



非线性仿射控制系统的高阶滑模控制¹⁾

胡跃明¹ 晁红敏¹ 李志权² 梁天培²

¹(华南理工大学自动控制工程系 广州 510640)

²(香港理工大学工程学院 香港·九龙·红石勘)

(E-mail: auymhu@scut.edu.cn)

摘要 研究非线性仿射系统的高阶滑模控制问题. 通过适当的输入及非线性状态变换将系统分解为一个关于切换变量及其高阶导数的低阶线性子系统和一个关于滑模的低阶非线性子系统, 进而给出了其高阶滑模控制器的设计方法. 最后, 对两轮驱动的非完整移动机器人进行了数值仿真, 结果表明高阶滑模控制在抖振减弱方面确实具有一定的作用.

关键词 非线性系统, 滑模控制, 滑动阶, 非完整机器人

中图分类号 TP13

HIGH-ORDER SLIDING MODE CONTROL OF NONLINEAR AFFINE CONTROL SYSTEMS

HU Yue-Ming¹ CHAO Hong-Min¹ LEE Chi-Kuen² LEUNG Tin-Pui²

¹(Department of Automatic Control Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640)

²(Faculty of Engineering, Hong Kong Polytechnic University, Hung Hom, Kowloon, Hong Kong)

(E-mail: auymhu@scut.edu.cn)

Abstract This paper addresses the high-order sliding mode control problem of nonlinear affine systems. By proper input and nonlinear state transformations, the system is first decomposed into two low dimensional subsystems: the linear subsystem involves the switching functions and related derivatives, and the nonlinear subsystem describes the sliding mode motion. A high-order sliding mode control law is then developed to achieve high-order sliding mode motion with prescribed dynamics. Finally, numerical simulations are performed for the posture model of a two-wheel driven nonholonomic mobile robot, and the results show that the proposed approach has considerable potentialities to lessen the chattering of sliding mode control systems.

Key words Nonlinear systems, sliding mode control, sliding order, nonholonomic robot

1) “八六三”高技术研究发展计划智能机器人主题(9805-19)、国家自然科学基金(69974015)及广东省自然科学基金(990583)及广东省教育厅资助

收稿日期 1999-12-10 收修改稿日期 2000-10-18

1 引言

近十多年来,滑模(或变结构)控制由于其抗干扰性能及算法简单等特点而受到了国内外控制界的普遍重视^[1~11]. 由于滑模控制为了使系统保持在滑动流形上运动而需在不同的控制逻辑间来回切换,容易引起系统不利的抖振,同时也易激励高频未建模动态,由此造成系统硬件部分的损坏或导致系统的不稳定,因而严重影响了它在实际控制问题中的应用. 其次,传统滑模控制为求得系统的滑模运动方程而常采用的等效控制法实质上只考虑了执行机构的慢变或平均作用^[1,9]. 正如文献[4,9]所指出的那样,执行机构及传感器快变动力学等的忽略往往会导致实际滑模控制系统的不稳定. 为考虑滑模的高阶动态特性对系统性能的影响,部分国外学者近年来提出了高阶滑模控制方法^[3,5,7,10,11]. 这种方法不仅仅是对传统滑模控制理论的进一步推广,而且还有着广泛的实际应用背景^[3,10].

本文的目的是建立基于高阶滑模的仿射非线性系统标准形及基本的高阶滑模控制方法,为进一步的理论与应用研究奠定基础.

2 非线性仿射系统的高阶滑模控制

考虑下列非线性仿射系统

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u \quad (1)$$

其中 $x \in R^n$ 及 $u \in R^m$ 分别是系统的状态和控制向量; $B(x) = (b_1, \dots, b_m)$; f, b_1, \dots, b_m 是充分光滑的向量函数.

