第 28 卷 第 4 期
2002 年 7 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 28, No. 4
July, 2002

短文

2-D 系统的稳定性问题[1)]

赵胜民 唐万生 李光泉
(天津大学系统工程研究所 天津 300072)
(E-mail: wstang@eyou.com, gqli@tju.edu.cn)

摘 要 以线性矩阵不等式为工具,研究有关 2-D 系统第二类 Fornasini-Marchesini 模型的稳定性的问题. 首先提出了该类系统的一种 Lyapunov 不等式,由此给出了该类系统渐近稳定的新的判别条件. 其次,给出了该类系统能稳定化的充分条件和反馈矩阵的求法. 最后,提出了一种求该类系统的稳定性裕度下界的方法,并指出了利用该方法得到的稳定性裕度的下界大于原有文献中给出的下界.

关键词 2-D 系统,渐近稳定性,能稳定性,稳定性裕度,线性矩阵不等式
中图分类号 O231

STABILITY OF 2-D STATE-SPACE SYSTEMS

ZHAO Sheng-Min TANG Wan-Sheng LI Guang-Quan
(*Institute of Systems Engineering, Tianjin University, Tianjin* 300072)
(E-mail: wstang@eyou.com, gqli@tju.edu.cn)

Abstract In this paper, the stability problems for the second Fornasini-Marchesini model of 2-D systems are investigated by using linear matrix inequality. First, a kind of 2-D Lyapunov inequality is proposed, and some new criteria for asymptotical stability of the systems are given. Secondly, the sufficient conditions for stabilization of the systems are derived and the algorithm for determining the feedback matrix is presented, too. Finally, a new algorithm for computing a lower bound for the stability margin of the systems is proposed. It is shown that the lower bound obtained by this algorithm is less conservative than the existing ones.

Key words 2-D systems, asymptotical stability, stabilization, stability margin, linear matrix inequality

1 引言

稳定性是 2-D 系统研究中的一个核心问题,学者们对各类 2-D 系统模型的稳定性问题

1) 天津市自然科学基金(963609511)资助
收稿日期 2000-06-22 收修改稿日期 2001-12-03

均做了不少研究. 其中对 2-D Roesser 模型取得的研究成果最为完善,一般形式 Lyapunov 方程已被推广到 Roesser 模型[1],并基于此给出了该模型渐近稳定性、能稳定性、稳定性裕度等的判别准则和估计方法[1~3]. 对于 2-D 一般模型,杨成梧等在文献[4]中利用 Roesser 模型的 Lyapunov 方法对其渐近稳定性进行了研究. 而对于第二类 Fornasini-Machesini(2-DF-MII)模型,在文献[5,6]中提出了两种特殊形式的 Lyapunov 方程,并给出了其渐近稳定性和稳定性裕度等的判别准则和估计方法. 另一方面,随着求解线性矩阵不等式(LMI)的各种方法的推出,人们把越来越多的系统理论中的问题转化为 LMI 问题来考虑[7]. 本文将利用 LMI 对 2-D F-MII 模型的稳定性问题进行深入研究.

2　渐近稳定性问题

考虑如下的 2-D 系统第二类 Fornasini-Machesini 模型

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(i+1,j+1) = {} & A_1\boldsymbol{x}(i+1,j) + A_2\boldsymbol{x}(i,j+1) + \\ & B_1\boldsymbol{u}_1(i+1,j) + B_2\boldsymbol{u}_2(i,j+1)\end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(i,j)\in R^n$ 表示局部状态变量, $\boldsymbol{u}_1(i,j)\in R^{m_1},\boldsymbol{u}_2(i,j)\in R^{m_2}$表示输入; A_1,A_2,B_1,B_2 为具适当阶数的常数矩阵. 系统(1)的边界条件为

$$\boldsymbol{x}(i,-i) = \boldsymbol{x}_{i0},\quad i\in Z,$$

这里 Z 表示整数的集合.

