

# 严格反馈随机非线性系统 风险灵敏度输出反馈控制器设计<sup>1)</sup>

刘允刚 潘子刚 施颂椒 戴立言

(上海交通大学自动化系 上海 200030)

(E-mail: lygfr@263.net)

**摘要** 研究了一类严格反馈随机非线性系统的输出反馈设计问题. 在无限时区风险灵敏度指标下, 应用积分反推(integrator backstepping)技术, 设计了控制器. 所设计的控制器能够保障对任意风险灵敏度系数具有任意小的指标, 并且闭环系统为概率意义下有界的. 特别地, 所设计的控制器还能保证控制器的平衡条件. 仿真例子验证了理论结果的正确性.

**关键词** 积分反推, 严格反馈随机非线性系统, 风险灵敏度控制, 概率意义下有界  
**中图分类号** TP273

## OUTPUT FEEDBACK RISK-SENSITIVE CONTROL DESIGN FOR STRICT-FEEDBACK STOCHASTIC NONLINEAR SYSTEMS

LIU Yun-Gang PAN Zi-Gang SHI Song-Jiao DAI Li-Yan

(Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)

(E-mail: lygfr@263.net)

**Abstract** In this paper, we study the problem of output-feedback control design for a class of strict feedback stochastic nonlinear systems. Under an infinite-horizon risk-sensitive cost criterion, the controller designed can guarantee an arbitrary small long-term average cost for arbitrary risk-sensitivity parameter and achieve boundedness in probability for the closed-loop system using the integrator backstepping methodology. Especially, the controller preserves the equilibrium of the nonlinear system. An example is included to illustrate the theoretical findings.

**Key words** Integrator backstepping, strict-feedback stochastic nonlinear systems, risk-sensitive control, bounded in probability

## 1 引言

非线性系统的全局稳定控制器设计是当前非常重要的研究课题. 自著名的反馈线性化

1) 国家自然科学基金(60004005)及教育部(2000)优秀青年教师资助计划项目资助

条件<sup>[1]</sup>获得以来,积分反推方法的引入是另一重大突破性进展<sup>[2]</sup>.对于严格反馈非线性系统,或者可以反馈等价成严格反馈形式的非线性系统,该方法提供了一种构造全局稳定控制器的通用工具.20世纪90年代初以来,严格反馈系统的控制研究已经取得了一系列结果,文[3]中列举了这方面的参考文献,近期最新结果包括文[4~6]等.

微分对策问题和风险灵敏度随机控制问题有着密切的关系<sup>[7~10]</sup>.如果噪声消逝,那么风险灵敏度随机控制问题的大偏差极限便等价于一个确定性微分对策问题.这些联系的发现在近些年促进并加速了风险灵敏度随机控制问题的研究.

近年来,严格反馈随机非线性系统控制器设计问题得到了集中研究<sup>[11~13]</sup>,其中文[11]和[13]的主要目标是设计渐近稳定控制器,它们分别考虑了完全状态反馈<sup>[11]</sup>和输出反馈设计<sup>[13]</sup>,在文中均假设扰动向量场在原点处消逝.文[12]设计的控制器则可以保证对于任意给定的风险灵敏度参数,系统的长时区风险灵敏度指标不大于任意期望的上界,且闭环系统为概率意义下有界,当扰动向量场在原点处消逝时,系统为概率意义下渐近稳定,但作者只考虑了完全状态反馈情况.

与文[12]不同,本文研究的是输出反馈控制器,用以保证长时区风险灵敏度指标不大于期望界限.本文的结论指出,对任意风险灵敏度系数,可以设计一个输出反馈控制器使闭环系统达到任意小的灵敏度指标,并且系统是概率意义下有界稳定的.特别地,该控制器还保持了原系统的平衡条件.

## 2 问题描述

考虑如下严格反馈随机非线性系统<sup>[13]</sup>

$$dx_1 = x_2 dt + f_1(y) dt + \varphi_1(y)^T dw \quad (1a)$$

$$dx_2 = x_3 dt + f_2(y) dt + \varphi_2(y)^T dw \quad (1b)$$

⋮

$$dx_{n-1} = x_n dt + f_{n-1}(y) dt + \varphi_{n-1}(y)^T dw \quad (1c)$$

$$dx_n = u dt + f_n(y) dt + \varphi_n(y)^T dw \quad (1d)$$

$$y = x_1 \quad (1e)$$

这里  $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in R^n$  为状态向量空间,并且具有固定的初始值  $x(0)$ ;  $u \in R$  为单变量控制输入;  $w \in R^s$  为定义在概率空间  $(\Omega, F, P)$  之上的相互独立的标准向量值布朗运动,其中  $\Omega$  为样本空间,  $F$  为参考簇,  $P$  为概率测度;  $y$  为输出测量值.

下面是本文研究的基本假设:

- 1) 假设函数  $f_i(y)$  及  $\varphi_i(y)$ ,  $1 \leq i \leq n$  为光滑的;
- 2) 假设  $f_i(y)$ ,  $1 \leq i \leq n$  在原点处消逝,此假设可确保原点为未受扰动系统的平衡点.

控制器设计目标是使下面的风险灵敏度指标函数具有有限长时区均值

$$J_\theta(u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \frac{2}{\theta} \ln \left\{ E \left\{ \exp \left( \frac{\theta}{2} \int_0^T q(y(t)) y^4(t) dt \right) \right\} \right\} \quad (2)$$

即风险灵敏度指标不大于给定常数  $R_i > 0$ , 其中  $q(y) \geq 0$ ,  $\forall y \in R$  是任意给定的函数,  $\theta$  是



风险灵敏度参数.

**注 1.** 文[12]中选取的加权函数为  $y^2$  (或  $q(y)y^2$ ), 由于随机问题中要处理其二次导数项, 增加了问题的复杂性. 而本文中选取加权函数  $q(y(t))y^4(t)$  作为风险灵敏度指标函数, 使控制器的设计过程更为简便. 同时本文的方法也可用来研究文[12]的风险灵敏度指标控制问题, 并可保证指标的长时区均值不大于  $R_l$ . 因为由不等式  $q(y)y^2 \leq \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{q^2(y)y^4}{2\epsilon^2}$  (此处  $\epsilon$  为给定的任意小的正常数) 右第一项是指标的长时区均值  $\frac{\epsilon^2}{2}$ , 第二项可按照本文的方法处理. 在设计中只需保证指标加权函数  $\frac{q^2(y)y^4}{2\epsilon^2}$  的长时区均值不大于  $R_l - \epsilon^2/2$ , 即可得到原设计目标.

按照  $\theta$  的取值情况, 风险灵敏度指标可以分为三类: 如果  $\theta$  为正数, 优化问题导致风险回避 (risk-averse) 控制设计问题; 当  $\theta \rightarrow 0$  时指标函数收敛到一标准积分形式, 又称之为零风险 (risk-neutral) 问题;  $\theta$  为负数的情况称之为风险搜寻 (risk-seeking) 问题.  $\theta$  越大, 控制器的保守程度越大, 当  $\theta \rightarrow \infty$  并且噪声强度衰减到零, 最优化问题收敛到一个微分对策问题. 本文仅研究  $\theta > 0$  的情况,  $\theta < 0$  的情况可以类似研究.

