第 28 卷 第 2 期
2002 年 3 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 28, No. 2
Mar., 2002

控制受限的一类非完整动力学系统的镇定问题[1)]

王朝立[1] 霍 伟[2] 谈大龙[1]

[1](中国科学院机器人学开放研究实验室 沈阳 110015)

[2](北京航空航天大学第七研究室 北京 100083)

(E-mail: chaoz@ms.sia.ac.cn)

摘 要 考虑了控制受限的一类非完整动力学系统的镇定问题. 在一定条件下经典非完整约束下的 Lagrange 方程可化为扩展的链式系统. 利用滑动模态的思想和多步控制策略，设计了不连续反馈镇定律，该镇定律一方面满足控制受限条件，另一方面使得闭环系统的状态收敛到预先给定的原点的任意小的 ε 邻域中. 最后对移动机器人进行了仿真，验证了该方法的有效性.

关键词 滑动模态，扩展的链式系统，移动机器人

中图分类号 TP1.13

STABILIZATION OF NONHOLONOMIC DYNAMIC SYSTEMS WITH BOUNDED INPUTS

WANG Chao-Li[1] HUO Wei[2] TAN Da-Long[1]

[1](*Robotics Laboratory, Chinese Academy of Sciences, Shenyang* 110015)

[2](*The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing* 100083)

(E-mail: chaoz@ms.sia.ac.cn)

Abstract The stabilization of nonholonomic dynamic systems with bounded inputs is studied. It is demonstrated that under appropriate assumptions Lagrange's equations, including classical nonholonomic constraints, can be transformed to the extended chained-form system. By using the sliding mode approach and a multi-step control strategy, a new controller is presented, which can not only satisfy the control constraints but also stabilize the system to an arbitrarily small ε-neighborhood about its equilibrium in a finite time. The proposed method is used to stabilize a mobile robot and the simulation result shows that the approach is effective.

Key words Sliding modes, extended chained-form systems, mobile robot

1 引言

近十多年来，非完整控制系统的镇定控制问题研究的很多，但却很少讨论控制量受限

1) 国家自然科学基金(69774009)和中国科学院沈阳自动化所知识创新工程基金(F990116)资助

收稿日期 1999-08-23 收修改稿日期 2000-07-31

的问题. 文献[1]对扩展的链式系统考虑了控制受限的镇定问题,基于物理学相位的方法在基空间设计了许多条满足相位条件的闭曲线,然后再设计控制器跟踪这些曲线. 方法十分复杂. 本文对于一类非完整动力学系统,考虑了控制受限条件下的镇定问题. 利用这类系统特殊的非线性结构,采用滑动模态的方法,设计的多步控制律可使系统的状态或者在有限时间内进入原点的任意小的邻域,或者收敛到零,且所用的控制律满足事先给定的受限条件,方法简洁. 最后对一类移动机器人的镇定控制进行了仿真,验证了该方法的有效性.

2　问题的提出

考虑经典非完整约束下的 Euler-Lagrange 型动力学系统

$$M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + G(\boldsymbol{q}) = J^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\lambda} + B(\boldsymbol{q})\bar{\boldsymbol{\tau}} \tag{1}$$

$$J(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} = 0 \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{q}=[q_1,q_2,\cdots,q_n]^{\mathrm{T}}$ 为广义坐标; $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ 为 m 维广义力(控制输入); $M(\boldsymbol{q})$为对称正定阵; $C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}$为向心力和 Coriolis 力项;$G(\boldsymbol{q})$为重力项;$B(\boldsymbol{q})$是列满秩输入变换阵; $J(\boldsymbol{q})$为 $n\times(n-m)$维约束矩阵且行满秩;λ 为反映约束反力的 Lagrange 乘子.

设 $\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{q}),\cdots,\boldsymbol{r}_m(\boldsymbol{q})$为 $J(\boldsymbol{q})$零空间的一组基,令 $R(\boldsymbol{q})\triangleq[\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{q}),\cdots,\boldsymbol{r}_m(\boldsymbol{q})]$, 则 $J(\boldsymbol{q})R(\boldsymbol{q})=0$. 由式(2)知存在 m 维向量 $\boldsymbol{v}=[v_1,v_2,\cdots,v_m]^{\mathrm{T}}$,使得

$$\dot{\boldsymbol{q}} = R(\boldsymbol{q})\boldsymbol{v} \tag{3}$$

对式(3)求导并代入式(1), 再左乘 R^{T}, 利用 $R^{\mathrm{T}}J^{\mathrm{T}}=(JR)^{\mathrm{T}}=0$ 消去 $J^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}$ 后得

$$D_1\dot{\boldsymbol{v}} + C_1\boldsymbol{v} + G_1 = B_1\bar{\boldsymbol{\tau}} \tag{4}$$

式中 $D_1=R^{\mathrm{T}}MR$, $C_1=R^{\mathrm{T}}(M\dot{R}+CR)$, $G_1=R^{\mathrm{T}}G$, $B_1=R^{\mathrm{T}}B$. 易证 D_1 为正定阵.

首先对本文所讨论的系统类做出限制.

假设 1. $B_1=R^{\mathrm{T}}B$ 可逆.

