



# 统一的和通用的 Wiener 状态滤波器<sup>1)</sup>

邓自立 张明波

(黑龙江大学应用数学研究所 哈尔滨 150080)

(E-mail: dzl@hlju.edu.cn)

**摘 要** 用现代时间序列分析方法,基于 ARMA 新息模型提出了带拟白噪声、拟相关噪声和带观测滞后系统的统一的通用的渐近稳定的 Wiener 状态滤波器,可统一处理状态滤波、平滑和预报问题.同 Kalman 滤波方法和多项式方法相比,避免了求解 Riccati 方程和 Diophantine 方程.仿真例子说明了其有效性.

**关键词** 状态估计, Wiener 状态滤波器, 现代时间序列分析方法

**中图分类号** O211.64

## UNIFIED AND UNIVERSAL WIENER STATE FILTERS

DENG Zi-Li ZHANG Ming-Bo

(*Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University, Harbin 150080*)

(E-mail: dzl@hlju.edu.cn)

**Abstract** Using the modern time series analysis method and based on the ARMA innovation model, unified and universal Wiener state filters are presented for systems with quasi-white noise and quasi-correlated noises and with measurement delay, which can handle the state filtering, smoothing and prediction problems in a unified framework. Compared to the Kalman filtering method and polynomial method, the solution to Riccati equations and Diophantine equations is avoided. A simulation example shows their effectiveness.

**Key words** State estimation, Wiener state filter, modern time series analysis method

## 1 引言

用经典 Kalman 滤波方法<sup>[1]</sup>设计状态滤波器要求解 Riccati 方程,且不能统一处理状态滤波、平滑和预报问题.特别是 Kalman 平滑器的计算较为复杂.用频域多项式方法<sup>[2]</sup>设计

1) 国家自然科学基金(69774019)资助. 本文曾在 2001 中国控制与决策学术年会上宣读.

状态滤波器要求解 Diophantine 方程. 最近文献[3]提出了一种新颖的统一的 Wiener 状态估值器, 但噪声统计仍不具有—般性. 文献[4]已提出了带拟白噪声、拟相关噪声和带观测滞后系统的统一的和通用的稳态 Kalman 估值器. 本文则对这种—般系统提出相应的 Wiener 状态估值器. 它具有渐近稳定性, 具有避免计算最优初值<sup>[4]</sup>和新息, 便于实时应用的优点.

考虑线性离散随机系统

$$\mathbf{x}(t+1) = \Phi \mathbf{x}(t) + \Gamma \mathbf{w}(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = H \mathbf{x}(t-k) + \mathbf{v}(t) \quad (2)$$

其中  $\mathbf{x}(t) \in R^n$  为状态,  $\mathbf{y}(t) \in R^m$  为观测,  $k \geq 0$  为观测滞后,  $\mathbf{w}(t) \in R^r$  是拟白噪声, 且拟相关于白噪声  $\mathbf{v}(t)$ , 即<sup>[4]</sup>

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}(t)] &= 0, \quad E[\mathbf{v}(t)] = 0 \\ E[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)] &= Q_w, \quad E[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t+1)] = Q_{w1} \\ E[\mathbf{w}(t)\mathbf{v}^T(t)] &= S, \quad E[\mathbf{w}(t)\mathbf{v}^T(t+1)] = S_1 \\ E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(j)] &= Q_v \delta_{tj}, \quad E[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t+j)] = 0 (j \geq 2) \\ E[\mathbf{w}(t)\mathbf{v}^T(t+j)] &= 0 (j \geq 2), \quad E[\mathbf{w}(t)\mathbf{v}^T(t-j)] = 0 (j \geq 1) \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $E$  为均值号,  $\delta_{tt} = 1, \delta_{tj} = 0 (t \neq j)$ .