记 $X_r=\{\boldsymbol{x}(h,k)\mid \boldsymbol{x}(h,k)\in R^n,\ h+k=r\}$. 以 $\|\boldsymbol{x}\|$ 表示向量 $\boldsymbol{x}$ 的欧几里得范数, 并记 $|X_r|=\sup\limits_{n\in Z}\|\boldsymbol{x}(n,r-n)\|$.

定义 1. 2-D 第二类 Fornasini-Machesini 模型(1)称为渐近稳定的, 是指对于零输入和有限的 $|X_0|$ 均有 $\lim\limits_{r\to+\infty}|X_r|=0$.

定理 1[5]. 2-D 系统(1)是渐近稳定的当且仅当

$$\det(I_n - z_1A_1 - z_2A_2)\neq 0,\quad \forall\ (z_1,z_2)\in \bar{U}^2 \tag{2}$$

其中 $\bar{U}^2=\{(z_1,z_2)\mid |z_1|\leqslant 1,\ |z_2|\leqslant 1\}$.

由于(2)式不便于计算检验. 这里研究判别 2-D 系统(1)渐近稳定的新方法. 设

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_1 & A_2\end{bmatrix},\quad \bar{B}=\begin{bmatrix}B_1 & B_2\\ B_1 & B_2\end{bmatrix} \tag{3}$$

定理 2. 如果存在 $n\times n$ 阶对称矩阵 $P_1>0,P_2>0$ 使得块对角矩阵 $P=\mathrm{diag}[P_1,P_2]$满足下面的矩阵不等式

$$P-\bar{A}^{\mathrm{T}}P\bar{A}>0 \tag{4}$$

则 2-D 系统(1)是渐近稳定的.

证明. 当矩阵不等式(4)可解时,下面的 2-D Roesser 模型

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^h(i+1,j)\\ \boldsymbol{x}^v(i,j+1)\end{bmatrix}=\bar{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^h(i,j)\\ \boldsymbol{x}^v(i,j)\end{bmatrix}+\bar{B}\boldsymbol{u}(i,j)$$

渐近稳定且其特征多项式 $d(z_1,z_2)$在 $\bar{U}^2$ 内不等于零[1]. 而由线性代数的知识又有

$$d(z_1,z_2)=\det\begin{bmatrix}I_n-z_1A_1 & -z_1A_2\\ -z_2A_1 & I_n-z_2A_2\end{bmatrix}=\det[I_n-z_1A_1-z_2A_2],$$

故由定理 1 可知,2-D 系统(1)是渐近稳定的.　　证毕.

注 1. 经过简单的计算可知(4)式等价于 $\mathrm{diag}[P_1,P_2]-A^{\mathrm{T}}(P_1+P_2)A>0$. 在该矩阵不等式中取不同形式的 P_1,P_2,即分别可以得到文献[5]和文献[6]中相应的结论. 因此,矩阵不等式(4)是系统(1)一般形式的 Lyapunov 不等式.

3　能稳定性问题

现在考虑 2-D 系统(1)的能稳定性问题. 对于 2-D 系统(1),取状态反馈

$$\boldsymbol{u}_1(i,j)=K_1\boldsymbol{x}(i,j),\quad \boldsymbol{u}_2(i,j)=K_2\boldsymbol{x}(i,j) \tag{5}$$

则得闭环系统

$$\boldsymbol{x}(i+1,j+1)=(A_1+B_1K_1)\boldsymbol{x}(i+1,j)+(A_2+B_2K_2)\boldsymbol{x}(i,j+1) \tag{6}$$

定义 2. 如果存在状态反馈(5)使得闭环系统(6)是渐近稳定的,则称 2-D 系统(1)是状态反馈能稳定化的.

定理 3. 如果下列关于 P,Q 的线性矩阵不等式

$$\begin{pmatrix} P & P\overline{A}^{\mathrm{T}}+Q^{\mathrm{T}}\overline{B}^{\mathrm{T}} \\ \overline{A}P+\overline{B}Q & P \end{pmatrix}>0 \tag{7}$$

可解,其中 $P=\mathrm{diag}[P_1,P_2]$, $P_1,P_2\in R^{n\times n}$为正定矩阵, $Q=\mathrm{diag}[Q_1,Q_2]$,$Q_1\in R^{m_1\times n}$,$Q_2\in R^{m_2\times n}$,则 2-D 系统(1)状态反馈能稳定化,其中反馈阵为 $K_i=Q_iP_i^{-1}(i=1,2)$.