假设 2. 系统(3)可通过同胚变换 $\boldsymbol{x}=\phi(\boldsymbol{q})$和 $\boldsymbol{v}=H(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$ 化为两个控制输入的单链单生成元的链式系统

$$\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad \dot{x}_i = x_{i-1}u_1 \tag{5}$$

或多于两个输入的多链单生成元的链式系统[2]

$$\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_i^1 = u_i, \quad \dot{x}_i^j = x_i^{j-1}u_1, \quad i = 2,\cdots,m;\ j = 2,\cdots,n_{i-1}.$$

注 1. 尽管并非所有系统(3)均可化为链式系统(系统(3)可化为链式系统的充分必要条件见文献[2]), 但假设 2 并不苛刻,许多系统(如移动机器人,拖车等)所受的非完整运动学约束均满足这一假设.

为了讨论方便,设(3)可化为(5)的形式(即 $\boldsymbol{u}$ 为二维的情形). 利用假设 2 中的变换,式(4)可化为

$$D_2\dot{\boldsymbol{u}} + C_2\boldsymbol{u} + G_2 = B_2\bar{\boldsymbol{\tau}} \tag{6}$$

其中 $D_2=H^{\mathrm{T}}D_1H$, $C_2=H^{\mathrm{T}}(D_1\dot{H}+C_1H)$, $G_2=H^{\mathrm{T}}G_1$, $B_2=H^{\mathrm{T}}B_1$. 易证 D_2 为正定阵.

由假设 1 知 B_2 可逆, 记 $\bar{\boldsymbol{\tau}}=B_2^{-1}(D_2\boldsymbol{\tau}+C_2\boldsymbol{u}+G_2)$,则系统(5)和(6)可化为如下系统

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \tau_1, \quad \dot{u}_2 = \tau_2, \\ \dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2,\ \dot{x}_i = x_{i-1}u_1, \quad i = 3,\cdots,n. \end{cases} \tag{7}$$

其中 τ_1,τ_2 为新的控制输入. 系统(7)称为扩展的链式系统.

由于实际的需要,考虑如下的受限控制

$$|\tau_1| \leqslant m_1, \quad |\tau_2| \leqslant m_2 \tag{8}$$

这里 m_1, m_2 是已知常数.

本文研究的问题是：在控制受限(8)之下，如何设计控制律使系统(7)镇定.

3 控制器设计

为了表述方便，先给出如下引理.

引理. 设正数 $\hat{m}>0$, $0<c<\hat{m}$, 取 $n(\geqslant 3)$为自然数. 记

$$z_j = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_j\leqslant n} \prod_{l=1}^{j} i_l, \quad (j=1,\cdots,n),$$

$$z_j^{(i)} = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_j\leqslant n-2} \prod_{l=1}^{j} i_l, \quad z_{n-i-1}^{(i)} = \frac{(n-2)!}{(i-1)!}, \quad z_0^{(i)}=1, \quad z_j^{(i)}=0(j>n-2),$$

$$i=1,\cdots,n-2;\ j=1,\cdots,n-i-1,$$

$$k_{n-i} = -k_{n-i-1}z_1^{(n-i-2)} - \cdots - k_2 z_{n-i-2}^{(1)} + k_1 c z_{n-i-1}^{(1)} + c^2 z_{n-i}^{(1)} + (-1)^{n-i-1}c^2 z_{n-i}, \tag{9}$$

$$0\leqslant i\leqslant n-1$$

$$A = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_{n-1} & k_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c & (n-2)c \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{h} = [1,\cdots,1]^{\mathrm{T}} \in R^n,$$

则

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} f_{1,1,i}(n,i)e^{-ict} & c\sum_{i=1}^{n} f_{1,2,i}(n,i)e^{-ict} & \cdots & c\sum_{i=1}^{n} f_{1,n,i}(n,i)e^{-ict} \\ c\sum_{i=1}^{n} f_{2,1,i}(n,i)e^{-ict} & \sum_{i=1}^{n} f_{2,2,i}(n,i)e^{-ict} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} f_{2,n,i}(n,i)e^{-ict} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c\sum_{i=1}^{n} f_{n,1,i}(n,i)e^{-ict} & \sum_{i=1}^{n} f_{n,2,i}(n,i)e^{-ict} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} f_{n,n,i}(n,i)e^{-ict} \end{bmatrix},$$

$$|[k_1,k_2,\cdots,k_n]|e^{At}\boldsymbol{h}| \leqslant cc_0(n,\hat{m}),\ t\geqslant 0,$$

其中 $f_{k,l,i}(n,i)$为仅与 k,l,n 和 i 有关的整数，$c_0(n,\hat{m})$为仅与 n 和 $\hat{m}$ 有关的正数.

证明. 由线性代数的知识易证明. 证毕.

下面考虑控制律的设计问题.