注意, 当  $Q_{w1} = 0, S_1 = 0, k = 0$  时, 则化为常规情形. 假设  $(\Phi, H)$  为完全可观对, 问题是基于观测  $(\mathbf{y}(t+N), \mathbf{y}(t+N-1), \dots)$  求状态的  $\mathbf{x}(t)$  的 Wiener 滤波器  $\hat{\mathbf{x}}(t|t+N)$ , 它具有以观测  $\mathbf{y}(t+N)$  作为输入的传递函数阵表达式, 且可表为 ARMA 递推 Wiener 状态滤波器. 对  $N=0, N>0$  或  $N<0$ , 称其为 Wiener 状态滤波器, 平滑器或预报器.

## 2 噪声 Wiener 滤波器和 Åström 观测预报器

记  $I_n$  为  $n \times n$  单位阵, 由(1)和(2)式有

$$\mathbf{y}(t) = H(I_n - q^{-1}\Phi)^{-1}\Gamma q^{-(k+1)}\mathbf{w}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (4)$$

其中  $q^{-1}$  为单位滞后算子. 引入左素分解

$$H(I_n - q^{-1}\Phi)^{-1}\Gamma q^{-(k+1)} = A^{-1}(q^{-1})B(q^{-1}) \quad (5)$$

其中  $A(q^{-1})$  和  $B(q^{-1})$  为  $q^{-1}$  的多项式矩阵, 形如  $X(q^{-1}) = X_0 + X_1q^{-1} + \dots + X_{n_x}q^{-n_x}$ , 规定  $X_i = 0 (i > n_x)$ , 且有  $A_0 = I_m, B_i = 0 (0 \leq i \leq k)$ . 将(5)式代入(4)式可引出 ARMA 新息模型

$$A(q^{-1})\mathbf{y}(t) = D(q^{-1})\boldsymbol{\varepsilon}(t) \quad (6)$$

其中  $D(q^{-1})$  是稳定的,  $D_0 = I_m$ , 新息  $\boldsymbol{\varepsilon}(t) \in R^m$  是零均值、方差阵为  $Q_\varepsilon$  的白噪声, 且

$$D(q^{-1})\boldsymbol{\varepsilon}(t) = B(q^{-1})\mathbf{w}(t) + A(q^{-1})\mathbf{v}(t) \quad (7)$$

$D(q^{-1})$  和  $Q_\varepsilon$  可用 Gevers-Wouters<sup>[5]</sup> 算法求得.

**引理 1<sup>[5]</sup>.** 拟白噪声  $\mathbf{w}(t)$  和白噪声  $\mathbf{v}(t)$  的 Wiener 滤波器为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t+N) = L_N^\theta(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1})\tilde{D}^{-1}(q^{-1})\mathbf{y}(t+N), \quad \boldsymbol{\theta} = \mathbf{w}, \mathbf{v} \quad (8)$$

其中  $\tilde{A}(q^{-1})$  和  $\tilde{D}(q^{-1})$  由如下右素分解决定

$$D^{-1}(q^{-1})A(q^{-1}) = \tilde{A}(q^{-1})\tilde{D}^{-1}(q^{-1}) \quad (9)$$

带  $\tilde{A}_0 = I_m, \tilde{D}_0 = I_m$ , 且定义

$$L_N^\theta(q^{-1}) = \sum_{i=-1}^N L_i^\theta Q_\varepsilon^{-1} q^{i-N}, \quad \boldsymbol{\theta} = \mathbf{w}, \mathbf{v}$$

$$\begin{aligned}
L_i^v &= Q_w F_i^T + Q_{w1} F_{i-1}^T + Q_{w1}^T F_{i+1}^T + S G_i^T + S_1 G_{i-1}^T \\
L_i &= S^T F_i^T + S_1^T F_{i+1}^T + Q_v G_i^T \\
F_i &= -D_1 F_{i-1} - \dots - D_{n_d} F_{i-n_d} + B_i, \quad F_i = 0 (i < 0) \\
G_i &= -D_1 G_{i-1} - \dots - D_{n_d} G_{i-n_d} + A_i, \quad G_i = 0 (i < 0)
\end{aligned} \tag{10}$$

