}, y_i^{d'} = 0$ . 由优化问题(9)约束方程的结构可知  $X_d', Y_d', X_\Delta^*, Y_\Delta^*, X_f^*, Y_f^*$  仍然在优化问题(9)的可行域中. 但是这时却有

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \sum_{i=0}^{\tau-1} (x_i^{d'} + y_i^{d'}) + \alpha_2 \sum_{i=0}^{\tau-1} (x_i^{\Delta*} + y_i^{\Delta*}) - \alpha_3 \sum_{i=0}^{\tau-1} (x_i^{f*} + y_i^{f*}) = \\ &\alpha_1 \sum_{i=0}^{\tau-1} (x_i^{d*} + y_i^{d*}) + \alpha_2 \sum_{i=0}^{\tau-1} (x_i^{\Delta*} + y_i^{\Delta*}) - \alpha_3 \sum_{i=0}^{\tau-1} (x_i^{f*} + y_i^{f*}) - 2y_k^{d*} < \mu^* \end{aligned}$$

与  $X_d^*, Y_d^*, X_\Delta^*, Y_\Delta^*, X_f^*, Y_f^*$  是优化问题(9)的最优解矛盾, 故有  $x_k^{d*} y_k^{d*} = 0$ . 同理可证  $x_k^{\Delta*} y_k^{\Delta*} = 0$ . 证毕.

在实际的计算过程中, 若数据长度较小(比如  $\tau < 10$ ), 可按类似文献[5]给出的步骤利用穷举法解  $2^\tau$  个线性规划得到原问题的解.

## 4 仿真与结论

考虑加摄动系统  $y(z) = [G_p(z) + W_1(z)\Delta_p]u(z) + G_d(z)d(z) + G_f(z)f(z)$ , 其中  $G_p(z) = \frac{z+2}{z+0.4}, W_1(z) = 0.6, G_d(z) = \frac{0.1z+0.5321}{z-0.3679}, G_f(z) = \frac{z-0.9}{z}, T_s = 1$  秒.

取数据长度  $\tau = 4$ , 用方法一(即文献[4]的方法)时, 对应于不同的权系数仅可得出两种解,  $B_f(z) = 0$  或者  $B_f(z) = 1$ .  $B_f(z) = 0$  时, 残差函数对故障不能作出反映, 故障检测系统失效; 而  $B_f(z) = 1$  时, 残差函数  $r^*(z)$  的阶跃响应曲线如图 1 所示, 仍然不能区分出故障.

使用方法二、三时, 残差函数的响应分别如图 2, 3 所示, 这时故障信号产生的输出幅值均大于扰动信号产生的输出幅值, 表明这两种方法对此例有效.

方法一虽然仅需要解一个线性规划, 但是由于其目标函数存在固有的矛盾, 常常难以得出符合鲁棒性要求的解. 而方法二、三需要解  $2^\tau$  个线性规划, 当  $\tau$  取值较大时计算量将急速增加, 但目标函数较方法一合理. 使用时要根据待求问题选择合适的方法.