任给正数 $\hat{m}>0, \varepsilon>0, u_0>0$, $0<\alpha<1$, $k>1$, $0<\hat{b}_1<m_1$, 取 $n(\geqslant 3)$为自然数,对于给定的 n 和 $\hat{m}$,根据引理计算出常数 c_0. 选取正数 $a_0,\beta,\varepsilon_1,\delta,\hat{b}_2$ 满足

$$\beta = \frac{1}{\hat{b}_1}\left(1+2u_0+\frac{1}{1-\alpha}\right), \quad a_0 \leqslant \frac{m_2(n-1)}{c_0\varepsilon} \tag{10a}$$

$$\varepsilon_1 \geqslant \max\left\{(5u_0^2\beta)^{j-2}\sqrt{2} + \sum_{i=0}^{j-3}(5u_0^2\beta)^i,\ j=3,\cdots,n\right\} \tag{10b}$$

$$\delta \leqslant \min\left\{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}(n-1)}, \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1(n-1)}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{k+1}(n-1)}\right\}, \quad \hat{b}_2 < m_2 - \sqrt{k(1+k)\delta} \tag{10c}$$

选取实数 $k_{ij}(i=1,2,\cdots,n-1;\ j=1,\cdots,i)$使得下面所有矩阵的特征值均有负实部

$$A_i = \begin{bmatrix} -k_{i1} & -k_{i2}u_0 & \cdots & -k_{i,i-1}u_0 & -k_{ii}u_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & u_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & u_0 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

且存在可逆矩阵 P_i 满足

$$A_i = P_i \mathrm{diag}\{\lambda_{i1},\cdots,\lambda_{ii}\}P_i^{-1}, \quad i=1,\cdots,n-1 \tag{12}$$

这里 $m_1\lambda_{ij}(i=1,\cdots,n-1;\ j=1,\cdots,i)$是矩阵 A_i 的特征值.

设 $\boldsymbol{q}_i$ 表示矩阵 $P_i^{-1}(i=1,\cdots,n-1)$的第一列，q_{ij}表示 $\boldsymbol{q}_i$ 的第 $j(1\leqslant j\leqslant i)$个元素. 记

$$\begin{cases} \lambda_i = -\min\{\mathrm{Re}(\lambda_{ij})|,\ j=1,\cdots,i\},\ 1\leqslant i\leqslant n-1;\ \boldsymbol{y}_i = [u_2,x_2,\cdots,x_i]^{\mathrm{T}},\ 1\leqslant i\leqslant n; \\ d_i = \max\{|q_{ij}|,\ j=1,2,\cdots,i\},\ c_{i1} = \|P_i\|,\ c_{i2} = \|P_i^{-1}\|,\ 1\leqslant i\leqslant n-1. \end{cases} \tag{13}$$

这里‖·‖表示矩阵或向量的 H_2 范数.

选取正数 a_i 和 b_i 满足

$$\sqrt{i(k_{i1}^2+(k_{i2}u_0)^2+\cdots+(k_{ii}u_0)^2)}\left(c_{i1}c_{i2}a_i+b_ic_{i1}\frac{d_i}{\lambda_i}\right)+b_i\leqslant m_2, \quad i=1,\cdots,n-1 \tag{14}$$

根据 k_{ij},c_{i1},c_{i2},d_i 和 λ_i 的定义知，式(14)中 a_i 和 b_i 前面的系数均为正. 因此不等式组(14)有正实数解 a_i 和 b_i.

下面考虑 τ_1 和 τ_2 的设计问题.

首先设计 τ_1,取

$$\tau_1 = -m_1 v_{m1} \tag{15}$$

式中

$$v_{m1} = \begin{cases} \mathrm{sgn}(u_1-u_0), & 若\ |u_1-u_0|>1, \\ |u_1-u_0|^{\alpha}\mathrm{sgn}(u-u_0), & 若\ |u_1-u_0|\leqslant 1, \end{cases} \tag{16}$$

则由方程(7)可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_1-u_0) = -m_1 v_{m1}.$$

很明显$|\tau_1|\leqslant m_1$. 由变结构控制理论可知存在有限时间 $T_0>0$ 使得当 $t\geqslant T_0$ 时，$u_1(t)\equiv u_0$. 此特性与 τ_2 的设计无关.

下面考虑 τ_1 仍取式(15)，当 $t\geqslant T_0$ 时，τ_2 的设计问题. 此时系统

$$\dot{u}_2=\tau_2, \quad \dot{x}_2=u_2, \quad \dot{x}_i=x_{i-1}u_1, \quad i=3,\cdots,n$$

可表述为

$$\dot{u}_2=\tau_2, \quad \dot{x}_2=u_2, \quad \dot{x}_i=x_{i-1}u_0, \quad i=3,\cdots,n,\ t\geqslant T_0.$$

构造控制律 τ_2 的基本思想是将控制律分为 $n+2$ 步设计:在第 i 步($i=0,1,\cdots,n-1$)中，设计 τ_2 使得$|u_2|$，$|x_j|(j=2,\cdots,i+1)$在有限时间内小到某种程度. 在第 n 步中，先设计 τ_1 使

得 x_1，u_1 收敛到零. 再设计 τ_2 使 $|x_i|(i=2,\cdots,n)$，$|u_2|$ 或者均小于预先任意给定的 ε 或者收敛到零.

总结上面的思想可得如下定理.