**定义 1**<sup>[12]</sup>. 对于给定的风险灵敏度参数  $\theta > 0$ , 控制器称之为确保风险灵敏度指标  $R_l (R_l \geq 0)$ , 如果

$$J_\theta(u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \frac{2}{\theta} \ln \left\{ E \left\{ \exp \left( \frac{\theta}{2} \int_0^T (q(y(t))y^4 + l(y_{[0,t]})) dt \right) \right\} \right\} \leq R_l \quad (3)$$

式中  $l(y_{[0,t]})$  为一非负函数, 由设计需要确定.

**定义 2**<sup>[12]</sup>. 如果  $\limsup_{c \rightarrow \infty} P \{ |\mathbf{x}(t)| > c \} = 0$  成立, 则随机微分方程(1)的解随机过程  $\{\mathbf{x}(t), t \geq 0\}$  称之为概率意义下有界的.

将系统(1)写成如下简洁形式  $d\mathbf{x} = f(\mathbf{x})dt + g(\mathbf{x})udt + h(\mathbf{x})dw$ , 并考虑其无限时区风险灵敏度指标函数  $J_\theta(u)$ . 令  $\rho(t, \mathbf{x}) = \inf_u E \left\{ \exp \left\{ \frac{\theta}{2} \int_t^T \bar{Q}(\mathbf{x}) d\tau \right\} \right\}$ , 其中  $\bar{Q}(\mathbf{x}) = q(y(t))y^4 + l(y_{[0,t]})$ . 应用对数变换,  $W(t, \mathbf{x}) = \frac{2}{\theta} \ln \rho(t, \mathbf{x})$ , 函数  $W(t, \mathbf{x})$  满足如下二阶偏微分方程

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2} Tr \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{x}^2} h h^\top \right) + \frac{\theta}{4} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}} h h^\top \left( \frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top + \min_{u \in R} \left[ \frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u) + \bar{Q}(\mathbf{x}) \right] = 0.$$

设  $W(T, t, \mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) + (T - t)R_l$ , 且  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{W(T, t, \mathbf{x})}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\partial W(T, t, \mathbf{x})}{\partial T} = R_l$ ,

则  $\frac{1}{2} Tr \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} h h^\top \right) + \frac{\theta}{4} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} h h^\top \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top + \min_{u \in R} \left[ \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u) + \bar{Q}(\mathbf{x}) \right] = R_l$ .

由于我们更感兴趣的是设计次优控制策略, 而不是最优控制策略, 因此放宽上面的等式为不等式, 并且寻找值函数  $V$  和控制律, 满足如下的不等式

$$\frac{1}{2} Tr \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} h h^\top \right) + \frac{\theta}{4} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} h h^\top \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u) + \bar{Q}(\mathbf{x}) \leq R_l.$$

如文[12], 设计如下形式的次优风险灵敏度控制律

$$\dot{\vartheta} = \alpha(\vartheta, y), \quad u = \mu(\vartheta, y) \quad (4)$$

及正定的、径向无界的值函数  $V(x, \vartheta)$ , 使得 HJB 不等式

$$\left[ \frac{\partial V}{\partial x} \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] \begin{bmatrix} f + g\mu \\ \alpha \end{bmatrix} + \frac{\theta}{4} \frac{\partial V}{\partial x} h h^T \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + \frac{1}{2} \text{Tr} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} h h^T \right) + Q(x, \theta) \leq R_l \quad (5)$$

成立, 其中  $\alpha$  和  $\mu$  为  $C^1$  的函数, 并且  $Q(x, \theta) = q(y)y^4 + l(y_{[0,t]}) = q(y)y^4 + \check{l}(x, \theta)$ .

下面定理是文[12]定理 5 和 6 的直接推论.

**定理 1.** 考虑随机非线性系统(1)及其风险灵敏度指标函数(2). 对任意给定的  $\theta > 0$  和  $R_l \geq 0$ , 如果存在  $C^2$ 、正定、径向无界值函数  $V(x)$  和控制律(4), 对  $C^1$  的函数  $\sigma(x, \theta)$ ,  $dV \leq \sigma dw - \frac{\theta}{4} \sigma \sigma^T dt - Qdt + R_l dt$  成立, 则

1) 闭环系统几乎处处存在唯一解;

2) 风险灵敏度指标(2)有上界  $R_l$ .

进一步, 如果存在正常数  $c_1, c_2$ , 使得  $V(x, \theta) \leq c_1 Q(x, \theta) + c_2, \forall (x, \theta)$  成立, 则闭环系统为概率意义下有界的.

### 3 主要结果

在本节中, 应用积分反推方法, 给出了此类严格反馈系统风险灵敏度指标次优动态输出反馈控制器的设计过程.

#### 3.1 状态观测器设计

由于系统(1)的状态变量不可测, 所以设计如下的基于输出状态观测器<sup>[13]</sup>

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + k_1(y - \hat{x}_1) + f_1(y) \quad (6a)$$

$$\vdots$$

$$\dot{\hat{x}}_n = \hat{x}_{n+1} + k_n(y - \hat{x}_1) + f_n(y) \quad (6b)$$

$$\hat{x}_{n+1} = u \quad (6c)$$

选择参数  $k_1, \dots, k_n$  使得多项式  $s^n + k_1 s^{n-1} + \dots + k_n$  的所有根均具有负实部.

令  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T, \hat{x} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n]^T$ . 状态估计误差记为  $\tilde{x} = x - \hat{x}$ , 则

$$d\tilde{x} = \begin{bmatrix} -k_1 & & & \\ \vdots & I & & \\ -k_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} dt + \varphi(y)^T dw =: A\tilde{x} dt + \varphi(y)^T dw,$$

其中  $\varphi(y) = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ . 由于矩阵  $A$  为严格稳定的, 必存在一正定矩阵  $P > 0$ , 满足 Lyapunov 方程  $A^T P + P A = -I$ . 那么带有观测器的完整系统可重写为

$$d\tilde{x} = A\tilde{x} dt + \varphi(y)^T dw \quad (7a)$$

$$dy = (\hat{x}_2 + \tilde{x}_2) dt + f_1(y) dt + \varphi_1^T dw \quad (7b)$$

$$d\hat{x}_1 = (\hat{x}_2 + k_1(y - \hat{x}_1) + f_1(y)) dt \quad (7c)$$

$$\vdots$$

$$d\hat{x}_{n-1} = (\hat{x}_n + k_{n-1}(y - \hat{x}_1) + f_{n-1}(y)) dt \quad (7d)$$

$$d\hat{x}_n = (u + k_n(y - \hat{x}_1) + f_n(y)) dt \quad (7e)$$

由于系统(7)具有下三角结构, 所以可以应用积分反推技术设计输出反馈控制器.