设 $S = (S_1, \dots, S_m)^T$ 是 $R^n \rightarrow R^m$ 的光滑向量函数且每一分量 S_i 有直到 r_i 阶 (r_i 是正整数)的光滑导数; $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)^T$. 下列等式

$$S_i = \dot{S}_i = \dots = S_i^{(r_i-1)} = 0, \quad (i = 1, \dots, m) \quad (2)$$

定义的集合 Ω 在 Filippov 意义下为一局部积分集^[2], 则称在 Ω 上的运动模态为函数 S 具滑动阶为 \bar{r} 的滑模, 而称正整数 $r = r_1 + \dots + r_m$ 为滑动总阶数. 如果上述集合 Ω 是(渐近)稳定的, 则称滑模是(渐近)稳定的^[3]. 下列关系式

$$\text{rank} \{ \nabla S_i, \nabla \dot{S}_i, \dots, \nabla S_i^{(r_i-1)} \mid i = 1, \dots, m \} = r \quad (3)$$

则称为滑动正则条件^[3], 它保证了式(2)中的 r 个方程是彼此独立的.

显然, 上述概念是传统滑模概念^[1]的自然推广. 我们期望设计出适当的切换函数与滑模控制使系统轨迹在有限时间内到达 Ω 且保持在上面, 同时具有良好的动态特性.

采用与输入/输出解耦类似的方法^[12], 考虑系统(1)轨线沿 S 每一分量 S_i 的导数. 设存在正整数 r_1, \dots, r_m 使得所选切换函数满足

H1) 对所有 x 及 $0 \leq k < r_i - 1$; $i, j = 1, \dots, m$, 有 $L_{b_j} L_f^k S_i = 0$;

H2) $m \times m$ 阶矩阵 $E_s = (e_{sij})_{m \times m} = (L_{b_j} L_f^{r_i-1} S_i)_{m \times m}$ 对所有 x 可逆.

也即将切换函数 S 视为是输出函数时, 系统(1)具有相对阶 $\{r_1, \dots, r_m\}$. 于是有

$$S_i^{(k)} = L_f^k S_i, \quad 0 \leq k \leq r_i - 1; \quad S_i^{(r_i)} = L_f^{r_i} S_i + \sum_{j=1}^m L_{b_j} L_f^{r_i-1} S_i u_j \quad (4)$$

此时控制量显然只影响每一切换函数分量 S_i 的 r_i 阶导数, 且下列 r 个行向量

$$\nabla S_1(\mathbf{x}), \nabla L_f S_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla L_f^{r_1-1} S_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla S_m(\mathbf{x}), \nabla L_f S_m(\mathbf{x}), \dots, \nabla L_f^{r_m-1} S_m(\mathbf{x})$$

是线性无关的^[6,12], 即满足滑动正则条件(3). 作非线性状态变换

$$\begin{pmatrix} \mathbf{z}_s \\ \zeta \end{pmatrix} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_z(\mathbf{x}) \\ \mathbf{T}_\zeta(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (5)$$

其中

$$\mathbf{z}_s = (\mathbf{z}_{s1}, \dots, \mathbf{z}_{sm})^T, \mathbf{z}_{si} = (z_i^0, \dots, z_i^{r_i-1})^T; \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{n-r})^T,$$

$$\mathbf{T}_z(\mathbf{x}) = (S_1, L_f S_1, \dots, L_f^{r_1-1} S_1, \dots, S_m, L_f S_m, \dots, L_f^{r_m-1} S_m)^T,$$

而 $\mathbf{T}_\zeta(\mathbf{x}) = (T_1(\mathbf{x}) \cdots T_{n-r}(\mathbf{x}))^T$ 是使得变换(5)为微分同胚的光滑函数. 当系统进入滑模运动后, 显然有 $S_i^{(j)}(\mathbf{x}) = 0$. 在(4)中令 $S_i^{(r_i)} = 0$ 即可解得类似于传统滑模系统中的等效控制

$$\mathbf{u}_{eq} = -E_s^{-1} \mathbf{K}_s, \mathbf{K}_s = (L_f^{r_1} S_1, \dots, L_f^{r_m} S_m)^T \quad (6)$$