定理. 任给 $u_0>0$，$\hat{m}>0$，$\varepsilon>0$，$0<\alpha<1$，$k>1$，$0<\hat{b}_1<m_1$，取 $n(\geqslant 3)$ 为自然数，选取实数 $k_{ij}(i=1,2,\cdots,n-1;\ j=1,\cdots,i)$ 满足式(11)和式(12)，由引理计算出 c_0，选取正数 a_0，$\beta,\varepsilon_1,\delta,\hat{b}_2,a_i$ 和 b_i 满足式(10)和式(14).

在条件(8)之下，系统(7)的镇定律分如下几步设计.

第 00 步. 取 $\tau_1=-m_1v_{m1}$；$\tau_2=0$. 这里 v_{m1} 如式(16)定义. 则存在 $T_0>0$，当 $t\geqslant T_0$ 时，$u_1(t)\equiv u_0$. 当此条件满足时，转下步.

第 0 步. 取 $\tau_1=-m_1v_{m1}$，$\tau_2=-m_2v_{m2}$，$t\geqslant T_0$. 式中 v_{m1} 由式(16)定义，以下同.

$$v_{m2}=\begin{cases}\operatorname{sgn}(u_2), & 若\ |u_2|>1,\\ |u_2|^{\alpha}\operatorname{sgn}(u_2), & 若\ |u_2|\leqslant 1,\end{cases}\quad t\geqslant T_0,$$

则存在 $T_1>0(\geqslant T_0)$ 使得 $|u_2(T_1)|\leqslant a_1$. 当此条件满足时，转下步.

第 1 步. 取 $\tau_1=-m_1v_{m1}$；$\tau_2=-k_{11}u_2-b_1v_{b1}$，$t\geqslant T_1$，式中

$$s_1=u_2+k_{11}x_2,\quad v_{b1}=\begin{cases}\operatorname{sgn}(s_1), & 若\ |s_1|>1,\\ |s_1|^{\alpha}\operatorname{sgn}(s_1), & 若\ |s_1|\leqslant 1,\end{cases}\quad t\geqslant T_1,$$

则存在 $T_2(\geqslant T_1)$ 使得 $|u_2(T_2)|\leqslant a_2$，$|x_2(T_2)|\leqslant a_2$，当此条件满足时，转下步.

第 2 步. 取 $\tau_1=-m_1v_{m1}$，$\tau_2=-k_{21}u_2-k_{22}x_2u_0-b_2v_{b2}$，$t\geqslant T_2$，式中

$$s_2=u_2+k_{21}x_2+k_{22}x_3,\quad v_{b2}=\begin{cases}\operatorname{sgn}(s_2), & 若\ |s_2|>1,\\ |s_2|^{\alpha}\operatorname{sgn}(s_2), & 若\ |s_2|\leqslant 1,\end{cases}\quad t\geqslant T_2,$$

则存在 $T_3(\geqslant T_2)$ 使得 $|u_2(T_3)|\leqslant a_3$，$|x_i(T_3)|\leqslant a_3(i=2,3)$. 当此条件满足时，转下步.

第 i 步. 取 $\tau_1=-m_1v_{m1}$，$\tau_2=-k_{i1}u_2-k_{i2}x_2u_0-\cdots-k_{ii}x_iu_0-b_iv_{bi}$，$t\geqslant T_i$，式中

$$s_i=u_2+k_{i1}x_2+k_{i2}x_3+\cdots+k_{ii}x_{i+1},\quad v_{bi}=\begin{cases}\operatorname{sgn}(s_i), & 若\ |s_i|>1,\\ |s_i|^{\alpha}\operatorname{sgn}(s_2), & 若\ |s_i|\leqslant 1,\end{cases}\quad t\geqslant T_i,$$

则存在 $T_{i+1}(\geqslant T_i)$ 使得 $|u_2(T_{i+1})|\leqslant a_{i+1}$，$|x_j(T_{i+1})|\leqslant a_{i+1}(j=2,\cdots,i+1)$.

注意，这里 $i\leqslant n-1$，$a_n=\delta$. 当 $n-1$ 步的条件满足，即 $t\geqslant T_n$ 时，转下步.

第 n 步. 选取正数 a 满足

$$a\leqslant\min\left\{\frac{m_1-\hat{b}_1}{5u_0},\ \frac{u_0}{|x_i(T_n)|},\ a_0,\ \hat{m}\right\},$$

控制律取为 $\tau_1=-au_1-\hat{b}_1v_1$；$\tau_2=-kx_2-\hat{b}_2v_2$，$t\leqslant T_n$. 式中 v_1 和 v_2 分别为

$$s_1=ax_1+u_1,\quad v_1=\begin{cases}\operatorname{sgn}(s_1), & 若\ |s_1|>1\\ |s_1|^{\alpha}\operatorname{sgn}(s_1), & 若\ |s_1|\leqslant 1\end{cases},\quad v_2=\begin{cases}\operatorname{sgn}(u_2), & 若\ |u_2|>1,\\ |u_2|^{\alpha}\operatorname{sgn}(u_2), & 若\ |u_2|\leqslant 1,\end{cases}$$

记 $T=\dfrac{1}{b_1}\left(2u_0+1+\dfrac{1}{1-\alpha}\right)$，当 $t\geqslant T+T_n$ 时转下步.