### 3.2 输出反馈风险灵敏度控制设计

当无扰动输入时,动态  $\bar{x}$  为全局渐近稳定的,在积分反推设计时可以将其作为零动态处理.引入状态变换向量  $z$ (原状态向量为  $(y, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ )

$$\begin{aligned} z_1 &= y, \\ z_i &= \hat{x}_i - \alpha_{i-1}(\bar{x}_{i-1}, y), \quad 2 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

其中  $\alpha_i (1 \leq i \leq n-1)$  为待定的光滑虚拟控制律.另记  $\bar{x}_i = [\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_i] (1 \leq i \leq n)$ ,  $\bar{z}_i = [z_1, \dots, z_i] (1 \leq i \leq n)$ .由于本文中虚拟控制律  $\alpha_i(\bar{x}_i, y) (1 \leq i \leq n-1)$  及控制律  $u = \alpha_n(\bar{x}_n, y)$  的选取还需满足平衡条件  $\alpha_i(0, 0) = 0 (1 \leq i \leq n)$ , 在下面的设计过程须特别注意平衡条件的处理.按照转换状态向量  $z$ , 系统(7)有如下的等价表达

$$\begin{aligned} d\bar{x} &= A\bar{x}dt + \varphi^T(y)dw, \\ dz_1 &= (z_2 + \alpha_1(z_1) + \tilde{x}_2)dt + F_1(y)dt + \psi_1dw, \\ &\vdots \\ dz_i &= [z_{i+1} + \alpha_i(\bar{x}_i, y) + F_i(\bar{x}_i, y)]dt - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} \tilde{x}_2 dt + \psi_i(\bar{x}_i, y)dw, \\ &\vdots \\ dz_n &= [u + F_n(\bar{x}_n, y)]dt - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y} \tilde{x}_2 dt + \psi_n(\bar{x}_n, y)dw, \end{aligned}$$

其中  $F_1 = f_1(y)$ ,  $\psi_1 = \varphi_1^T$ ,  $\psi_i = -\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} \varphi_1^T$ ,

$$\begin{aligned} F_i &= (k_i(y - \hat{x}_1) + f_i(y)) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{x}_j} (z_{j+1} + \alpha_j + k_j(y - \hat{x}_1) + f_j(y)) - \\ &\quad \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} (z_2 + \alpha_1 + f_1(y)) - \frac{1}{2} Tr \left( \frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial y^2} \varphi_1^T(y) \varphi_1(y) \right), \quad 2 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

定义值函数  $V_n = \phi(\bar{x}^T P \bar{x}) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n z_i^4$ , 其中  $\phi(\xi) = (c + \xi)^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{2}{3}}$ ,  $c > 0$  为待定常数.应用 Ito's 公式,可以得到

$$\begin{aligned} dV_n &= -\frac{\partial \phi}{\partial \xi} |\bar{x}|^2 dt + \sigma_n dw + \frac{1}{2} Tr \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} \varphi^T \varphi \right] dt - \frac{\theta}{4} \sigma_n \sigma_n^T dt + \frac{\theta}{4} \sigma_n \sigma_n^T dt + \\ &\quad \sum_{i=1}^n \beta_i z_i^4 dt - \sum_{i=1}^n \beta_i z_i^4 dt + \sum_{j=1}^n \frac{3z_j^2}{2} Tr[\psi_j \psi_j^T] dt + \sum_{j=1}^{n-1} z_j^3 (z_{j+1} + \alpha_j + F_j) dt - \\ &\quad \sum_{j=1}^n z_j^3 \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial y} \tilde{x}_2 dt + z_n^3 (u + F_n) dt. \end{aligned}$$

同文[12],上式中做了加、减项  $\frac{\theta}{4} \sigma_n \sigma_n^T dt$  和  $\sum_{i=1}^n \beta_i z_i^4 dt$  的处理,  $\beta_1, \dots, \beta_n$  为待定参数.

**引理**(Young's 不等式)<sup>[13]</sup>. 对任意向量  $x, y \in R^n$ , 有  $x^T y \leq \frac{\epsilon^p}{p} |x|^p + \frac{1}{q\epsilon^q} |y|^q$  成立, 其中  $\epsilon > 0$ , 且  $p > 1$  及  $q > 1$  满足  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

记矩阵  $P$  的最大特征值和最小特征值分别为  $\lambda_{\max}(P)$  和  $\lambda_{\min}(P)$ . 定义函数

$$E_{c,P}(\bar{x}) = |\bar{x}|^{\frac{4}{3}} \lambda_{\max}^{-\frac{1}{3}}(P) - \frac{1}{\sqrt[3]{c + \bar{x}^T P \bar{x}}} |\bar{x}|^2.$$

易于证明函数  $\Xi_{c,P}(\tilde{x})$  最大值存在, 并记  $M(c,P) := \max_{\tilde{x}} \Xi_{c,P}(\tilde{x}) < \infty$  为正数. 另外,

$$\begin{aligned} \sigma_n \sigma_n^T &= \left( 2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \tilde{x}^T P \varphi^T + \sum_{j=1}^n z_j^3 \psi_j \right) \left( 2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \tilde{x}^T P \varphi^T + \sum_{j=1}^n z_j^3 \psi_j \right)^T \leq \\ & \frac{16 \tilde{x}^T P \varphi^T(0) \varphi(0) P \tilde{x}}{9(c + \tilde{x}^T P \tilde{x})^{\frac{2}{3}}} + \frac{32 |\tilde{x}|^2 |P|^2 |\varphi(0)| |\varphi(y)| y}{9(c + \tilde{x}^T P \tilde{x})^{\frac{2}{3}}} + \frac{16 |\tilde{x}|^2 |P|^2 |\varphi^T(y) \varphi(y)| y^2}{9(c + \tilde{x}^T P \tilde{x})^{\frac{2}{3}}} + \\ & \frac{8 \tilde{x}^T}{3 \sqrt[3]{c + \tilde{x}^T P \tilde{x}}} P \varphi^T(y) \sum_{j=1}^n \psi_j^T z_j^3 + \left( \sum_{j=1}^n z_j^3 \psi_j \right) \left( \sum_{j=1}^n z_j^3 \psi_j \right)^T \leq \\ & \frac{16 |P \varphi^T(0) \varphi(0) P| |\tilde{x}|^2}{9 \sqrt[3]{c} \sqrt[3]{c + \tilde{x}^T P \tilde{x}}} + \frac{32 |P|^2}{9} \left[ \frac{|\varphi(0)|^4 |\varphi(y)|^4 y^4}{4 \epsilon_{n1}^4} + \frac{3 \epsilon_{n1}^{\frac{4}{3}} |\tilde{x}|^{\frac{8}{3}}}{4(c + \tilde{x}^T P \tilde{x})^{\frac{8}{9}}} \right] + \\ & \frac{16 |P|^2}{9} \left[ \frac{|\varphi^T(y) \varphi(y)|^2 y^4}{2 \epsilon_{n2}^2} + \frac{\epsilon_{n2}^2 |\tilde{x}|^4}{2(c + \tilde{x}^T P \tilde{x})^{\frac{4}{3}}} \right] + 4 \left( \frac{2 \epsilon_{n3}^2 |\tilde{x}|^2}{9(c + \tilde{x}^T P \tilde{x})^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{2 \epsilon_{n3}^2} \left( \sum_{j=1}^n \psi_j z_j^3 \right) \cdot \right. \\ & \left. \varphi(y) P P \varphi^T(y) \left( \sum_{j=1}^n \psi_j z_j^3 \right) \right) + \left( \sum_{j=1}^n \psi_j z_j^3 \right) \left( \sum_{j=1}^n \psi_j z_j^3 \right)^T \leq \\ & \frac{16 |P \varphi^T(0) \varphi(0) P| |\tilde{x}|^2}{9 \sqrt[3]{c} \sqrt[3]{c + \tilde{x}^T P \tilde{x}}} + \frac{8 |P|^2 |\varphi(0)|^4 |\varphi(y)|^4 y^4}{9 \epsilon_{n1}^4} + \frac{8 \epsilon_{n1}^{\frac{4}{3}} |P|^2 |\tilde{x}|^2}{3 \sqrt[3]{c^2} \lambda_{\min}^{\frac{1}{3}}(P) (c + \tilde{x}^T P \tilde{x})^{\frac{1}{3}}} + \\ & \frac{8 |P|^2 |\varphi(y)|^4 y^4}{9 \epsilon_{n2}^2} + \frac{8 \epsilon_{n2}^2 |P|^2 |\tilde{x}|^2}{9 \lambda_{\min}(P) (c + \tilde{x}^T P \tilde{x})^{\frac{1}{3}}} + \frac{8 \epsilon_{n3}^2 |\tilde{x}|^2}{9 \sqrt[3]{c^2} \lambda(c + \tilde{x}^T P \tilde{x})^{\frac{1}{3}}} + \\ & \frac{2}{\epsilon_{n3}^2} \sum_{i=1}^n \psi_i z_i^3 \varphi(y) P P \varphi^T(y) \left( 2 \sum_{j=1}^{i-1} \psi_j^T z_j^3 + \psi_i^T z_i^3 \right) + \sum_{i=1}^n \psi_i z_i^3 \left( 2 \sum_{j=1}^{i-1} \psi_j^T z_j^3 + \psi_i^T z_i^3 \right), \end{aligned}$$