取系统的控制为下列形式

$$\mathbf{u} = E_s^{-1} (-\mathbf{K}_s + \mathbf{v}) \quad (7)$$

其中 $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)^T$ 为待定的非线性滑模控制, 则在状态及控制变换(5)和(7)下, 原切换函数 $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ 及原系统(1)分别被变换为 $\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{z}_s, \zeta) = \mathbf{S}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z}_s, \zeta))$ 和下列标准形

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_{si} = A_i \mathbf{z}_{si} + \mathbf{b}_i v_i, & i = 1, \dots, m, \\ \dot{\zeta} = \mathbf{p}(\mathbf{z}_s, \zeta) + \mathbf{q}(\mathbf{z}_s, \zeta) \mathbf{v}, \end{cases} \quad (8)$$

$$\quad (9)$$

其中 (A_i, \mathbf{b}_i) 为标准能控对, $\mathbf{p}(\mathbf{z}_s, \zeta) = (L_f T_k)$, $\mathbf{q}(\mathbf{z}_s, \zeta) = (L_b T_k)$.

上述标准形(8)刻画了每一切换变量的动态变化关系, 而系统在进入滑模运动后的动态方程则显然由式(9)描述. 为使系统实现所给定的高阶滑模运动, 令

$$\mathbf{E}_i = S_i^{(r_i-1)} + \mu_i^{r_i-1} S_i^{(r_i-2)} + \dots + \mu_i^2 \dot{S}_i + \mu_i^1 S_i \quad (10)$$

则由式(8)及(10)得

$$\dot{\mathbf{E}}_i = (\mu_i^1, \dots, \mu_i^{r_i-1} \mathbf{1}) \dot{\mathbf{z}}_{si} = (\mu_i^1, \dots, \mu_i^{r_i-1} \mathbf{1}) [A_i \mathbf{z}_{si} + \mathbf{b}_i v_i] = \sum_{j=1}^{r_i-1} \mu_i^j S_i^{(j)} + v_i \quad (11)$$

选取滑模到达律为

$$\dot{\mathbf{E}}_i = -\gamma_i \mathbf{E}_i - \delta_i \text{sign}(\mathbf{E}_i) \quad (12)$$

由式(11)及(12)可知下列滑模控制规律

$$v_i = -\sum_{j=1}^{r_i-1} \mu_i^j S_i^{(j)} - \gamma_i \mathbf{E}_i - \delta_i \text{sign}(\mathbf{E}_i), \quad (\gamma_i \geq 0, \delta_i > 0, i = 1, \dots, m) \quad (13)$$

能保证系统在有限时间内到达 $\mathbf{E}_i = 0$ 并保持在上面. 进而由式(10)知, 只要取常数 μ_i^j 使式(10)中右端对应特征多项式具有期望的特征值, 则系统就能实现所期望的高阶滑模运动.

一旦系统进入滑模运动, 则由上可知其动态方程为

$$\begin{cases} S_i = \dot{S}_i = \dots = S_i^{(r_i-1)} = 0, & i = 1, \dots, m, \\ \dot{\zeta} = \mathbf{p}(\mathbf{0}, \zeta). \end{cases} \quad (14)$$

若下列零动态系统

$$\dot{\zeta} = \mathbf{p}(\mathbf{0}, \zeta) \quad (15)$$

是渐近稳定的, 则此时滑模运动显然是局部渐近稳定的^[12]. 因此对最小相位系统而言, 其滑

模运动是局部渐近稳定的.