该定理的证明比较容易,这里从略.

4　稳定性裕度

本节考虑系统(1)的稳定性裕度. 记 $\Delta A=[\Delta A_1,\Delta A_2]$是系统(1)中系统矩阵 $A=[A_1,A_2]$的扰动矩阵. 下面给出系统(1)的稳定性裕度的定义.

定义 3. 系统(1)的稳定性裕度为

$$\lambda_0=\max\{\lambda>0\mid \text{只要 } \|\Delta A\|<\lambda \text{ 就有扰动后的系统仍为渐近稳定的}\},$$

这里 $\|\cdot\|$ 表示矩阵的算子范数.

定理 4. 如果存在块对角矩阵 $P=\mathrm{diag}[P_1,P_2]>0$(其中 P_1,P_2 均为 $n\times n$ 阶对称正定矩阵)使得对所有的满足 $\lambda\|\xi\|\geqslant\|\eta\|$ (λ 为正常数)的向量 $\xi,\eta\in R^{2n}$都有

$$[\xi^{\mathrm{T}},\eta^{\mathrm{T}}]\begin{bmatrix} P-\overline{A}^{\mathrm{T}}P\overline{A} & -\overline{A}^{\mathrm{T}}P \\ -P\overline{A} & -P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}>0 \tag{8}$$

成立,则当 $\|\Delta A\|<\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda$ 时扰动系统保持稳定.

证明. 任取 $\xi\in R^{2n}$,并令 $\eta=\Delta\overline{A}\xi$,其中 $\Delta\overline{A}$ 为(5)中定义的矩阵 $\overline{A}$ 的相应扰动. 这时有 $\lambda\|\xi\|\geqslant\|\eta\|$. 这样由定理假设有

$$\xi^{\mathrm{T}}[P-(\overline{A}+\Delta\overline{A})^{\mathrm{T}}P(\overline{A}+\Delta\overline{A})]\xi=[\xi^{\mathrm{T}},\ \eta^{\mathrm{T}}]\begin{bmatrix} P-\overline{A}^{\mathrm{T}}P\overline{A} & -\overline{A}^{\mathrm{T}}P \\ -P\overline{A} & -P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}>0,$$

于是由定理 2 知,扰动后的系统(1)为渐近稳定的.　　证毕.

再注意 $\lambda\|\xi\|\geqslant\|\eta\|$ 等价于 $[\xi^{\mathrm{T}},\eta^{\mathrm{T}}]\begin{bmatrix}\lambda^2 I & 0\\ 0 & -I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix}>0$,这样由 S-方法[8]可得

定理 5. 若存在块对角正定矩阵 $P=\mathrm{diag}[P_1,P_2]>0$($P_1,P_2$ 为 $n\times n$ 阶矩阵)和常数 $\lambda>0,\beta\geqslant 0$ 使得

$$\begin{bmatrix}P-\overline{A}^{\mathrm{T}}P\overline{A}-\lambda^2\beta I & -\overline{A}^{\mathrm{T}}P\\ -P\overline{A} & \beta I-P\end{bmatrix}>0 \tag{9}$$

成立,则当 $\|\Delta A\|<\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda$ 时扰动系统保持稳定.

由此可以给出一个估计系统(1)稳定性裕度的方法. 考虑如下的优化问题

$$\begin{aligned}&\max\ \lambda\\ &s.t.\quad P=\mathrm{diag}[P_1,P_2]>0,\lambda>0,\beta>0,\\ &\begin{bmatrix}P-\overline{A}^{\mathrm{T}}P\overline{A}-\lambda^2\beta I & -\overline{A}^{\mathrm{T}}P\\ -P\overline{A} & \beta I-P\end{bmatrix}>0,\end{aligned}$$

这个问题的最优值记为 λ^*,则 $\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda^*$ 是系统(1)稳定性裕度的一个下界.