引理 2<sup>[5]</sup>. Åström 观测预报器为

$$\hat{y}(t+i|t) = J_i(q^{-1}) \tilde{D}^{-1}(q^{-1}) y(t) \tag{11}$$

其中  $\tilde{A}(q^{-1}), \tilde{D}(q^{-1})$  由(9)式定义,  $J_i(q^{-1})$  由下式决定

$$\begin{aligned}
\tilde{D}(q^{-1}) &= E_i(q^{-1}) \tilde{A}(q^{-1}) + q^{-i} J_i(q^{-1}) \quad (i > 0) \\
J_i(q^{-1}) &= \tilde{D}(q^{-1}) q^i \quad (i \leq 0)
\end{aligned} \tag{12}$$

带阶次  $\deg(E_i(q^{-1})) = i - 1, \deg(J_i(q^{-1})) = \max(n_a - 1, n_d - i)$ .

### 3 Wiener 状态滤波器

文献[4]和[5]给出了非递推状态估值器

$$\begin{aligned}
\hat{x}(t|t+N) &= \sum_{i=0}^{\beta-1} \Omega_i [\hat{y}(t+k+i|t+N) - \sum_{j=0}^{i-1} H \Phi^{i-1-j} \Gamma \hat{w}(t+j|t+N) - \\
&\quad \hat{v}(t+k+i|t+N)]
\end{aligned} \tag{13}$$

其中规定  $\Phi^i = 0 (i < 0)$  且  $j \geq 0, \Omega = [H^T, (H\Phi)^T, \dots, (H\Phi^{\beta-1})^T]^T, \beta$  为可观性指数, 且将伪逆  $\Omega^\#$  分块表示为

$$\Omega^\# = (\Omega^T \Omega)^{-1} \Omega^T = [\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{\beta-1}] \tag{14}$$

**定理.** 带拟白噪声、拟相关噪声和观测滞后系统(1)和(2), 在  $(\Phi, H)$  为完全可观对假设下, 有渐近稳定的 Wiener 状态滤波器

$$\hat{x}(t|t+N) = K_N(q^{-1}) \tilde{D}^{-1}(q^{-1}) y(t+N) \tag{15}$$

其中  $K_N(q^{-1})$  定义为

$$\begin{aligned}
K_N(q^{-1}) &= \sum_{i=0}^{\beta-1} \Omega_i [J_{k+i-N}(q^{-1}) - \sum_{j=0}^{i-1} H \Phi^{i-1-j} \Gamma L_{N-j}^w(q^{-1}) \tilde{A}(q^{-1}) - \\
&\quad L_{N-k-i}^v(q^{-1}) \tilde{A}(q^{-1})]
\end{aligned} \tag{16}$$

且有渐近稳定的 ARMA 递推 Wiener 状态滤波器

$$\bar{D}_N(q^{-1}) \hat{x}(t|t+N) = \bar{K}_N(q^{-1}) y(t+N) \tag{17}$$

其中  $\bar{D}_N^{-1}(q^{-1})$  和  $\bar{K}_N(q^{-1})$  由如下左素分解决定

$$\bar{D}_N^{-1}(q^{-1}) \bar{K}_N(q^{-1}) = K_N(q^{-1}) \tilde{D}^{-1}(q^{-1}) \tag{18}$$

带  $\bar{D}_{N0} = I_n$ , 或

$$\det \bar{D}(q^{-1}) \hat{x}(t|t+N) = K_N(q^{-1}) \text{adj} \bar{D}(q^{-1}) y(t+N) \tag{19}$$

**证明.** 将(8)和(11)式代入(13)式得(15)和(16)式. 由(15)和(18)式得(17)式. 由(15)式和  $\tilde{D}^{-1}(q^{-1}) = \text{adj} \tilde{D}(q^{-1}) / \det \tilde{D}(q^{-1})$  得(19)式. 由  $D(q^{-1})$  的稳定性和(9)式引出  $\tilde{D}(q^{-1})$  稳定, 再由(18)式引出  $\bar{D}_N(q^{-1})$  稳定, 故(15), (17)和(19)式是渐近稳定的. 证毕.

