第 28 卷 第 4 期
2002 年 7 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 28, No. 4
July, 2002

短文

利用小控制律使非游荡点成为稳定周期点[1)]

杨晓松
(重庆邮电学院非线性系统研究所 重庆 400065)
(E-mail: yangxs@cqupt.edu.cn)

摘 要 讨论了混沌控制理论中的一个重要问题,即利用小控制律使得混沌系统产生新的稳定周期解的可能性,该周期解不一定是未控制系统的不稳定周期解.同流行的看法相悖,证明了小控制律可以使系统的非游荡点(该点不一定是周期点)成为局部渐进稳定的周期解.

关键词 混沌系统,非游荡点,小控制律
中图分类号 TP13

MAKE A NON-WANDERING POINT PERIODIC AND STABLE BY SMALL CONTROL LAW

YANG Xiao-Song
(*Institute for Nonlinear Systems, Chongqing University of Posts and Telecomm, Chongqing* 400065)
(E-mail: yangxs@cqupt.edu.cn)

Abstract In this paper an important problem in chaos control theory, that is, the possibility of generating a new stable periodic solution by small control law for a dynamical system is discussed. It is proved that a solution with an initial point being non-wandering can become asymptotically stable by small control law. This shows that the popular opinion that small control law is not able to create a new periodic point is untrue.

Key words Chaotic systems, non-wandering point, small control law

1 引言

迄今为止,人们对于混沌系统控制的讨论大多限于平衡点和周期点[1],即讨论的控制目标轨迹基本上是不稳定平衡点(即不动点)或不稳定周期点,换句话说,就是对不稳定平衡点或不稳定周期点实施镇定.就其方法而言,混沌系统的镇定研究基本上是按如下步骤进行

1) 重庆市科委应用基础研究基金(006185)资助
收稿日期 2000-03-28 收修改稿日期 2001-02-26

的:首先找出(或假定找出)不稳定平衡点或不稳定周期点,然后在该点的邻域上设计一个小控制律,使得该点在设计的控制律作用下成为稳定的平衡点或稳定周期点.

然而,对于一个实际的物理系统,由于不稳定平衡点或不稳定周期点对初始条件的敏感依赖性,它们很难被确定,即使该系统可由精确的数学模型描述,其不稳定平衡点或不稳定周期点也不易计算,因此通过对不稳定平衡点或不稳定周期点进行控制在一定程度上就失去了先决条件.有鉴于此,自然就提出下列问题.

对于系统相空间中那些虽非平衡点或周期点但却有一定回归性质的点,如非游荡点或链回归点,是否存在一个小的反馈控制律,使得该点在此控制律作用下成为一个(局部)稳定的周期点.

若答案是肯定的,则意味着混沌控制又产生一新方法的可能性.

本文的目的就是试图回答这个问题,为此我们将就常微分方程描述的自治系统的情形加以讨论.

2 主要结论

本节主要证明上述问题的答案是肯定的.首先回顾一下动力系统理论中的一些相关概念.考虑如下系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n$,$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$至少一阶连续可微.设 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$表示系统(1)的以点 $\boldsymbol{x}$ 为初始条件的解或轨道.

定义 1[2]. 若点 $\boldsymbol{x}\in R^n$ 是系统(1)的一个非游荡点,如果它满足以下条件

对 $\boldsymbol{x}\in R^n$ 的任意领域 A,总存在一个 $T>0$,使得

$$\boldsymbol{\varphi}(A,T) \cap A \neq \varnothing,$$

这里$\varnothing$表示空集.

为了下面的讨论,需要著名的封闭引理[3],下面的结果是我国学者对封闭引理的一个改进,正好符合本文的需要.

引理 1[4]. 设 M^n 是一个 n 维 C^2 流形,$n>1$,V 是 M^n 上的一个 C^1 向量场,$\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 生成的流.设 $\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的一个非游荡点.那么对 M^n 中任意给定的 $\boldsymbol{p}$ 点的一个紧致邻域 U 及任意 $\varepsilon\in(0,1]$,总存在一个 C^1 向量场 $\overline{V}$,满足 $|V-\overline{V}|<\varepsilon$,并且使得 $\boldsymbol{p}$ 是 M^n 上由 $\overline{V}$ 生成的流 $\overline{\boldsymbol{\varphi}}$ 的一个周期点.这里定义的范数(模)"$|\ |$"是通常的 C^1 范数.

注. 原文只假设 $\boldsymbol{p}$ 是 Poisson 稳定点,但当 $\boldsymbol{p}$ 是非游荡点时结论仍然成立(具体可参考原文末的注释).

定理 1. 假定 $\boldsymbol{p}\in M\subset R^n$ 是式(1)的一个非游荡点,其中 M 是式(1)的一个紧致不变集.对任意 $\varepsilon>0$ 总存在一个小的反馈控制律 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}(t))$满足

$$\| \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}(t)) \| < \varepsilon,$$

并且控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

的以 $\boldsymbol{p}$ 为初始条件的轨道 $\boldsymbol{\varphi}_u(p,t)$是稳定周期解.这里 $\|\ \|$ 表示连续向量函数欧氏长度(绝对值)的上确界.