注 2. 在以前文献中,系统(1)稳定性裕度的下界均是利用特殊形式的 Lyapunov 方程的正定解来给出的. 我们这里是以一般形式的 Lyapunov 不等式(4)为基础的,逐步检验定理 4,5 的证明过程可知,$\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda^*$ 是利用这个 Lyapunov 不等式所能得到的系统(1)稳定性裕度的最佳下界估计. 因此,我们得到的结果要好于原有的结果.

5　示例

考虑第二类 Fornasini-Marchesini 2-D 系统模型(1),其中

$$A_1=\begin{bmatrix}0.471\,875 & 0.125\,024\\ -0.210\,642 & 0.451\,176\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}0.474\,253 & -0.007\,580\\ 0.034\,811 & 0.475\,623\end{bmatrix}.$$

文献[6]中对此系统的稳定性裕度问题进行了研究,得出的结果是其稳定性裕度大于 0.001 836. 这里利用 Matlab Toolbox,求得第四节中的优化问题的最优值为 0.034 712,故有稳定性裕度的一个下界为 0.024 545. 这个结果明显优于文献[6]中的结果.

6　结束语

本文首先研究了 2-DF-MII 模型的渐近稳定性问题,建立了一般形式的 Lyapunov 不等式,给出了该类系统的渐近稳定的判别条件,并且指出了原有的相关结论均可看作我们这里结论的推论. 其次,研究了该类系统的能稳定性问题,给出了其能稳定化的充分条件和反馈矩阵的求法. 最后,给出了该类系统稳定性裕度的一种估计方法. 该方法所得的结果优于以前文献中所给的结果. 所有这些结论均是基于线性矩阵不等式形式给出的,在计算上较为方便.

参　考　文　献

1　Lu W S, Lee E B. Sability analysis for two-dimensional systems via a Lyapunov approach. *IEEE Transactions on*

Circuits and Systems, 1985, **32**(1): 61～68

2 Yaz E. On state-feedback stabilization of two-dimensional digital systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1985, **32**(10): 1069～1070

3 Agathoklis P. Lower bounds for the stability margin of discrete 2-D systems based on the Lyapumov equation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1988, **35**(6): 745～749

4 杨成梧,孙建中,邹 云. 一般 2-D 线性常系数离散状态空间模型渐近稳定性的一类 Lyapunov 方法. 控制理论与应用, 1993, **10**(1): 87～91

5 Lu W S. On robust stability of 2-D discrete systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(3): 502～506

6 Hinamoto T. Stability of 2-D discrete systems described by the Fornasini-Marchesini second model. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 1997, **44**(3): 254～257

7 Boyd S, Ghaoui L E. Method of centers for minimizing generalized eigenvalue. *Linear Algebra and Its Applications, Special Issue on Numerical Linear Algebra Methods in Control Signals and Systems*, 1993, **188**: 63～111

8 Uhlig F. A recurring theorem about pairs of quadratic forms and extensions: A survey. *Linear Algebra and Its Applications*, 1979, **25**: 219～237

赵胜民 分别于 1989 年和 1992 年在吉林大学数学系和数学研究所获得学士和硕士学位,1998 年在天津大学系统工程研究所获得博士学位. 现为天津大学数学系副教授. 研究方向包括广义系统、2-D 系统、微分包含的生存理论等.

唐万生 分别于 1985 年和 1988 年在南开大学计算机与系统科学系获得学士和硕士学位,1993 年在天津大学系统工程研究所获得博士学位. 现为天津大学系统工程研究所教授、博士生导师. 研究方向包括无穷维系统、2-D 系统、广义系统和生存理论等.

李光泉 1958 年毕业于天津大学机械系. 天津大学原校长,现为天津大学系统工程研究所教授、博士生导师、《系统工程理论与实践》编委. 研究方向包括大系统理论、2-D 系统、微分对策等.