**推论.** 在上述定理条件下, 对单输出 ( $m=1$ ) 系统有渐近稳定的 Wiener 状态滤波器

$$D(q^{-1}) \hat{x}(t|t+N) = K_N(q^{-1}) y(t+N) \tag{20}$$

其中  $K_N(q^{-1})$  由(16)式置  $\tilde{A}(q^{-1})=A(q^{-1}), \beta=n$  计算.

## 4 仿真例子

考虑带拟白噪声系统

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0.65 & 0 \\ 0.6 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \mathbf{w}(t) \quad (21)$$

$$\mathbf{y}(t) = [0.2 \quad 1] \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (22)$$

其中  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$ ,  $\mathbf{w}(t) = g(t) + 0.6g(t-1)$ ,  $\mathbf{v}(t) = 0.5g(t-1) + \xi(t)$ , 且  $g(t)$  和  $\xi(t)$  是零均值, 方差各为  $Q_g = 0.8$  和  $Q_\xi = 1.2$  的独立高斯白噪声. 容易验证  $\mathbf{w}(t)$  是拟白噪声, 且拟相关于白噪声  $\mathbf{v}(t)$ , 容易求得  $Q_w = 1.088, Q_{w1} = 0.48, Q_v = 1.4, S = 0.24, S_1 = 0.4$ . 用 Gevers-Wouters<sup>[5]</sup> 算法可求得 ARMA 新息模型为

$$(1 - 0.65q^{-1})\mathbf{y}(t) = D(q^{-1})\boldsymbol{\varepsilon}(t) \quad (23)$$

其中  $D(q^{-1}) = 1 - 0.090265q^{-1} + 0.125053q^{-2}$ ,  $Q_\varepsilon = 2.310222$ .

取  $N=0$ , 应用(16)和(20)式可求得 Wiener 状态滤波器为

$$D(q^{-1})\hat{\mathbf{x}}(t|t) = K_0(q^{-1})\mathbf{y}(t) \quad (24)$$

其中  $K_0(q^{-1}) = K_{00} + K_{01}q^{-1} + K_{02}q^{-2}$ , 且

$$K_{00} = [0.698451, 0.202364]^T, K_{01} = [0.215706, 0.294258]^T, K_{02} = [0, 0.125053]^T \quad (25)$$

对  $\hat{\mathbf{x}}(t|t)$  的仿真结果如图 1 和图 2 所示.