其中  $\varphi(y)$  满足  $\varphi(y) = \varphi(0) + y \varphi'(y)$ , 并且  $\epsilon_{n1}, \epsilon_{n2}, \epsilon_{n3}$  为待定正常数. 应用 Young's 不等式并经过一系列的运算可以得到如下结果

$$\begin{aligned} dV_n &\leq \sigma_n dw - \frac{\theta}{4} \sigma_n \sigma_n^T dt - \sum_{i=1}^n \beta_i z_i^4 dt - q(y) y^4 dt - \frac{2 |\tilde{x}|^2}{3 \sqrt[3]{c + \tilde{x}^T P \tilde{x}}} dt + q(y) y^4 dt + \sum_{i=1}^n \beta_i z_i^4 dt + \\ & \frac{2}{3 \sqrt[3]{c}} \left( Tr(\varphi(0) P \varphi^T(0)) + \frac{Tr^4(\varphi P \varphi^T(0)) y^4}{2 \epsilon_{n5}^4} + \frac{3 \epsilon_{n5}^{\frac{4}{3}}}{2} + \frac{Tr^2(\varphi P \varphi^T) y^4}{2 \epsilon_{n5}^2} + \frac{\epsilon_{n5}^2}{2} \right) dt + \\ & \sum_{j=1}^{n-1} z_j^3 (\alpha_j + F_j) dt + z_n^3 (u + F_n) dt + \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{z_{j+1}^4}{4} + \frac{3}{4} z_j^4 \right) dt + \frac{3}{4} \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{\epsilon_{n7j}^2} z_j^4 |\psi_j|^4 + \epsilon_{n7j}^2 \right) dt + \\ & \frac{z_1^{12}}{4 \epsilon_{n41}^4} dt + \frac{3 \epsilon_{n41}^{\frac{4}{3}}}{4} |\tilde{x}|^{\frac{4}{3}} dt + \sum_{j=2}^n \left[ \frac{z_j^{12}}{4 \epsilon_{n4j}^4} \left| \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial y} \right|^4 + \frac{3 \epsilon_{n4j}^{\frac{4}{3}}}{4} |\tilde{x}|^{\frac{4}{3}} \right] dt + \frac{4 \theta |P \varphi^T(0) \varphi(0) P| |\tilde{x}|^2}{9 \sqrt[3]{c} \sqrt[3]{c + \tilde{x}^T P \tilde{x}}} dt + \\ & \frac{2 \theta |P|^2 |\varphi(0)|^4 |\varphi(y)|^4 y^4}{9 \epsilon_{n1}^4} dt + \frac{2 \theta \epsilon_{n1}^{\frac{4}{3}} |P|^2 |\tilde{x}|^2}{3 \sqrt[3]{c^2} \lambda_{\min}^{\frac{1}{3}}(P) (c + \tilde{x}^T P \tilde{x})^{\frac{1}{3}}} dt + \\ & \frac{2 \theta |P|^2 |\varphi(y)|^4 y^4}{9 \epsilon_{n2}^2} dt + \frac{2 \theta \epsilon_{n2}^2 |P|^2 |\tilde{x}|^2}{9 \lambda_{\min}(P) (c + \tilde{x}^T P \tilde{x})^{\frac{1}{3}}} dt + \frac{2 \theta \epsilon_{n3}^2 |\tilde{x}|^2}{9 \sqrt[3]{c^2} (c + \tilde{x}^T P \tilde{x})^{\frac{1}{3}}} dt + \\ & \frac{\theta}{2 \epsilon_{n3}^2} \sum_{i=1}^n \psi_i z_i^3 \varphi(y) P P \varphi^T(y) \left( 2 \sum_{j=1}^{i-1} \psi_j^T z_j^3 + \psi_i^T z_i^3 \right) dt + \frac{\theta}{4} \sum_{i=1}^n \psi_i z_i^3 \left( 2 \sum_{j=1}^{i-1} \psi_j^T z_j^3 + \psi_i^T z_i^3 \right) dt \quad (8) \end{aligned}$$

其中  $\epsilon_{n41} \sim \epsilon_{n4n}, \epsilon_{n5}, \epsilon_{n71} \sim \epsilon_{n7n}$  为待定正常数.



现在设计虚拟控制律和实际控制律. 选择第一个虚拟控制律  $\alpha_1$ , 用以抵消式(8)右边除第一行外所有以  $y^3$  (或  $z_1^3$ ) 为因子的项

$$\begin{aligned} \alpha_1(y) = & -q(y)y - \beta_1 z_1 - \frac{2}{3\sqrt[3]{c}} \left( \frac{\text{Tr}^4(\varphi P \varphi^T(0))y}{2\epsilon_{n5}^4} + \frac{\text{Tr}^2(\varphi P \varphi^T)y}{2\epsilon_{n5}^2} \right) - F_1 - \\ & \frac{3}{4\epsilon_{n71}^2} z_1 |\psi_1|^4 - \frac{3}{4} z_1 - \frac{z_1^9}{4\epsilon_{n41}^4} - \frac{2\theta|P|^2|\varphi(0)|^4|\varphi|^4 z_1}{9\epsilon_{n1}^4} - \frac{2\theta|P|^2|\varphi|^4 z_1}{9\epsilon_{n2}^2} - \\ & \frac{\theta}{2\epsilon_{n3}^2} \psi_1 \varphi P P \varphi^T \psi_1^T z_1^3 - \frac{\theta}{4} \psi_1 \psi_1^T z_1^3. \end{aligned}$$

对所有  $i(2 \leq i \leq n-1)$  设计下面的虚拟控制律  $\alpha_i$ , 来抵消式(8)右边除第一行外所有以  $z_i^3$  为因子的项