特别地,对于下列多输入非线性能控正则型系统^[9,12]

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \begin{pmatrix} 0 & I_{n_i-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}^i + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_i + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, m \quad (16)$$

而言,我们可给出指定阶次的滑模控制器. 其中 $\mathbf{x}^i = (x_1^i, \dots, x_{n_i}^i)^\top \in R^{n_i}$; $\alpha_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ 为充分光滑的纯量函数. 选取切换函数为下列形式

$$S_i = c_1^i x_1^i + \dots + c_{k_i}^i x_{k_i}^i + x_{k_i+1}^i = \mathbf{C}^i \mathbf{x}^i, \quad (0 \leq k_i \leq n_i - 1; c_1^i \neq 0; i = 1, \dots, m) \quad (17)$$

则易知前述假设 H1) 及 H2) 对 $r_i = n_i - k_i$ 成立, 即滑动阶为 $(n_1 - k_1, \dots, n_m - k_m)^\top$. 此时式 (5) 及式 (7) 中的变换具体为

$$z_j^i = c_1^i x_{j+1}^i + \dots + c_{k_i}^i x_{j+k_i}^i + x_{j+k_i+1}^i \quad (j = 0, 1, \dots, n_i - k_i - 1; i = 1, \dots, m) \quad (18)$$

$$\zeta = (x_{n_1-k_1+1}^1, \dots, x_{n_1}^1, \dots, x_{n_m-k_m+1}^m, \dots, x_{n_m}^m)^\top, \quad u_i = -\alpha_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) + v_i \quad (19)$$

而相应的标准形为

$$\dot{z}_j^i = z_{j+1}^i \quad (j = 0, 1, \dots, n_i - k_i - 2); \quad \dot{z}_{n_i-k_i-1}^i = v_i \quad (20)$$

$$\dot{x}_j^i = x_{j+1}^i \quad (j = n_i - k_i + 1, \dots, n_i - 1); \quad \dot{x}_{n_i}^i = -c_1^i x_{n_i-k_i+1}^i - \dots - c_{k_i}^i x_{n_i}^i + v_i \quad (21)$$

对子系统 (20), 采用上面方法可确定出相应的高阶滑模控制 (13) 使系统以期望的动态 (12) 进入滑模运动. 而当系统进入滑模运动后, 由式 (18) ~ (21) 可得滑模的 k_i 维运动方程为

$$\dot{x}_j^i = x_{j+1}^i \quad (j = n_i - k_i + 1, \dots, n_i - 1); \quad \dot{x}_{n_i}^i = -c_1^i x_{n_i-k_i+1}^i - \dots - c_{k_i}^i x_{n_i}^i \quad (22)$$

显然只要取系数 c_j^i 使得 $\lambda^{k_i} + c_{k_i}^i \lambda^{k_i-1} + \dots + c_2^i \lambda + c_1^i = 0$ 具有期望的特征值, 则系统的滑模运动可具有期望的动态品质.