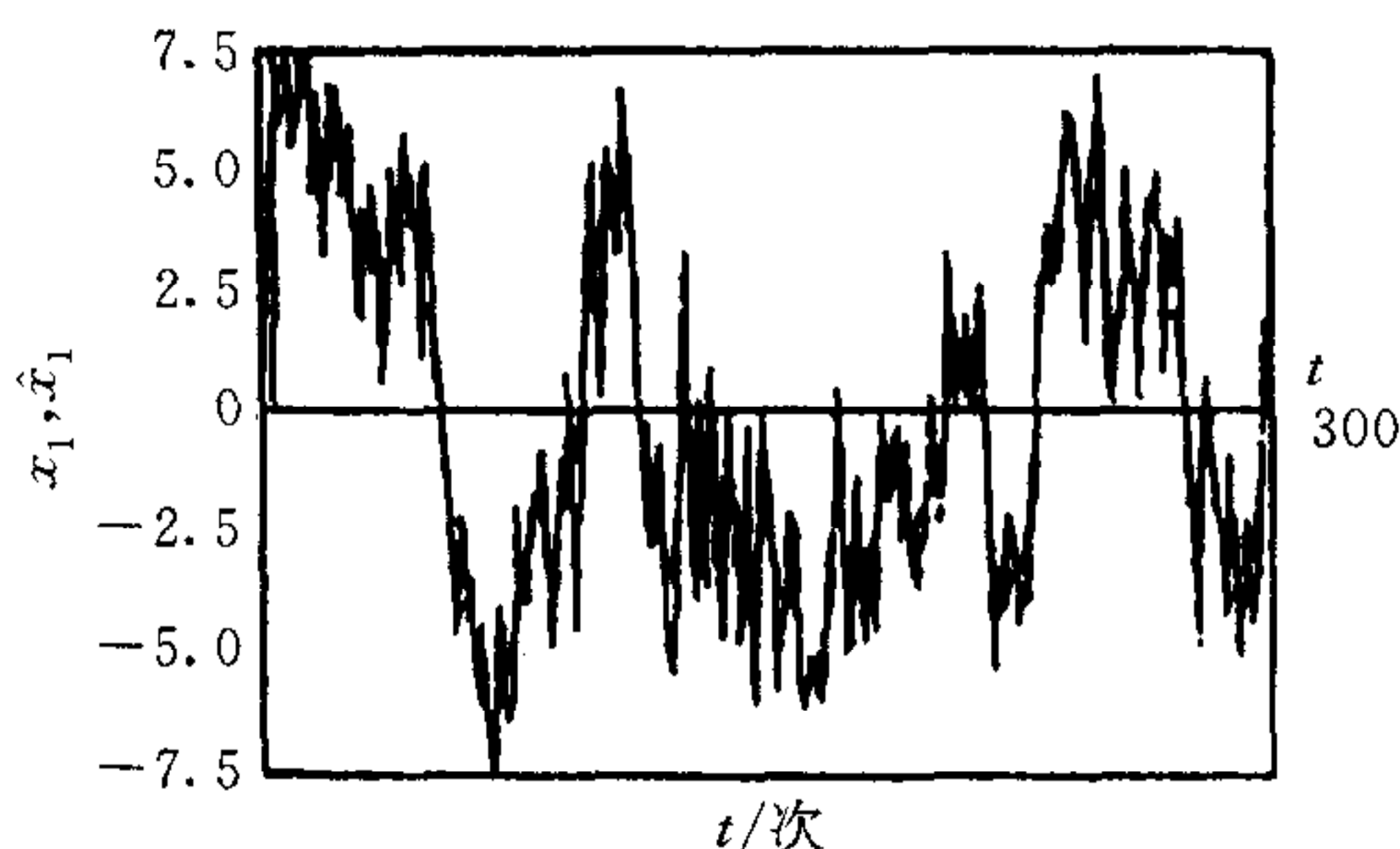


图 1  $x_1(t)$  和 Wiener 状态滤波器  $\hat{x}_1(t|t)$

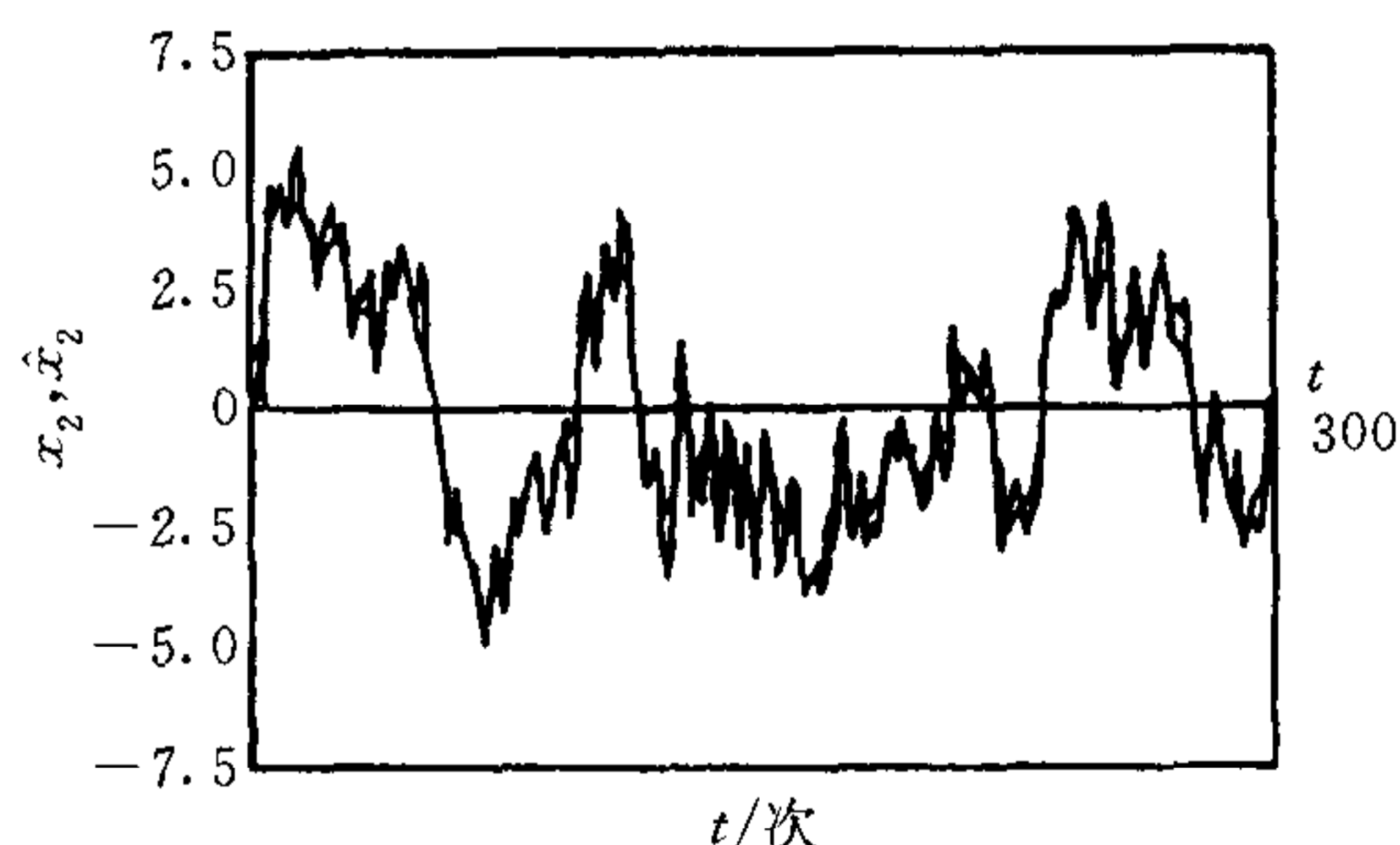


图 2  $x_2(t)$  和 Wiener 状态滤波器  $\hat{x}_2(t|t)$

## 参 考 文 献

- 1 Anderson B D O, Moore J B. Optimal Filtering. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1979
- 2 Chisci L, Mosca E. Polynomial equations for the linear MMSE state estimation. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1992, **37**(5):623~626
- 3 邓自立, 许燕. 一种统一的 Wiener 状态估值器. *信息与控制*, 1998, **27**(5):336~341
- 4 邓自立, 郭金柱, 郭君红. 统一的和通用的稳态 Kalman 估值器. *中国学术期刊文摘(科技快报)*, 1999, **5**(7):895~897
- 5 邓自立. 最优滤波理论及其应用——现代时间序列分析方法. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2000

邓自立 见本刊第 26 卷第 2 期.

张明波 黑龙江大学自动化系副教授. 研究领域为状态估计与系统仿真.