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_i = & -\beta_i z_i - F_i - z_i - \frac{3}{4} \frac{1}{\epsilon_{n7i}^2} z_i |\psi_i|^4 - \frac{z_i^9}{4\epsilon_{n4i}^4} \left| \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} \right|^4 - \\ & \frac{\theta}{2\epsilon_{n3}^2} \psi_i \varphi(y) P P \varphi^T(y) \left( 2 \sum_{j=1}^{i-1} \psi_j^T z_j^3 + \psi_i^T z_i^3 \right) - \frac{\theta}{4} \psi_i \left( 2 \sum_{j=1}^{i-1} \psi_j^T z_j^3 + \psi_i^T z_i^3 \right). \end{aligned}$$

此外, 虚拟控制律的选择还需保证闭环系统在原点处的平衡条件, 为此参照文[12]设计如下的虚拟控制  $\alpha_i$ , 其中  $\alpha_i(\bar{x}_i, y) = \bar{\alpha}_i(\bar{x}_i, y) - \bar{\alpha}_i(\mathbf{0}, 0)$ , 而剩余项  $z_i^3 \bar{\alpha}_i(\mathbf{0}, 0)$  满足  $z_i^3 \bar{\alpha}_i(\mathbf{0}, 0) \leq \frac{z_i^4}{4\epsilon_{n6i}^4} + \frac{3\epsilon_{n6i}^{\frac{4}{3}}}{4} |\bar{\alpha}_i(\mathbf{0}, 0)|^{\frac{4}{3}}$ , 其中  $\epsilon_{n6i}$  为待定正常数.

最后设计如下的控制律  $\bar{u}$ , 它抵消掉式(8)右边除第一行外所有以  $z_n^3$  为因子的项

$$\begin{aligned} \bar{u}(\hat{x}, y) = & -\beta_n z_n - F_n - \frac{3}{4} \frac{1}{\epsilon_{n7n}^2} z_n |\psi_n|^4 - \frac{1}{4} z_n - \frac{z_n^9}{2\epsilon_{n4n}^4} \left| \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y} \right|^4 - \\ & \frac{\theta}{2\epsilon_{n3}^2} \psi_n \varphi(y) P P \varphi^T(y) \left( 2 \sum_{j=1}^{n-1} \psi_j^T z_j^3 + \psi_n^T z_n^3 \right) - \frac{\theta}{4} \psi_n \left( 2 \sum_{j=1}^{n-1} \psi_j^T z_j^3 + \psi_n^T z_n^3 \right). \end{aligned}$$

但是, 该控制律并不能保证闭环系统在原点处的平衡条件, 因此在设计实际控制律时, 还必须满足平衡条件, 即控制器在原点  $\bar{x} = \mathbf{0}, \bar{z}_n = 0$  处消逝, 可以作如下处理

$$u(\bar{x}_n, y) = \bar{u}(\bar{x}_n, y) - \bar{u}(\mathbf{0}, 0) \quad (9)$$

剩余项  $z_n^3 \bar{u}(\mathbf{0}, 0)$  满足  $z_n^3 \bar{u}(\mathbf{0}, 0) \leq \frac{z_n^4}{4\epsilon_{n6n}^4} + \frac{3\epsilon_{n6n}^{\frac{4}{3}}}{4} |\bar{u}(\mathbf{0}, 0)|^{\frac{4}{3}}$ , 其中  $\epsilon_{n6n}$  为待定正常数.

至此, 有  $dV \leq \sigma_n dw - \frac{\theta}{4} \sigma_n \sigma_n^T dt - Q(x, \bar{x}_n) dt + R dt$ , 其中

$$Q(x, \bar{x}_n) = q(y)y^4 + l(x, \bar{x}_n) \quad (10a)$$

$$l(x, \bar{x}_n) = \frac{\delta |\bar{x}|^2}{\sqrt[3]{c} + \bar{x}^T P \bar{x}} + \sum_{i=1}^n \delta_i z_i^4 \quad (10b)$$

$$\begin{aligned} R = & \frac{2|P|}{3\sqrt[3]{c}} \left[ \text{Tr}(\varphi(0) P \varphi^T(0)) + \frac{3\epsilon_{n5}^{\frac{4}{3}}}{2} + \frac{\epsilon_{n5}^2}{2} \right] + \frac{3}{4} \sum_{j=1}^n \epsilon_{n7j}^2 + \\ & \lambda_{\max}^{\frac{1}{3}}(P) \sum_{j=1}^n \left[ \frac{3\epsilon_{n4j}^{\frac{4}{3}}}{4} \right] M(c, P) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{3\epsilon_{n6j}^{\frac{4}{3}} |\bar{\alpha}_j(\mathbf{0})|^{\frac{4}{3}}}{4} + \frac{3\epsilon_{n6n}^{\frac{4}{3}} |\bar{u}(\mathbf{0})|^{\frac{4}{3}}}{4} \quad (10c) \end{aligned}$$

$$\delta = \frac{2}{3} - \lambda_{\max}^{\frac{1}{3}}(P) \sum_{j=1}^n \frac{3\epsilon_{n4j}^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{4\theta|P\varphi^T(0)\varphi(0)P|}{9\sqrt[3]{c}} - \frac{2\theta\epsilon_{n1}^{\frac{4}{3}}|P|^2}{3\sqrt[9]{c^2}\lambda_{\min}^{\frac{1}{3}}(P)} - \frac{2\theta\epsilon_{n2}^2|P|^2}{9\lambda_{\min}(P)} - \frac{2\theta\epsilon_{n2}^2}{3\sqrt[9]{c}} \quad (10d)$$

$$\delta_1 = \beta_1, \quad \delta_i = \beta_i - \frac{1}{4\epsilon_{n6i}^4}, \quad 2 \leq i \leq n \quad (10e)$$

为得到设计目标,需选取  $c$  充分大,  $\epsilon_{n1}, \epsilon_{n2}, \epsilon_{n3}, \epsilon_{n41}, \dots, \epsilon_{n4n}, \epsilon_{n5}, \epsilon_{n62}, \dots, \epsilon_{n6n}, \epsilon_{n71}, \dots, \epsilon_{n7n}$  充分小及  $\beta_i (1 \leq i \leq n)$  充分大,使得

$$\delta > 0, \quad R \leq R_l, \quad \delta_i > 0 (1 \leq i \leq n) \quad (11)$$

由上面的构造过程,可以归纳出下述定理.

**定理 2.** 考虑随机非线性系统(1)及其风险灵敏度指标函数(2),参数  $\theta > 0$  和  $R_l > 0$  为给定常数.设计如式(6)和(9)所示的输出反馈控制器,其中的常数  $c, \beta_1, \dots, \beta_n, \epsilon_{n1}, \epsilon_{n2}, \epsilon_{n3}, \epsilon_{n41}, \dots, \epsilon_{n4n}, \epsilon_{n5}, \epsilon_{n62}, \dots, \epsilon_{n6n}, \epsilon_{n71}, \dots, \epsilon_{n7n}$  的选择满足式(11),则

- 1) 闭环系统几乎处处存在唯一解;
- 2) 控制器可保证风险灵敏度指标不大于常数  $R_l$ ;
- 3) 闭环系统为概率意义下有界的.

**证明.** 从上面的讨论易知结论 1)和 2)成立.

显然,存在正常数  $c_1$  和  $c_2$ ,使得  $V_n \leq c_1 Q + c_2, \forall (x, \hat{x}_n) \in R^n \times R^n$  成立,那么闭环系统为概率意义下有界的. 证毕.

