第28卷 第4期
2002年7月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 28, No. 4
July, 2002

短文

一类非线性开关系统二次稳定性的充要条件[1)]

刘玉忠[1]　赵　军[2]

[1](沈阳师范大学　沈阳　110034)

[2](东北大学信息科学与工程学院　沈阳　110006)

(E-mail: liuyuzhong@sina.com.cn)

摘　要　研究了一类非线性开关系统的二次稳定性问题.首先将系统的二次稳定性转化为等价的带约束非线性规划问题,给出了系统二次稳定的充分必要条件;然后利用 Fritz John 条件,将该充要条件转化为较易检验的以代数方程和不等式的解表示的代数条件,最后举例说明了该代数条件的使用.

关键词　非线性开关系统,二次稳定性,Fritz John 条件

中图分类号　TP273

A SUFFICIENT AND NECESSARY CONDITION FOR STABILITY OF A CLASS OF NONLINEAR SWITCHED SYSTEMS

LIU Yu-Zhong[1]　ZHAO Jun[2]

[1](*Shenyang Normal University, Shenyang*　110034)

[2](*School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang*　110006)

(E-mail: liuyuzhong@sina.com.cn)

Abstract　In this paper, the stability of a class of nonlinear switched systems is studied. First we transform the quadratic stability of systems into an equivalent nonlinear programming with constrains and then give a sufficient and necessary condition for quadratic stability. With Fritz John condition, we change the condition into an algebraic one in terms of the solutions of equations and inequality, which is easy to verify. Finally, an example is presented to demonstrate how the conditions can be applied.

Key words　Nonlinear switched systems, quadratic stability, Fritz John condition

1) 国家自然科学基金(79970114)、国家攀登计划、国家留学回国人员基金和教育部骨干教师基金资助

收稿日期　2000-03-30　　收修改稿日期　2001-02-08

1 引言

开关系统是混杂动态系统中一类重要的模型，它在许多实际系统中有着十分广泛的背景，因而近年来受到人们的普遍重视[1~4]. 目前，关于开关系统稳定性的研究，已有一些成果和方法，如多 Lyapunov 技术，Lyapunov-like 函数技术等[5~8]. 最近，Skafidas E[1]对于线性系统利用完备性的概念，研究系统的稳定性，但并未给出完备性验证的具体方法. 本文针对非线性开关系统引进完备性条件，并将其转化为带有约束的非线性规划问题，进而利用 Fritz John 条件得到非线性开关系统二次稳定的充分必要条件.

2 预备知识

本文考虑如下的非线性开关系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x}), \quad j = 1,2,\cdots,k \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x})$满足：存在 $\beta_j>0$，使得对任意 $\alpha\geqslant 0$ 有 $\boldsymbol{f}_j(\alpha\boldsymbol{x})=\alpha^{\beta_j}\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x})$, $j=1,2,\cdots k$.

定义 1. 系统(1)称为二次稳定的，如果存在对称正定矩阵 P 及分段常值的开关信号 $j=j(\boldsymbol{x})$，使函数 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}$ 沿系统(1)的导数 $\dot{V}=\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}<0$, $\forall\ \boldsymbol{x}\neq 0$.

对于向量场 $\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x})$，任给 $i\in\{1,2,\cdots,k\}$，$\boldsymbol{x}\in R^n$，$\boldsymbol{x}\neq 0$，若 $\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x})$不全为零，记

$$M_i(\boldsymbol{x}) = \{j\,|\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x}) = 0,\ \boldsymbol{x}\neq 0\},\ \boldsymbol{h}_i = P\boldsymbol{f}_i + \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} \tag{2}$$

从 $\hat{H}=\{\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x})\,|\,k\in M_i(\boldsymbol{x})\}$中选取一个最大线性无关组$\{\boldsymbol{h}_{j_1},\boldsymbol{h}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{h}_{j_s}\}$，方法如下(设每个线性无关组的元素按下标由小到大的顺序排列).