证明. 利用封闭引理容易看出,对于 $\varepsilon/2$,存在一个微小反馈控制 $\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x})$(或一个小扰动)满足

$$\| u_1(x) \| < \varepsilon/2,$$

使得 p 是系统

$$\dot{x} = f(x) + u_1(x) \tag{3}$$

的一个周期点,即 $\varphi_{u_1}(p,t)$是一个周期解. 设其周期为 ω, 由于轨道 $\varphi_{u_1}(p,t)$是一个紧致集合,所以存在一个常数 $c>0$,满足下面的不等式

$$X_x^{\mathrm{T}} Dg(x) X_x \leqslant c X_x^{\mathrm{T}} X_x \tag{4}$$

其中 $g(x)=f(x)+u_1(x)$, $x\in\varphi_{u_1}(p,t)$, $X_x\in V_x=\{X\in R^n;\ X^{\mathrm{T}}\cdot g(x)=0\}$.

根据动力系统理论知[2],现在可以选取轨道 $\varphi_{u_1}(p,t)$的一个管状邻域

$$\mathrm{Tub}(\mu) = \{x \in R^n,\ \rho(x,\varphi_{u_1}(p,t)) < \mu\},$$

这里 ρ 表示 x 到轨道 $\varphi_{u_1}(p,t)$的距离. 显然,当 η 足够小的话,$\mathrm{Tub}(\mu)$同胚于直积流形 $D^{n-1}\times\varphi_{u_1}(p,t)$,其中 D^{n-1}是 $n-1$ 维单位球. 进一步可以看出,$\mathrm{Tub}(\mu)$具有一个自然的纤维丛结构,使得对于每一个点 $y\in\varphi_{u_1}(p,t)$,其上的纤维 D_y 是一个充分小并且同 $f(y)$垂直的 $n-1$ 维小球(直观地看,D_y 无非就是以点 $y\in\varphi_{u_1}(p,t)$为中心并且同 $f(x)$垂直的 $n-1$ 维小球). 为讨论方便,命 $\phi(\theta)=\varphi_{u_1}(p,\theta)$, $0\leqslant\theta\leqslant\omega$. 由简单的微分拓扑知识知道[5],对于 $\mathrm{Tub}(\mu)$存在一移动标准正交坐标系$(e_1(\theta),e_2(\theta),\cdots,e_n(\theta))$(其中 $e_1(\theta)$是曲线 $\phi(\theta)$在 θ 的单位切向量),该坐标系关于 θ 是连续的,使得每一点 $x\in\mathrm{Tub}(\mu)$都可以表示为

$$x = \phi(\theta) + Z(\theta)y, \quad y = (y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

显然当 $\|y\|$ 充分小时,$Z(\theta)y\in D_{\phi(\theta)}$,这里 $Z(\theta)=(e_2(\theta),\cdots,e_n(\theta))$. 于是在这种局部的坐标系下我们可以在 $\mathrm{Tub}(\mu)$上定义一个控制律(或一个向量场)$u_2(x)$如下

$$u_2(x) = u_2(\phi(\theta) + Z(\theta)y) = -\beta Z(\theta)y \tag{6}$$

其中 $\beta>c$ 是一个待定常数,而 c 如式(4)所定义.

进一步,根据微分拓扑知识知[5],可以取一个满足不等式 $A(x)\leqslant 1$ 并且具有下面性质的非负可微函数 $A(x)$

$$A(x) = 0,\ \text{当}\ x \notin \mathrm{Tub}(\mu),$$
$$A(x) = 1,\ x = \phi(\theta) + Z(\theta)y \in \mathrm{Tub}(\mu)\ \text{并且}\ \|y\| \leqslant \mu/2.$$

现在考虑如下向量场

$$u_3(x) = A(x)u_2(x),$$

易见,当 $\mu<\varepsilon/2\beta$ 时,$\|u_3(x)\|<\varepsilon/2$.

最后,定义如下控制律

$$u(x) = u_1(x) + u_3(x),$$

显然有 $\|u(x)\|<\varepsilon$. 关于在该控制律下 $\varphi_u(p,t)$ 是系统(2)的渐进稳定周期解的证明,不难利用周期解的特征乘数理论完成,或仿照文献[6]的有关轨道稳定性的讨论. 为方便读者,我们给出一个简单证明.