第 $n+1$ 步. 控制律 τ_1 仍取第 n 步中的形式. 若

情形 1. $|x_1(T+T_n)|\leqslant 1$，则 $|x_i|\leqslant\varepsilon(i=2,\cdots,n)$

情形 2. $|x_1(T+T_n)|>1$，控制律 τ_2 取为

$$\tau_2=k_1w_1+k_2w_2+\cdots+k_nw_n,$$

其中

$$w_1 = u_2, \quad w_2 = x_2, \quad w_i = \frac{x_i}{x_1^{i-2}}, \quad i = 3,\cdots,n,\ t \geqslant T_n + T \tag{17}$$

则上述控制律使得 x_1,u_1 指数收敛到零,使得 $|u_2|,|x_i|(i=2,\cdots,n)$ 或者小于预先给定的 ε 或收敛到零,且每一步的 τ_1 和 τ_2 满足条件(8).

证明. 利用变结构控制理论以及引理可证明上述结论(详见文献[3]).　　证毕.

注 2. 上述控制律使用了滑模控制,而抖动是滑模控制固有蹬缺点,常用的消除抖振的方法有饱和函数法、边界层方法、指数饱和函数法等,这些都可以用来改进上面的控制律以消除抖振,只不过最终邻域的大小要受饱和函数线性段大小或边界层厚度的影响.

4　例子

对文献[4]中的平面上刚体移动机器人,讨论其控制受限的非完整动力学系统的镇定问题.如第二部分,该系统可化为

$$\dot u_1 = \tau_1, \quad \dot x_1 = u_1, \quad \dot u_2 = \tau_2, \quad \dot x_2 = u_2, \quad \dot x_3 = x_2 u_1,$$

其中 τ_1 和 τ_2 为控制输入,$x_i(i=1,2,3)$和 $u_j(j=1,2)$为广义坐标.

由第三部分可知,此例子中 $n=3$. 取 $m_1=m_2=10$, $u_0=-0.2$, $\hat m=0.5$, $\varepsilon=0.01$, $\hat b_1=1$, $\alpha=0.5$, $k=1.5$. 根据引理计算出 $c_0=117$, 按式(10)$\beta=3.4$, $a_0=17$, $\varepsilon_1=2$, $\delta=0.003$, $\hat b_2=7$. 根据式(11)和式(12)可取 $k_{11}=1$; $k_{21}=3$; $k_{22}=-10$; $d_1=1$; $c_{11}=c_{12}=1$; $\lambda_1=1$; $d_2=1$; $c_{21}=c_{22}=2.68$; $\lambda_2=1$. 由式(14), 可计算出 $a_1=3$; $b_1=2$; $a_2=0.08$; $b_2=0.1$. 给定初值$[u_1(0),x_1(0),u_2(0),x_2(0),x_3(0)]^T=[0,1,0,1.5,0.5]^T$.

根据定理,此例中的控制律对应于定理中 $n=3$ 的情形,即由定理中的如下几步构成:第 00 步;第 0 步;第 1 步;第 2 步;第 3 步和第 4 步. 由于本例仿真中 $T=3.4$,且$|x_1(T+T_3)|>1$,故对应于定理中的情形 2,因此需要最后一步控制,即 $\tau_2=k_1w_1+k_2w_2+k_3w_3$. 这里 w_i 如式(17)定义, $k_1=-7a$, $k_2=-18a^2$, $k_3=24a^3$. 图 1 和图 2 分别给出了 x_1,u_1 和 x_2,u_2,x_3 的响应曲线;图 3 和图 4 分别给出了 τ_1 和 τ_2 的响应曲线. 从中可以看出这两个控制力在保证闭环系统镇定的同时还满足控制受限条件,即分别不超出预先给定的力的上界($m_1=m_2=10$[Nm]). 仿真结果证实了本文方法的有效性.