首先从 $\hat{H}$ 的所有最大线性无关组的第一个元素中，取下标最小的元素为 $\boldsymbol{h}_{j_1}$，然后从所有包含 $\boldsymbol{h}_{j_1}$的最大线性无关组的第二个元素中，取下标最小的元素为 $\boldsymbol{h}_{j_2}$，再从所有包含 $\boldsymbol{h}_{j_1}$, $\boldsymbol{h}_{j_2}$的最大线性无关组的第三个元素中，取下标最小的元素为 $\boldsymbol{h}_{j_3}$，依次下去，即可得到 $\hat{H}$ 的一个唯一的最大线性无关组：$\{\boldsymbol{h}_{j_1},\boldsymbol{h}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{h}_{j_s}\}$，记

$$S_i = \{j_1,j_2,\cdots,j_s\},\quad Q_i = M_i\backslash S_i \tag{3}$$

3 主要结果

引理 1. 系统(1)二次稳定的充要条件是，存在对称正定矩阵 P 使$\{V_j(\boldsymbol{x}),\ j=1,2,\cdots,k\}$是严格完备的，其中，$V_j(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x})$.

注. 该引理是文献[1]中定理 3.1 的推广，证明从略.（完备性定义参见文献[1]）

引理 2. 系统(1)二次稳定的充要条件是，存在对称正定矩阵 P 及正整数 i，使如下非线性规划问题(4)无可行解或有可行解但最优值小于零.

$$\begin{cases}\max\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})\\ \text{s. t.}\ \ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x})\geqslant 0,\ j\neq i\\ \qquad\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-1=0\end{cases} \tag{4}$$

证明. 利用引理 1 及完备性概念易证此结论,从略.

定理 1. 系统(1)二次稳定的充要条件是,存在对称正定矩阵 P 及正整数 i,使下面两条件成立

1) 方程

$$\begin{cases} \boldsymbol{h}_i - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{x} - H(H^{\mathrm{T}}H)^{-1}(H^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_i - H^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{x}) = 0 \\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x}) = 0,\ j = j_1, j_2, \cdots, j_s \\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x}) \geqslant 0,\ j \neq i \\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - 1 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

无解或所有解满足 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_i<0$,其中 $H=(\boldsymbol{h}_{j_1},\boldsymbol{h}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{h}_{j_s})$,$\boldsymbol{h}_k$ 由(2)给出.

2) 方程

$$\begin{cases} \sum\limits_{j\neq i}\lambda_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}_j = 0 \\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x}) \geqslant 0,\ j \neq i \\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - 1 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

无解或所有解满足 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_i<0$, 其中 $\lambda_j(\boldsymbol{x})\geqslant 0$, $\sum_{j\neq i}\lambda_j(\boldsymbol{x})=1$, $\lambda_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_j=0$, $j\neq i$.

证明. 由引理 1 易证必要性,以下仅证充分性. 设式(5),(6)无解或任意解 $\boldsymbol{x}$ 均满足 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_i<0$. 此时,若式(4)无可行解,则由引理 2 知系统(1)二次稳定;若式(4)有可行解,则必有最优解. 下证该最优值小于零,从而由引理 2 可得到系统(1)的二次稳定性. 由 Fritz John 条件,存在不全为零的非负常数 $\bar{\lambda}_j$, $j=1,2,\cdots,k$, 使最优解 $\boldsymbol{x}$ 满足

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_i\left(P\boldsymbol{f}_i + \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}\right) + \sum\limits_{j\neq i}\bar{\lambda}_j\left(P\boldsymbol{f}_j + \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{f}_j}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}\right) + \bar{\mu}\boldsymbol{x} = 0 \\ \bar{\lambda}_j\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_j = 0,\ j\neq i \end{cases} \tag{7}$$

式(7)两端分别左乘以 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 得:$\bar{\lambda}_i\left(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_i+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}\right)+\sum\limits_{j\neq i}\bar{\lambda}_j\left(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{f}_j}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}\right)+\bar{\mu}=0$.
下面分两种情形来讨论.

i) $\bar{\lambda}_i\neq 0$. 记 $\lambda_j=\bar{\lambda}_j/\bar{\lambda}_i$, $j\neq i$, $\mu=\bar{\mu}/\bar{\lambda}_i$, 则由上式所得 μ 代入(7)式得

$$\boldsymbol{h}_i - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{x} + \sum_{j\neq i}\lambda_j\boldsymbol{h}_j = 0 \tag{8}$$