## 4 举例

考虑系统  $dx_1 = x_2 dt + x_1^2 dt + (x_1^2 + 1)dw, \quad dx_2 = u dt + x_1 dt, \quad y = x_1,$   
其中  $u$  为控制输入,  $w$  为标准维纳过程. 状态观测器为

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + y^2 + k_1(y - \hat{x}_1), \quad \dot{\hat{x}}_2 = u + y + k_2(y - \hat{x}_1),$$

其中  $k_1 = 3, k_2 = 4.5$ . 选择风险灵敏度系数  $\theta = 0.05$ , 加权函数  $q(y) = 1$ , 期望长时区指标为

$$R_l = 3, \text{ 可解得矩阵 } P = \begin{bmatrix} \frac{11}{12} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{29}{54} \end{bmatrix}, \text{ 则 } \lambda_{\max}(P) = 1.2617, \lambda_{\min}(P) = 0.1920. \text{ 取 } c = 4, \text{ 则}$$

$M(c, P) \leq 0.4616$ . 选择  $\beta_1 = 0.1, \beta_2 = 0.6, \epsilon_{21} = 0.3162, \epsilon_{22} = 0.3162, \epsilon_{23} = 0.1, \epsilon_{241} = 0.4864, \epsilon_{242} = 0.4864, \epsilon_{25} = 1, \epsilon_{262} = 0.8409, \epsilon_{271} = 1, \epsilon_{272} = 1$ . 解得虚拟控制律  $\alpha_1$  及控制律  $u$  分别为

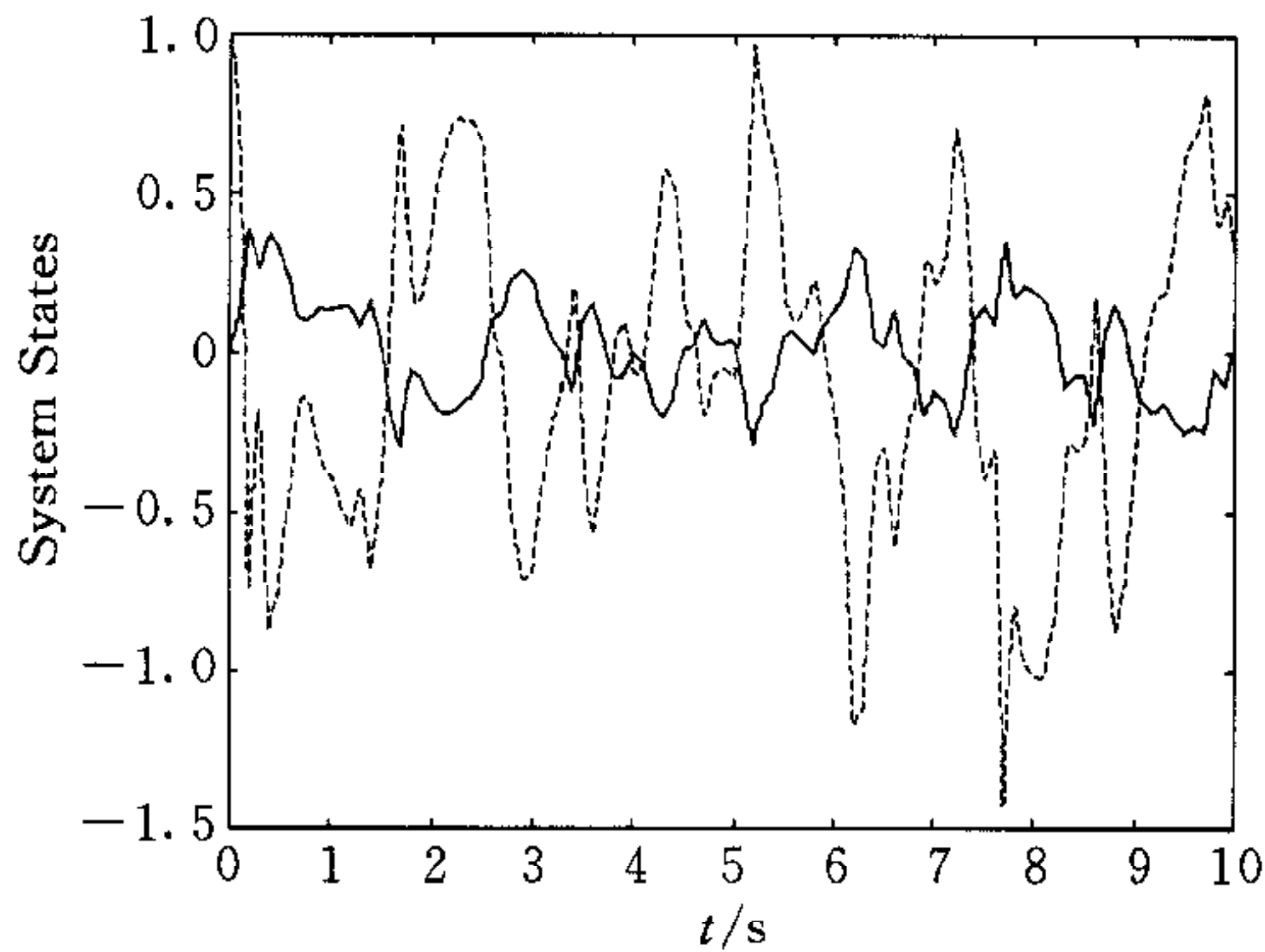
$$\begin{aligned} \alpha_1 = & -1.85y - y^2 - 17.9033y^5 - 0.75y(y^2 + 1)^4 - \\ & 0.273y^3(y^2 + 1)^4 - 0.0125y^3(y^2 + 1)^2 - 0.4665y^9, \\ u = & 0.85z_2 - F_2 - 0.75z_2 \left| \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} (1 + y^2) \right|^4 - (y^2 + 1)^2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \left( 2y^3 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} z_2^3 \right) + \\ & 1 - 4.4665z_2^9 \left| \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right|^4 - 0.0229(y^2 + 1)^4 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \left( 2y^3 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} z_2^3 \right) \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $z_2 = \hat{x}_2 - \alpha_1, F_2 = 4.5(y - \hat{x}_1) + y - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} (z_2 + \alpha_1 + y^2) - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial y^2} (1 + y^2)^2 \right]$ .