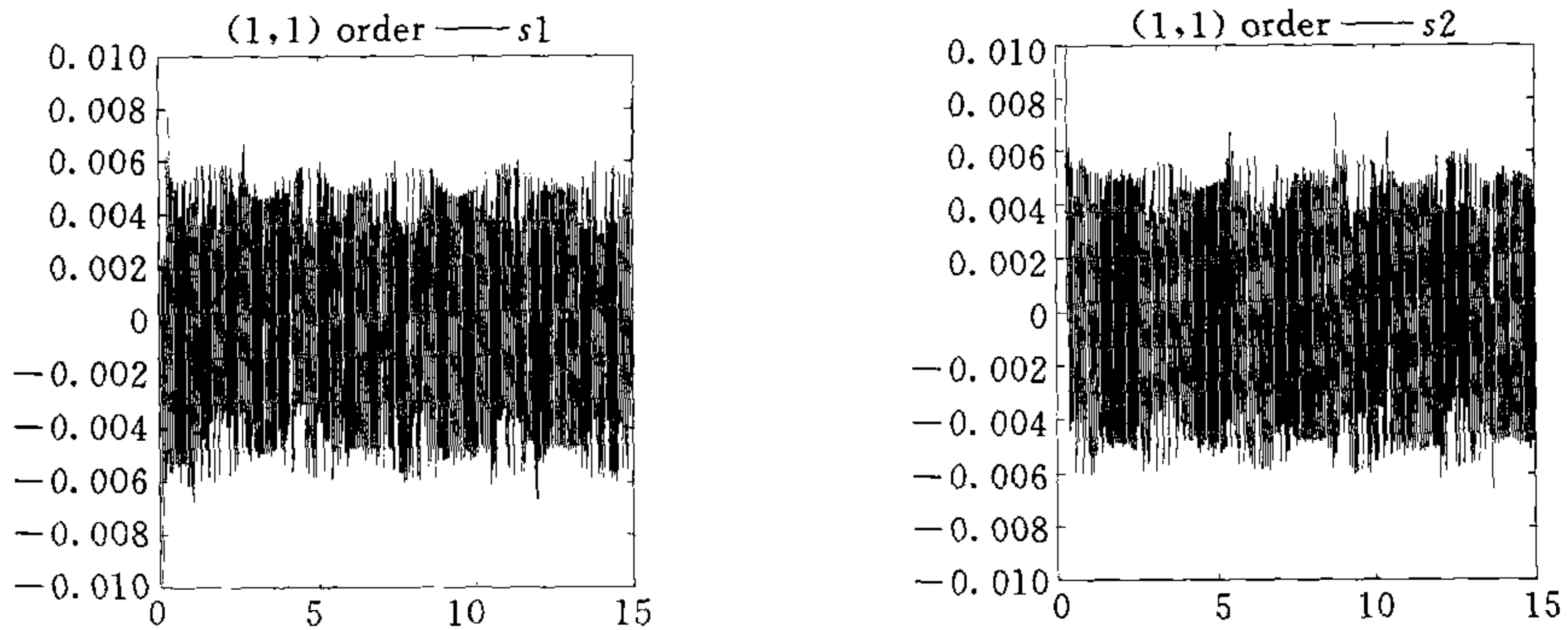
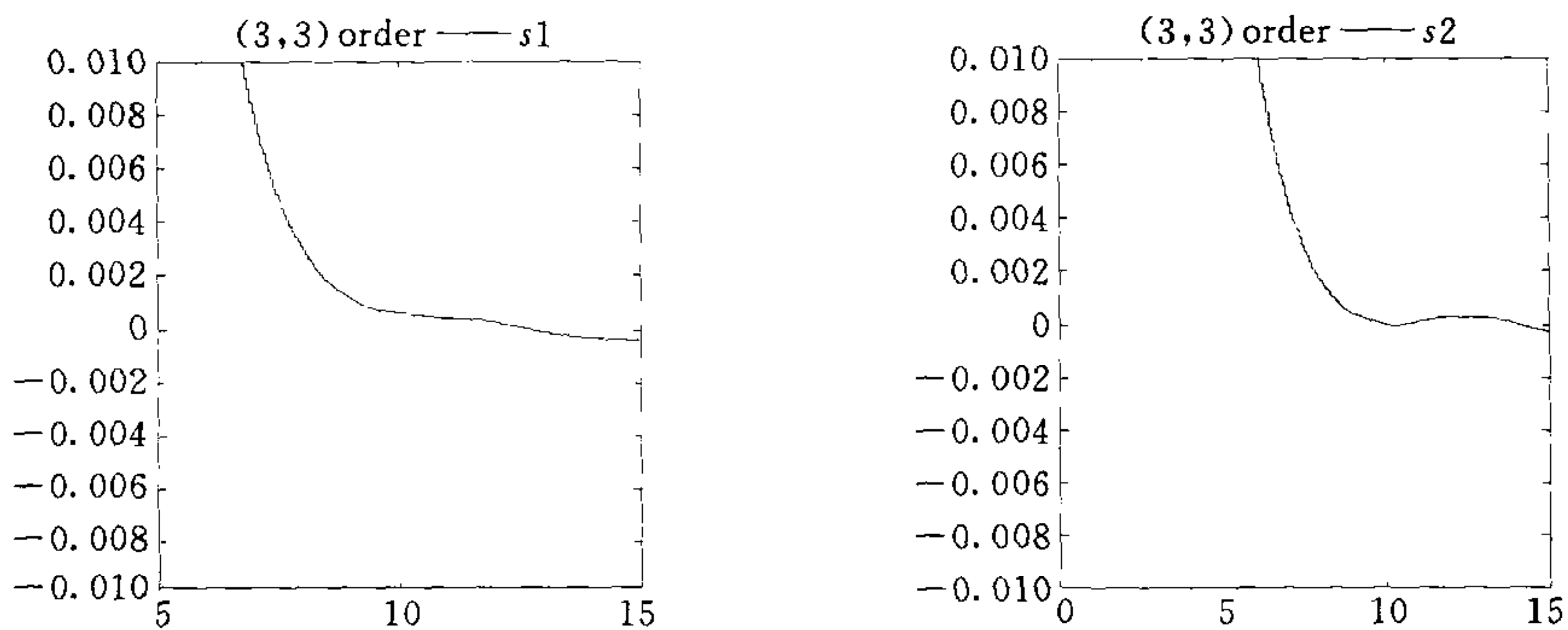
3 数值仿真