于是,$\forall\ j\in Q_i(\boldsymbol{x})$,$\exists\ \alpha_{j_m}(\boldsymbol{x})$, $m\in S_i(\boldsymbol{x})$, 使 $\boldsymbol{h}_j(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{m\in S_i(\boldsymbol{x})}\alpha_{j_m}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}_m(\boldsymbol{x})$,则(8)式为

$$\boldsymbol{h}_i - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{x} + \sum_{j\neq i}\lambda_j\boldsymbol{h}_j = \boldsymbol{h}_i - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{x} + \sum_{j\in S_i(\boldsymbol{x})}\lambda_j\boldsymbol{h}_j + \sum_{m\in S_i(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{h}_m\Big(\sum_{j\in Q_i(\boldsymbol{x})}\lambda_j\alpha_{j_m}(\boldsymbol{x})\Big) =$$

$$\boldsymbol{h}_i - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{x} + \sum_{j\in S_i(\boldsymbol{x})}\lambda_j\boldsymbol{h}_j + \sum_{m\in S_i(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{h}_m\Big(\sum_{j\in Q_i(\boldsymbol{x})}\lambda_j\alpha_{j_m}(\boldsymbol{x})\Big) = \boldsymbol{h}_i - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{x} + \sum_{m\in S_i(\boldsymbol{x})}\delta_m\boldsymbol{h}_m = 0,$$

其中 $\delta_m=\lambda_m+\sum\limits_{j\in Q_i(\boldsymbol{x})}\lambda_j\alpha_{j_m}(\boldsymbol{x})$. 将上式写成矩阵形式即为

$$\boldsymbol{h}_i - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{x} + H(\delta_{j_1},\delta_{j_2},\cdots,\delta_{j_s})^{\mathrm{T}} = 0 \tag{9}$$

注意到 $H^{\mathrm{T}}H$ 的可逆性,有$(\delta_{j_1},\delta_{j_2},\cdots,\delta_{j_s})^{\mathrm{T}}=-(H^{\mathrm{T}}H)^{-1}(H^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_i-H^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{x})$. 代入(9)式得 $\boldsymbol{h}_i-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{x}-(H^{\mathrm{T}}H)^{-1}(H^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_i-H^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{x})=0$. 此即为定理的条件 1)中的第一式,从而 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{f}_i<0$,因此最优值小于零.

ii) $\bar{\lambda}_i\neq 0$. 因 $\bar{\lambda}_j$ 不全为零,记 $\lambda_j=\bar{\lambda}_j\Big/\sum_{j\neq i}\bar{\lambda}_j$, $\mu=\bar{\mu}\Big/\sum_{j\neq i}\bar{\lambda}_j$,由(7)式

$$\sum_{j\neq i}\lambda_j\left(Pf_i+\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}Px\right)+\mu x=0 \tag{10}$$

两边左乘以 x^{T} 得 $\mu=-\sum_{j\neq i}\lambda_j\left(x^{\mathrm{T}}Pf_j+x^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}Px\right)$，注意到 $\lambda_j x^{\mathrm{T}}Pf_j x=0$，将上式代入(10)式得 $\sum_{j\neq i}\lambda_j\left(Pf_j+\left(\frac{\partial f_j}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}Px-x^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}Px\cdot x\right)=0$，此即为定理中条件 2)的 (6)式，从而得最优值小于零.　　证毕.

对于线性开关系统，即 $f_j(x)=A_jx$，容易得到下面更为简单的结果

推论 1. 线性系统 (1)二次稳定的充要条件是，存在对称正定矩阵 P 及正整数 i，使下面两条件成立

1) 方程：$\begin{cases}B_ix-H(H^{\mathrm{T}}H)^{-1}H^{\mathrm{T}}B_ix-x^{\mathrm{T}}B_ix\cdot x=0\\ x^{\mathrm{T}}B_jx=0,\ j=j_1,j_2,\cdots,j_s\\ x^{\mathrm{T}}B_jx\geqslant 0,\ j\neq i\\ x^{\mathrm{T}}x-1=0\end{cases}$ 无解或所有解满足 $x^{\mathrm{T}}B_ix<0$. 其中 $B_j=A_j^{\mathrm{T}}P+PA_j^{\mathrm{T}}$，$H=(B_{j_1}x,B_{j_2}x,\cdots,B_{j_s}x)$.