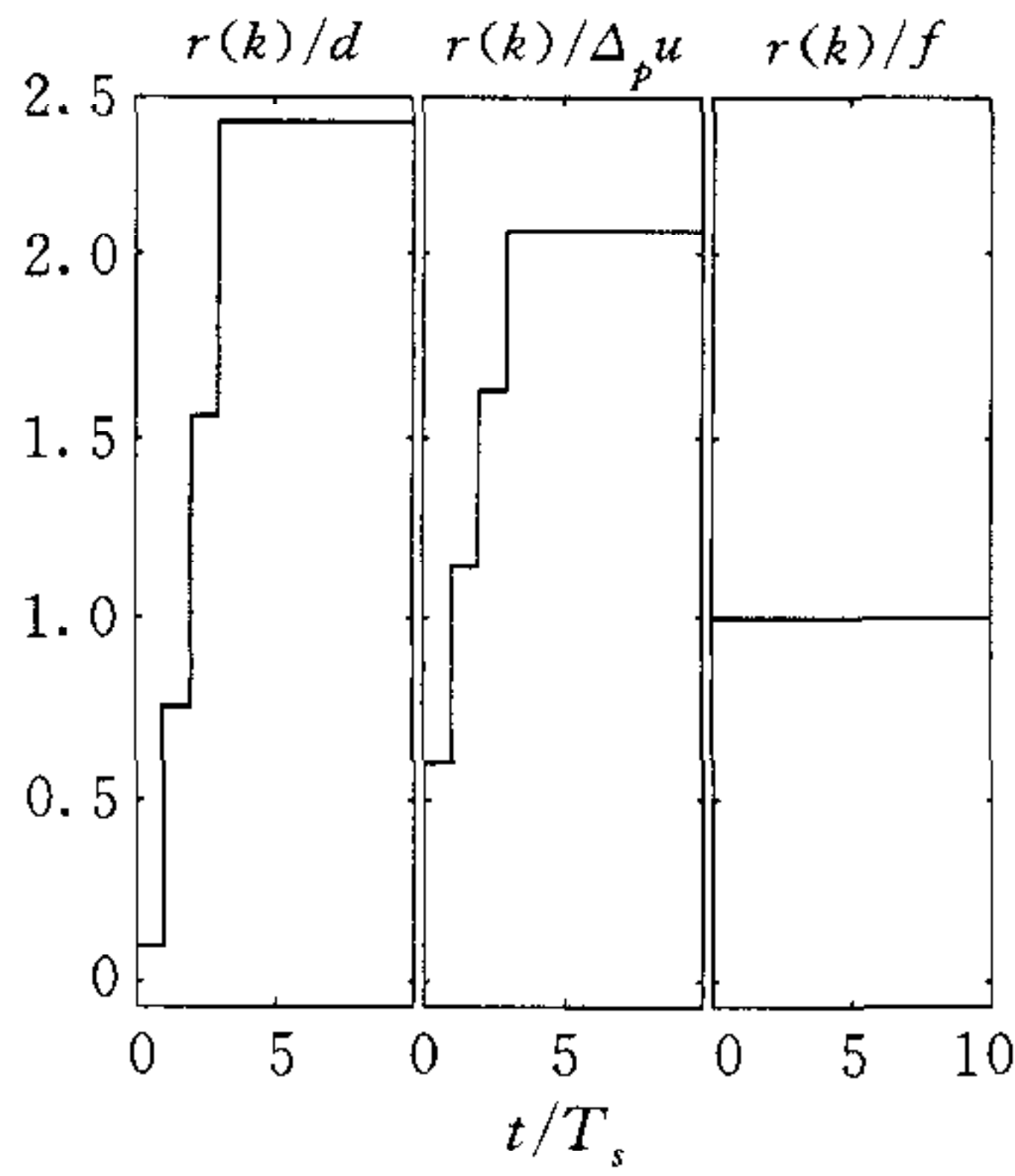


图 1 方法一的响应曲线

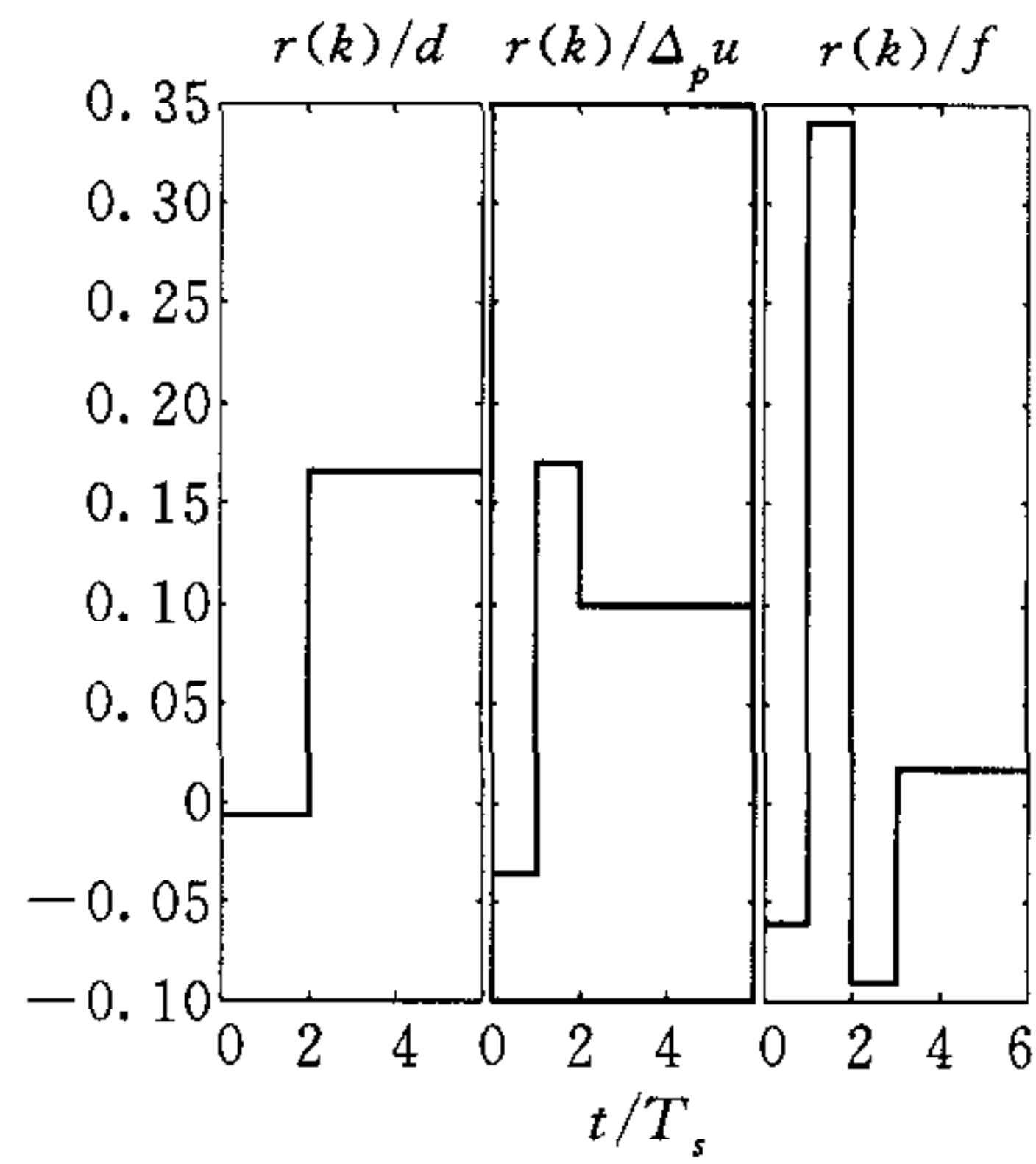


图 2 方法二的响应曲线

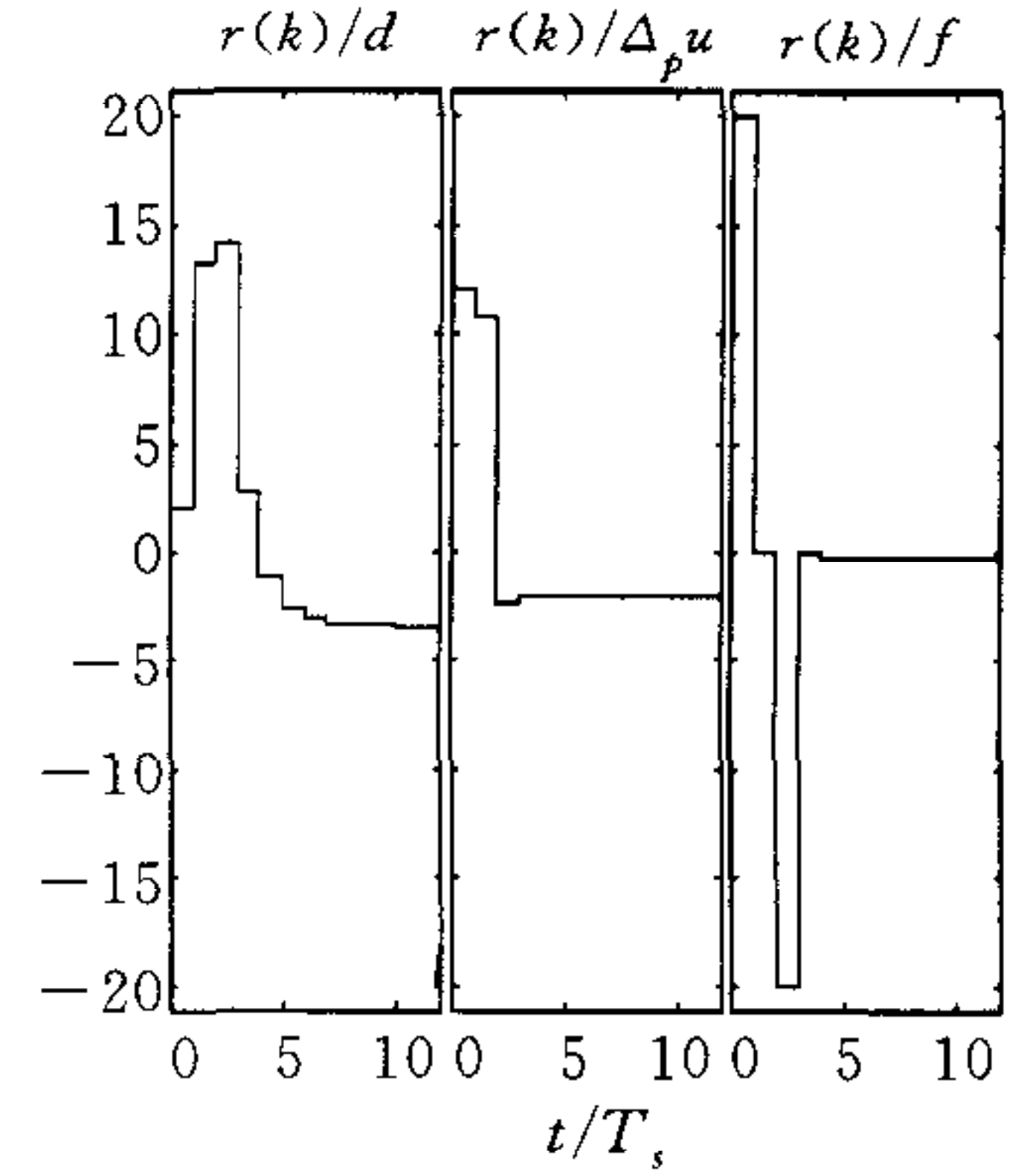


图 3 方法三的响应曲线

## 参 考 文 献

- 1 Frank P M, Ding X. Survey of robust residual generation and evaluation methods in observer-based fault detection systems. *J. of Process Control*, 1997, 7(6):403~424
- 2 张 萍,王桂增,周东华. 动态系统的故障诊断方法. 控制理论与应用,2000,17(2):153~158
- 3 Dahleh M A. Control of Uncertain Systems——A Linear Programming Approach. Prentice-Hall, Inc. A Simon & Schuster Company, New Jersey: Englewood Cliffs, 1995
- 4 Faitakis Y E, Kantor J C. Residual generation and fault detection for discrete-time systems using an  $l_\infty$  technique. *Int. J. Control*, 1996,64(1):155~174
- 5 方华京. 基于观测器的  $l^1$  鲁棒故障检测方法. 控制理论与应用,2001,18(1):36~40
- 6 Ding X, Frank P M. Fault detection via factorization approach. *Systems & Control Letters*, 1990, 14(4):431~436

方华京 华中理工大学控制科学与工程系教授、博士生导师. 主要研究领域为鲁棒与容错控制, 控制系统故障诊断等.