设初始条件为  $x_1(0) = 0, x_2(0) = 1, \hat{x}_1 = 0, \hat{x}_2(0) = 0$ . 图 1 至图 3 给出了闭环系统状态、状态估计值及控制效果. 图 4 为风险灵敏度指标实验值曲线(风险灵敏度指标函数必须求期望值,在一次仿真中不可能求得,可行的方法是取实验值曲线:  $(t, \frac{1}{t} \int_0^t y^4 dt)$ ). 仿真结果表明

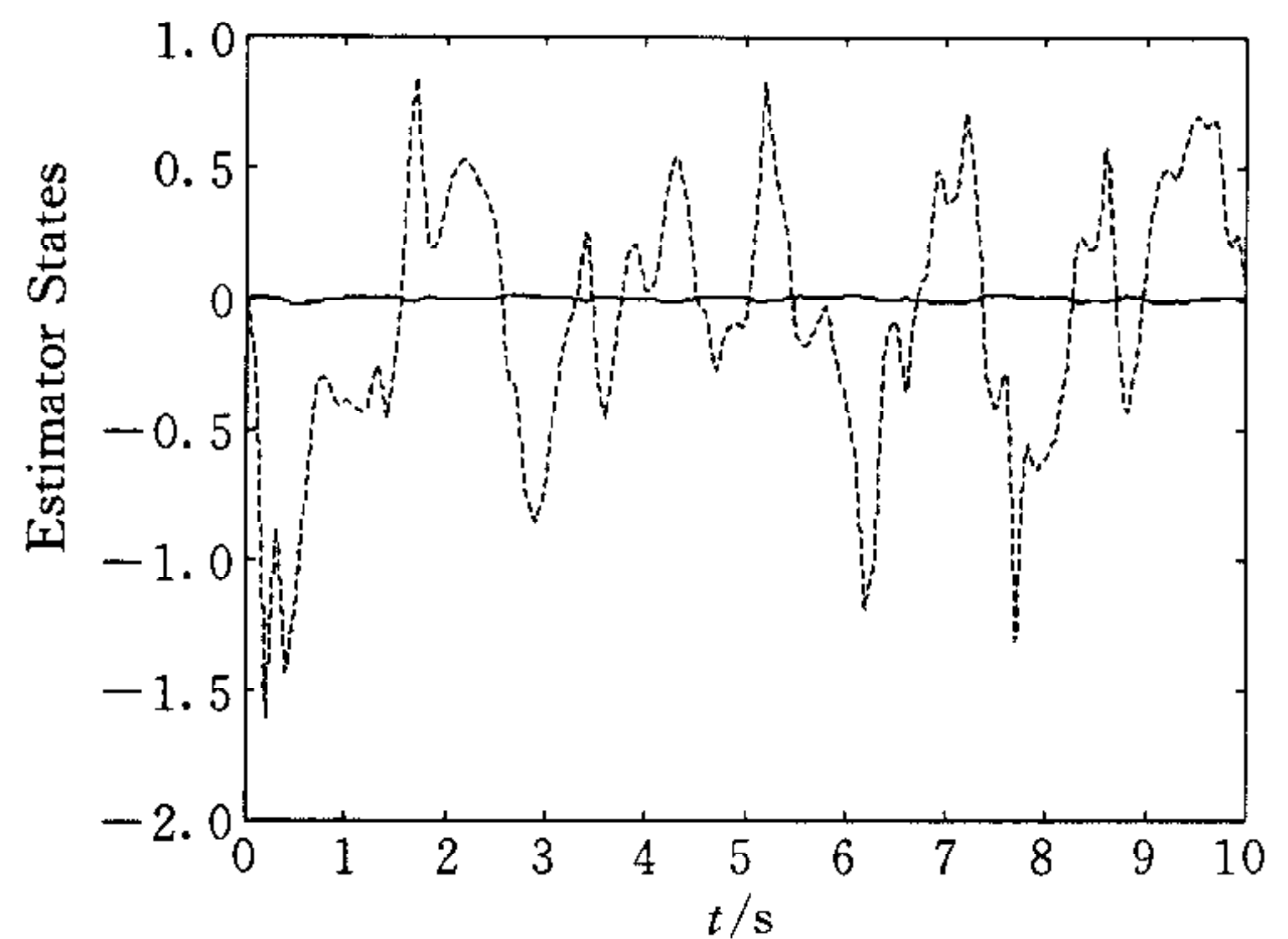


该控制器达到了预期的设计目标.



(实线和虚线分别表示闭环系统状态  $x_1$  和  $x_2$ )

图 1 二阶系统状态



(实线和虚线分别表示闭环系统状态  $\hat{x}_1$  和  $\hat{x}_2$ )