2) 方程：$\begin{cases}\sum_{j\neq i}\lambda_j(x)B_jx=0\\ x^{\mathrm{T}}B_jx\geqslant 0,\ j\neq i\\ x^{\mathrm{T}}x-1=0\end{cases}$ 无解或所有解满足 $x^{\mathrm{T}}B_ix<0$. 其中 $\lambda_j(x)\geqslant 0$，$\sum_{j\neq i}\lambda_j(x)=1$，$\lambda_j(x)x^{\mathrm{T}}B_jx=0$，$j\neq i$.

由推论 1. 容易得到线性开关系统稳定的著名的凸组合条件，即

推论 2. 如果 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 的某个凸组合是稳定的，那么系统(1)是二次稳定的.

4　数值例子

考虑系统：$\dot{x}=f_j(x)$，$j=1,2$. 其中，$f_1(x)=(-x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$，$f_2(x)=(x_1x_2,\ -x_1^2-x_2^2)^{\mathrm{T}}$. 取 $i=1$，$P=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，此时条件 2)中的方程(6)为

$$\begin{cases}x_2^3x_1=0\\ 3x_2^2+2x_2^4=0\\ -x_2^3\geqslant 0\\ x_1^2+x_2^2=1\end{cases} \tag{11}$$

易得式(11)的解为$(x_1,x_2)=(\pm 1,0)$，对于这些解，显然有 $x^{\mathrm{T}}Pf_1=-1<0$.

对于条件 1)，仍取 $i=1$ 及上述矩阵 P，由 $x^{\mathrm{T}}Pf_2=0$ 得：$-x_2^3=0$，即 $x_2=0$.

对于 $x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$，$x_2=0$，有 $M_1(x)=\{2\}$，此时方程(5)为

$$\begin{cases}h_1-x^{\mathrm{T}}Pf_1\cdot x-H(H^{\mathrm{T}}H)^{-1}(H^{\mathrm{T}}h_1-H^{\mathrm{T}}x^{\mathrm{T}}Pf_1\cdot x)=0\\ x^{\mathrm{T}}Pf_2\geqslant 0\\ x^{\mathrm{T}}x-1=0\end{cases} \tag{12}$$

从(12)式的后两个方程得$(x_1,x_2)=(\pm 1,0)$，从而知，若(12)式有解，必满足 $x^{\mathrm{T}}Pf_1<0$.

对于 $x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$，$x_2\neq 0$，此时 $M_1(x)=\Phi$，方程(5)为

$$\begin{cases} -2x_1+x_1^3-x_1x_2^2=0 \\ 2x_2^2+x_1^2x_2-x_2^3=0 \\ -x_2^3\geqslant 0 \\ x_1^2+x_2^2=1 \end{cases} \tag{13}$$

由(13)式的第2,4方程得 $x_2(1+2x_1^2)=0$,与 $x_2\neq 0$ 矛盾,故方程(13)无解.综上所述,定理1的条件均满足,从而由定理可知,非线性开关系统是二次稳定的.

参 考 文 献

1 Skafidas E, Evans R J, Savkin A V, Petersen I R. Stability result for switched controller systems. *Automatica*, 1999, **35**(4):553～564

2 Ye H, Mickel N, Hou L. Stability for hybrid systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1998, **43**(4):461～474

3 Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, **19**(5):59～70

4 谢广明,郑大钟. 线性切换系统的能控性和能达性.控制理论与应用,1999,(增刊):135～140

5 Branicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1998, **43**(4):475～482

6 Peleties P, DeCarlo R A. Asymptotic stability of m-switched systems using Lyapunov-like functions. In: AACC, Proc. American Control Conf. Piscataway, NJ, USA: IEEE Service Center, 1991. 1679～1684

7 Haspanha J P, Morse A S. Stability of switched systems with average dwell-time. In: ATTN CDC'99, Proc. 38th Conf. on Decision and Control. Madison, USA: Omnipress 1999. 2655～2660

8 Narendra K S, Koditschek D E. A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-Matrices. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, **39**:2469～2471

刘玉忠 东北大学信息科学与工程学院博士生.研究方向为开关系统、非线性系统与混杂控制系统.

赵 军 东北大学信息科学与工程学院教授,博士生导师.现为中国自动化学会控制理论委员会委员.主要研究方向为复杂非线性系统结构研究、混杂动态系统、开关系统稳定性研究.