易见,在坐标系(5)下方程(3)变成(具体推导请参考文献[7]第 VI 章)

$$\begin{cases}\dot{\theta} = 1 + g_1(\theta,y) \\ \dot{y} = Z^{\mathrm{T}}(\theta)\left[-\dfrac{\mathrm{d}Z(\theta)}{\mathrm{d}\theta} + \dfrac{\partial g(\phi(\theta))}{\partial\theta}Z(\theta)\right]y + g_2(\theta,y)\end{cases} \tag{7}$$

其中 $g(x)=f(x)+u_1(x)$,$g_1(\theta,y)$,$g_2(\theta,y)$相对 $y\to 0$ 来说是高阶无穷小. 根据 $u_3(x)$的构造知,当系统(3)加上 $u_3(x)$时系统(7)中第二个方程就变成

$$\dot{\boldsymbol{y}} = Z^{\mathrm{T}}(\theta)\left[-\frac{\mathrm{d}Z(\theta)}{\mathrm{d}\theta} + \frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\phi}(\theta))}{\partial \theta}Z(\theta)\right]\boldsymbol{y} - \beta \boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}_2(\theta, \boldsymbol{y}) \tag{8}$$

考虑 Liyapunov 函数 $V(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$，沿着方程(8)求导得

$$\dot{V}(\boldsymbol{y}) = 2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}Z^{\mathrm{T}}(\theta)\left[-\frac{\mathrm{d}Z(\theta)}{\mathrm{d}\theta} + \frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\phi}(\theta))}{\partial \theta}Z(\theta)\right]\boldsymbol{y} - 2\beta \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_2(\theta, \boldsymbol{y}),$$

考虑到不等式(4)以及 $Z(\theta)\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{e}_1(\theta)$ 正交，便可以得到

$$\dot{V}(\boldsymbol{y}) \leqslant 2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}Z^{\mathrm{T}}(\theta)\left(-\frac{\mathrm{d}Z(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\boldsymbol{y} + 2c\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}Z^{\mathrm{T}}(\theta)Z(\theta)\boldsymbol{y}\right) - 2\beta \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + 2o(\boldsymbol{y}^2) =$$

$$2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}Z^{\mathrm{T}}(\theta)\left(-\frac{\mathrm{d}Z(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\boldsymbol{y} + 2c\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} - 2\beta \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\right) + 2o(\boldsymbol{y}^2).$$

由于 $Z(\theta)$ 的各个分量都是定义在闭区间上的连续函数，故存在 $d>0$，使得

$$2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}Z^{\mathrm{T}}(\theta)\left(-\frac{\mathrm{d}Z(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\boldsymbol{y}\right) \leqslant 2d\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}.$$

于是可取 $\beta > d+c$，此时容易看出，当 $\|\boldsymbol{y}\|$ 充分小时 $\dot{V}(\boldsymbol{y}) < 0$. 根据稳定性的 Liyapunov 理论，可以得到当 $t \to \infty$ 时，$\boldsymbol{y} \to 0$，于是 $\boldsymbol{\varphi}_u(\boldsymbol{p}, t)$ 的稳定性得证.

注. $\boldsymbol{u}_3(\boldsymbol{x})$ 的形式显然与具体坐标系的选择有关；此外，这里 $\boldsymbol{u}_3(\boldsymbol{x})$ 的构造不一定具有实用意义. 需要强调的是，该定理的意义在于的确存在一个小控制律使得动力系统的非游荡点变为稳定周期点.

实际上还可以证明更好的结论，由于其证明涉及到更为复杂的数学工具，我们将在专门的数学论文中讨论.

3 结束语

通过上面的讨论可知，对于系统相空间中那些虽非平衡点或周期点但却有一定回归性质的点，如非游荡点，可以存在一个小的反馈控制律，使得该点在此控制律作用下成为一个(局部)稳定的周期点. 此外，本文的讨论还揭示了混沌控制又一新方法的可能性. 这里要说明的是，本文只是从理论上证明了利用小控制律使非游荡点变为稳定周期点的可能性，如何设计工程上实用的控制律则有待于进一步的工作.

参 考 文 献

1 Ott E. Chaos in dynamical systems. New York: Cambridge University Press, 1993. 145～148

2 Palis J, De Melo Jr W. Geometry Theory of Dynamical Systems: An Introduction. New York: Springer-Verlag, 1981. 70～89

3 Pugh C. The closing lemma. *American Journal of Mathematics*, 1967, **89**(6): 856～1009

4 麦结华. C^1 封闭引理的一个较简单的证明. 中国科学(A), 1986, **5**: 458～466

5 张筑生. 微分拓扑讲义. 北京：北京大学出版社, 1996. 27～37

6 Yang Xiao-Song. On Poincaré stability. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 1999, **55**: 83～92

7 Hale J K. 常微分方程. 北京：人民教育出版社，(侯定丕译)，1980

杨晓松 1991 年在华中师范大学获硕士学位，1998 年在中国科学技术大学获博士学位，现任重庆邮电学院非线性系统研究所所长，教授，西南师范大学兼职教授. 研究兴趣为动力系统理论、非线性控制系统、混沌及其应用、几何与拓扑.