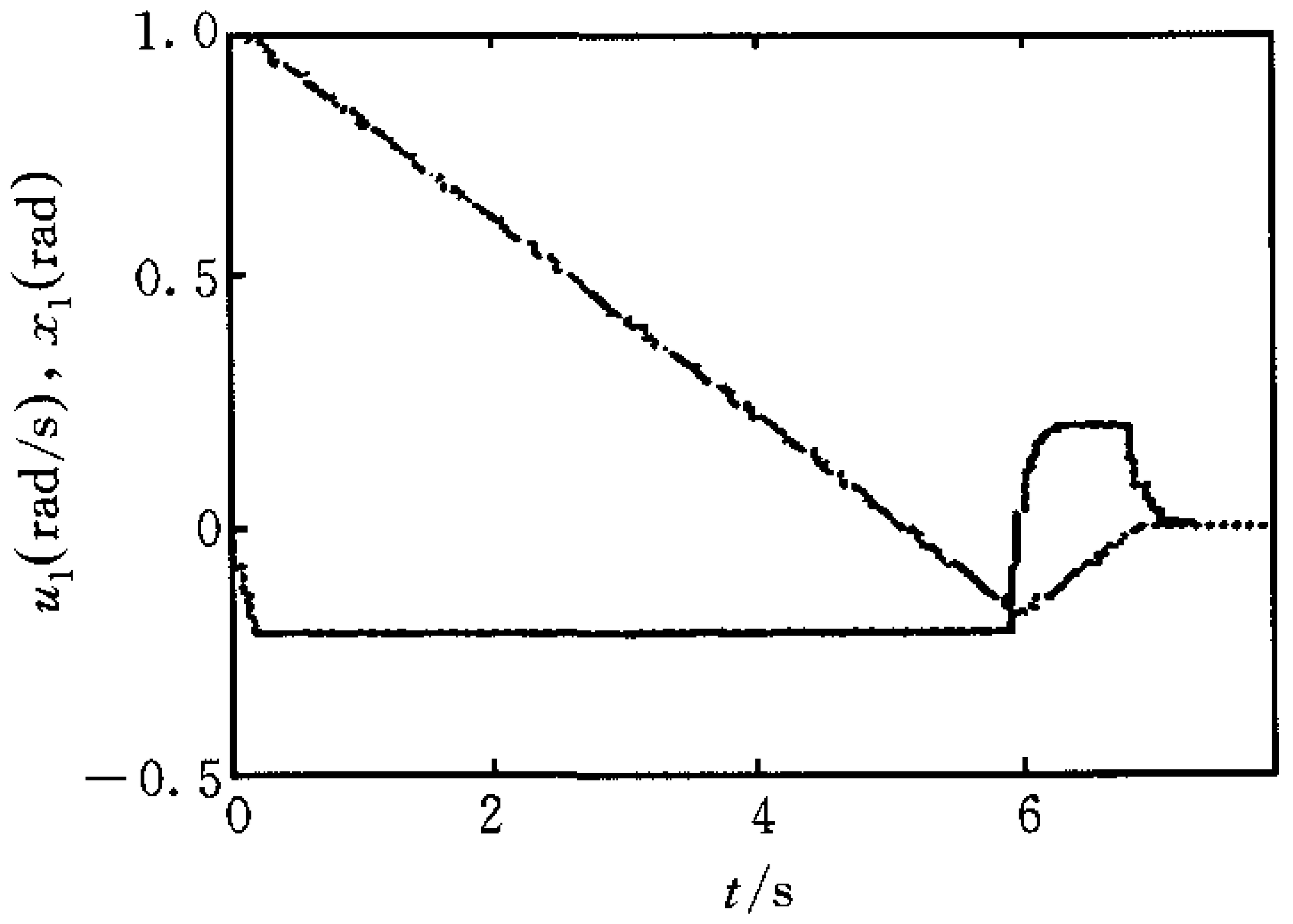

图 1　x_1,u_1的响应曲线

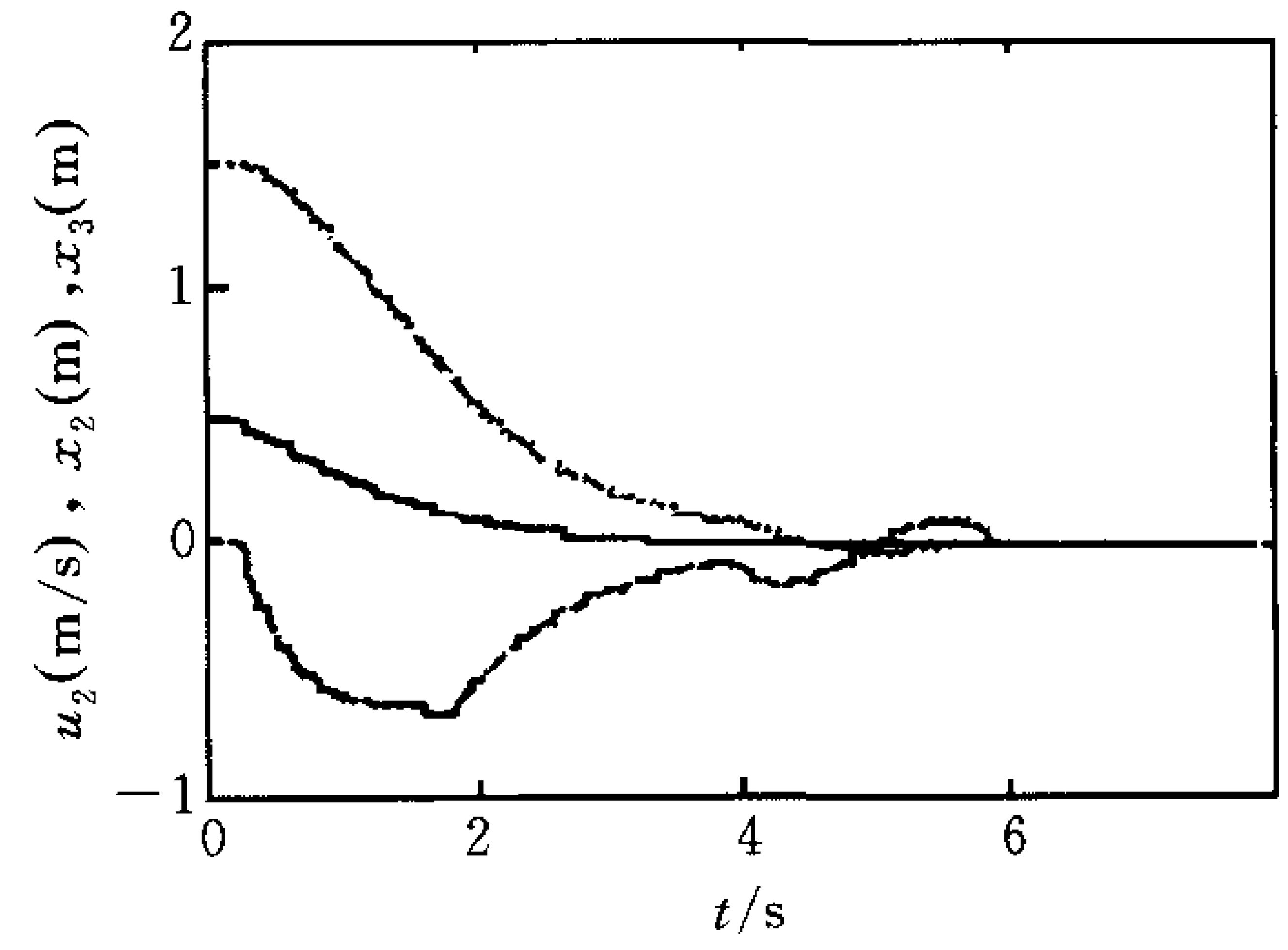

图 2　x_2,u_2,x_3的响应曲线

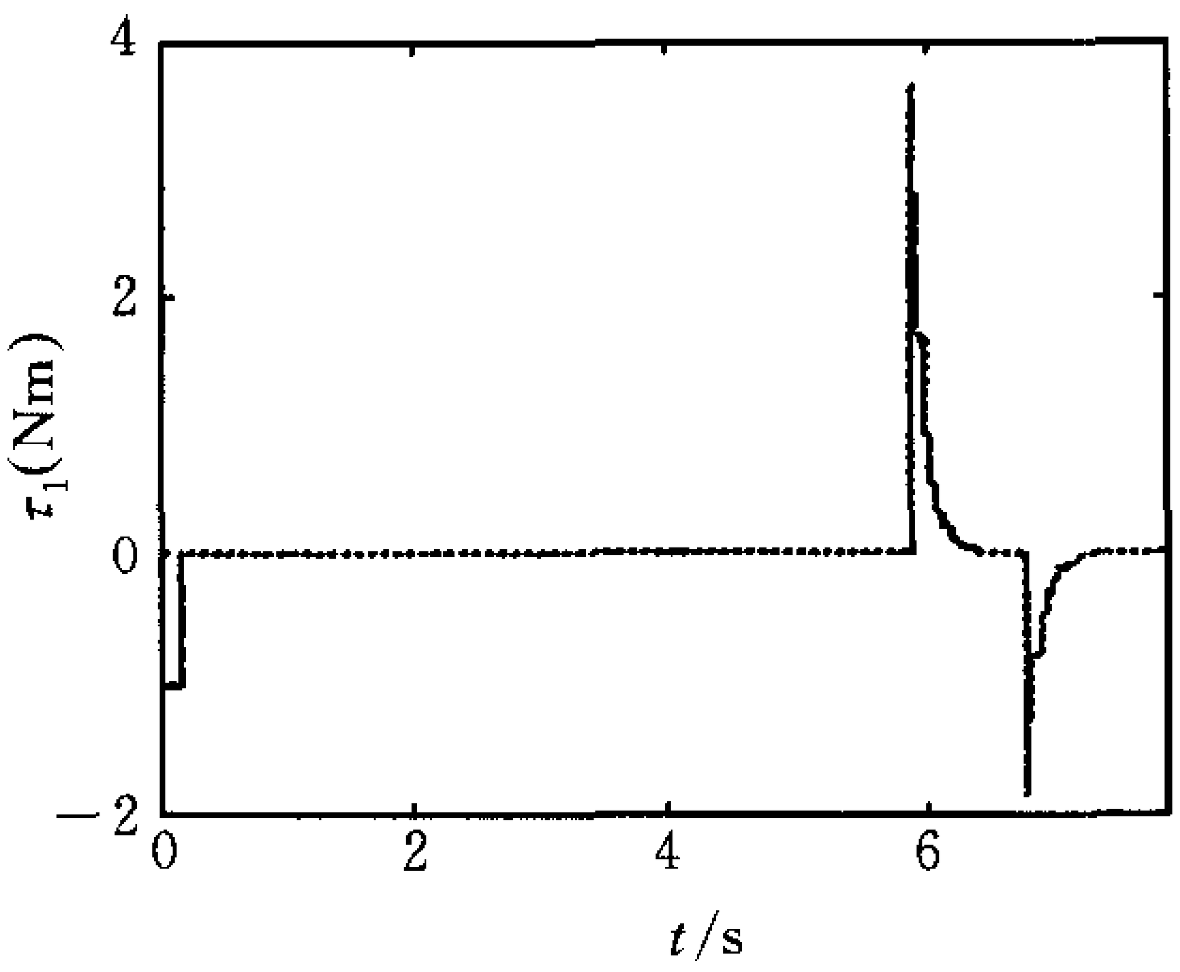

图 3 τ_1的响应曲线

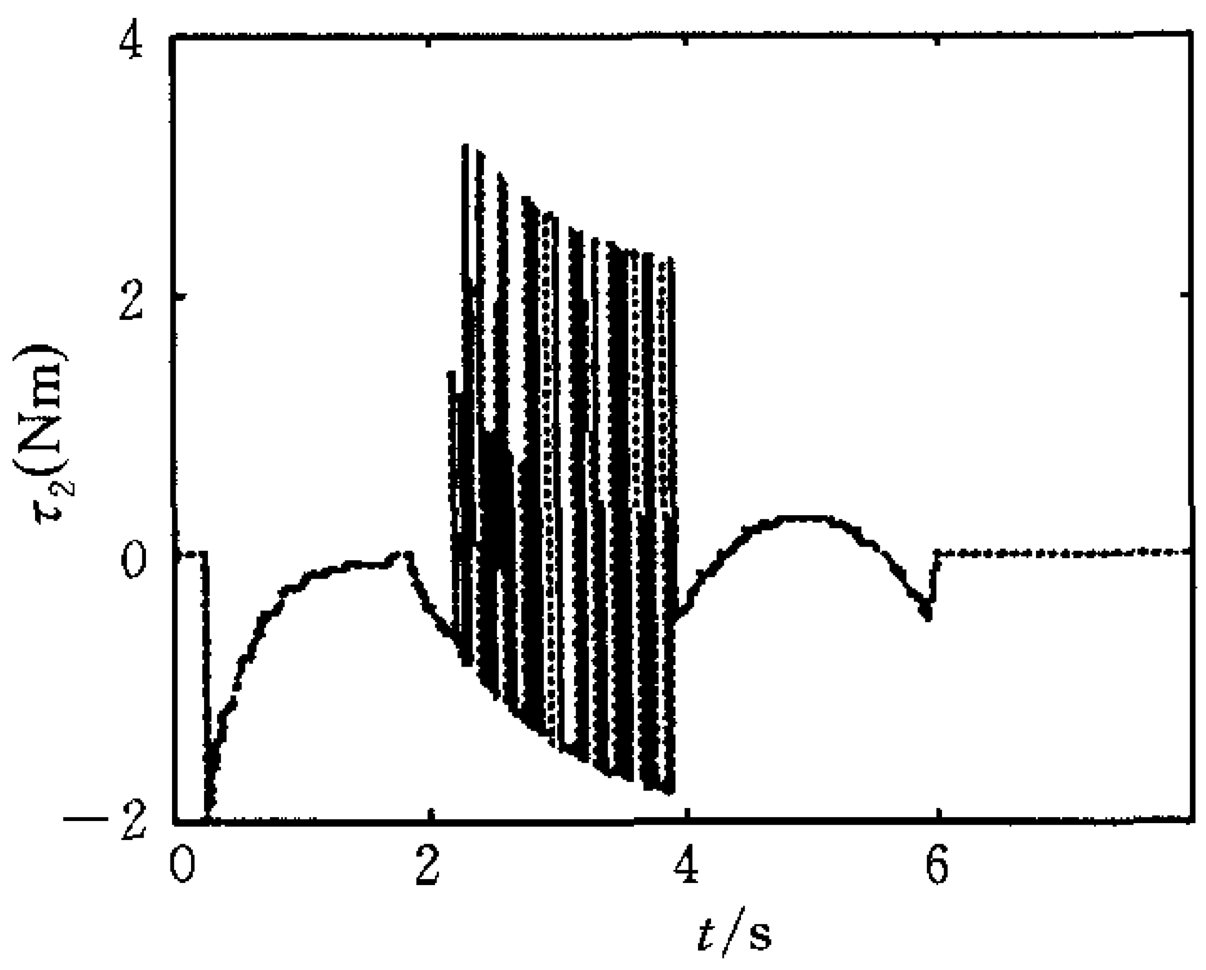

图 4 τ_2的响应曲线

5 结论

利用扩展链式系统的特殊非线性结构，设计了简单的受限反馈镇定律. 本文只是给出了两个输入的情形，对于多于两个输入的扩展单生成元的多链式系统，本文方法可以平行地推广过去. 此外，文中讨论的是模型精确已知的动力学系统的镇定问题. 对于不确定动力学系统的镇定问题将另文给出.

参 考 文 献

1 Kolmanovsky I V, Reyhanoglu M, McClamroch N H. Discontinuous feedback stabilization of nonholonomic systems in extended power form. In: Proc. 33rd CDC, Lake Buena Vista: FL-December, 1994. 3469～3474

2 Teel A, Murray R, Walsh G. Nonholonomic control systems: From steering to stabilization with sinusoids. In: Proc. 31st IEEE Conference on Decision and Control, Tucson: Arizona, 1992. 1603～1609

3 王朝立. 非完整控制系统的鲁棒镇定研究[博士论文]. 北京：北京航空航天大学，1999. 103～113

4 Campion G, d' Andrea-Novel B, Bastin G. Controllability and state feedback stabilizability of nonholonomic mechanical systems. In: Advanced Robot Control. New York: Springer-Verlag, 1991. 106～124

王朝立 中国科学院机器人学开放研究实验室博士后，研究领域为机器人动力学与控制、鲁棒控制、非线性系统控制.

霍 伟 简介见本刊 1994 年第 3 期.