图 2 二阶系统观测器状态

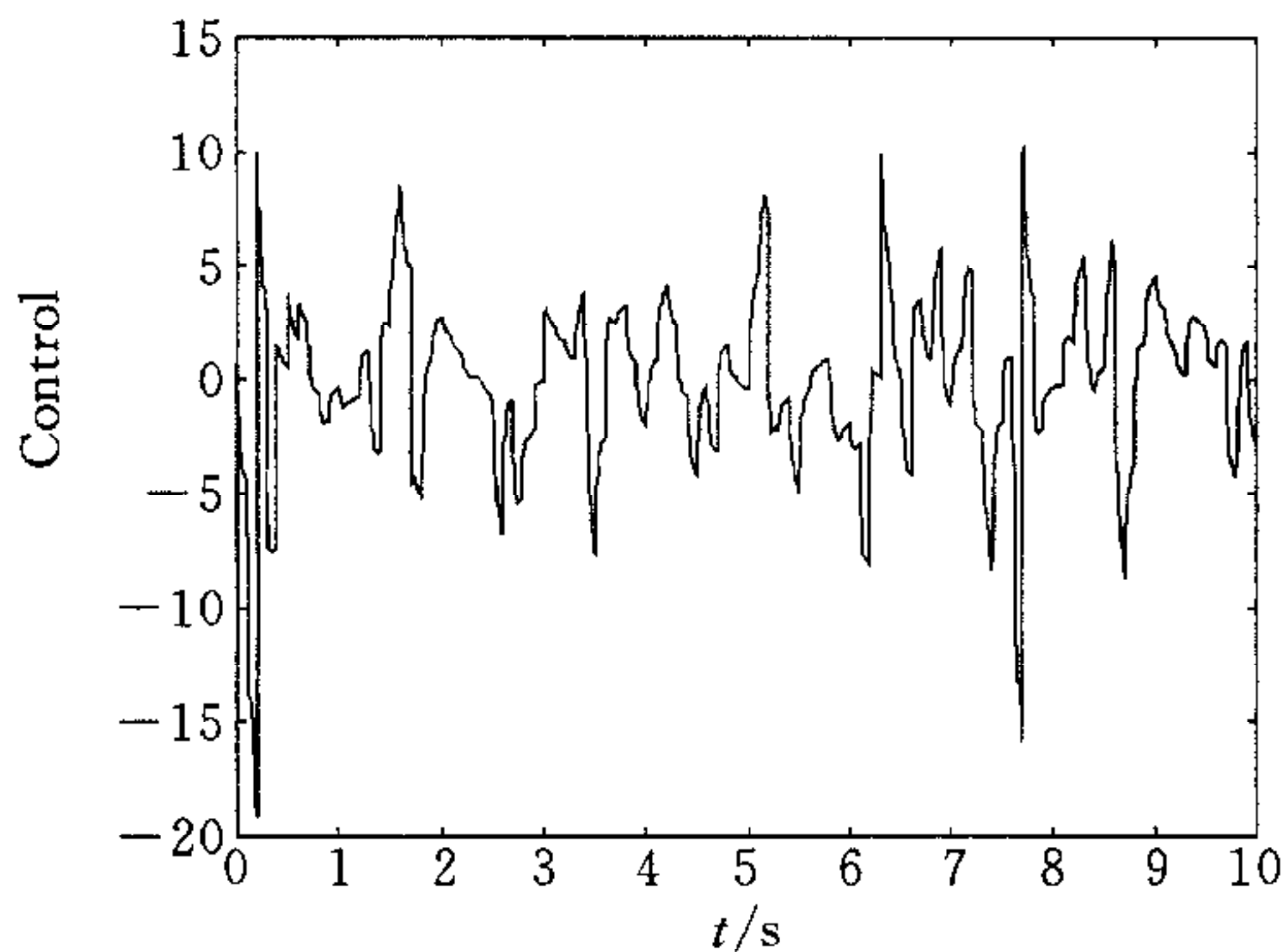


图 3 系统控制输入

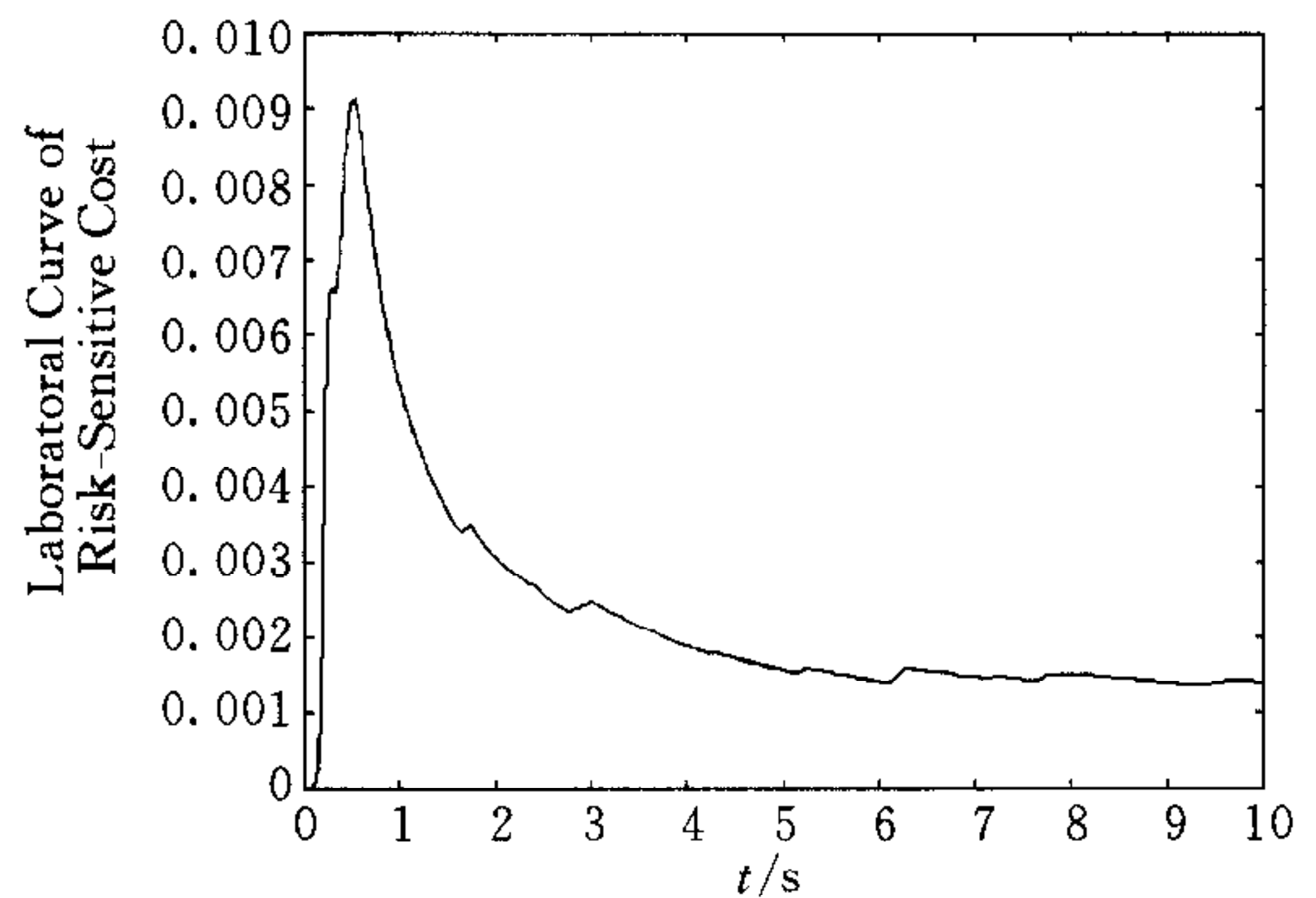


图 4 风险灵敏度指标实验值曲线

## 5 结论

本文考虑了严格反馈随机非线性系统风险灵敏度输出反馈控制器设计问题,找到了合适的值函数,通过积分反推技术,设计了控制器.它可以保证对任意的风险灵敏度系数,达到任意小的长时区平均风险灵敏度指标,同时它还可使闭环系统在概率意义下有界稳定,并保持对原系统的平衡条件.

## 参 考 文 献

- 1 Isidori A. Nonlinear Control Systems. London: Springer-Verlag, 3rd ed., 1995
- 2 Kanellakopoulos I, Kokotovic P V, More A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1991, **36**(11):1241~1253
- 3 Krstic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P V. Nonlinear and Adaptive Control Design. New York, NY: Wiley, 1995
- 4 Pan Z, Basar T. Adaptive controller design for tracking and disturbance attenuation in parametric-feedback nonlinear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1998, **43**(8):1066~1083
- 5 Jiang Z-P, Nijmeijer H. A recursive technique for tracking control of nonholonomic systems in chained form. *IEEE*

- Trans. Autom. Control*, 1999, **44**(2):265~279
- 6 Ezal K, Pan Zigang, Kokotovic P V. Locally optimal backstepping design. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2000, **45**(2):260~271
  - 7 Basar T, Bernhard P. *H<sub>∞</sub>-Optimal Control and Related Minimax Design Problems: A Dynamic Game Approach*. Boston, MA: Birkuser, 2nd ed. , 1995
  - 8 James M R, Baras J, Elliott R J. Risk-sensitive control and dynamic games for partially observed discrete-time non-linear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, **39**(7):780~792
  - 9 Whittle P. *Risk-Sensitive Optimal Control*. Chichester, NY: John Wiley and Sons, 1990
  - 10 Fleming W H, McEneaney W M. Risk-sensitive control on an infinite time horizon. *SIAM J. Contr. Optim.* , 1995, **33**(6):1881~1915
  - 11 Florchinger P. Lyapunov-like techniques for stochastic stability. *SIAM J. Contr. Optim.* , 1995, **33**(4):1151~1169
  - 12 Pan Z, Basar T. Backstepping controller design for nonlinear stochastic systems under a risk-sensitive cost criterion. *SIAM J. Contr. Optim.* , 1999, **37**(3):957~995
  - 13 Deng H, Krstic M. Output-feedback stochastic nonlinear stabilization. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1999, **44**(2):328~333

**刘允刚** 2000年在上海交通大学控制理论与控制工程专业获博士学位,现在中科院系统所从事博士后工作.研究方向为随机系统最优控制分析与设计,以及采样系统分析与设计.

**潘子刚** 副教授,美国伊利诺斯大学香槟城分校博士,加州大学圣巴巴拉分校博士后,现为美国辛辛那提大学电子工程与计算机科学与工程系副教授.主要研究方向为非线性系统自适应控制、奇异系统控制等.

**施颂椒** 见本刊第27卷第6期.

**戴立言** 上海交通大学控制理论与控制工程专业博士生.研究方向为随机非线性系统风险灵敏度控制.