为说明上述高阶滑模控制器的有效性, 我们考虑典型的两轮驱动移动机器人轨迹跟踪控制问题. 其运动学模型为^[13]

$$\dot{x} = -v \sin \theta, \quad \dot{y} = v \cos \theta, \quad \dot{\theta} = w \quad (23)$$

其中 (x, y) 及 θ 分别为移动机器人中心点的坐标位置和轮子的转角; v, w 为控制变量.

通过动态控制 $\dot{x}_4 = x_6, \dot{x}_5 = u_2, \dot{x}_6 = u_1 (x_1 = x, x_2 = y, x_3 = \theta, x_4 = v, x_5 = w)$ 可将系统化为形如式 (16) 的能控正则型系统. 我们对该动态系统按上述方法分别进行了不同阶次的滑模控制设计与仿真, 控制任务是使系统跟踪给定曲线 $x_d = -\sin t, y_d = \cos t$. 因篇幅所限以及切换函数值直接影响到控制器的切换而导致系统的抖振, 在这里仅给出滑动阶为 $(1, 1)^\top$ (见图 1) 及 $(3, 3)^\top$ (见图 2) 时的切换函数曲线 (注意 $(1, 1)^\top$ 阶就是传统意义的滑动模). 虽然各阶滑模控制都能很好地实现机器人的轨迹跟踪, 但滑动阶数对系统的抖振有明显影响作用, 滑动阶数越高, 切换函数抖振就越弱, 从而更易于实时实现. 因此, 与传统的滑模相比, 高阶滑模控制在减弱系统抖振方面确实具有明显的效果.

图 1 $(1,1)^T$ 阶滑模控制器的切换函数曲线图 2 $(3,3)^T$ 阶滑模控制器的切换函数曲线

4 结束语

目前对高阶滑模控制系统的研究还尚处在起步阶段. 如何设计适当的高阶滑模控制规律使得系统能在有限的时间内到达所期望的高阶滑动流形, 保证系统在非匹配不确定性存在的情况下具有良好的鲁棒性; 以及如何设计适当的切换函数使得对非最小相位系统的滑模运动具有期望的动态特性等许多问题还有待进一步研究.

参 考 文 献

- 1 Utkin V I. Sliding Modes in Control and Optimization. New York: Springer-Verlag, 1992
- 2 Paden B E, Sastry S S. A calculus for computing Filippov's differential inclusion with application to the variable structure control of robot manipulators. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 1987, **34**(1):73~82
- 3 Franco G, Luigi G. Robust Control via Variable Structure and Lyapunov Techniques. London: Springer-Verlag, 1996
- 4 Young K D, Utkin V I, Ozguner U. A control engineer's guide to sliding mode. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 1999, **7**(3):328~342
- 5 Levant A. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *Int. J. Control*, 1993, **58**(6):1247~1263
- 6 Krishnan H, McClamroch N H. Tracking in nonlinear differential-algebraic control systems with applications to constrained robot systems. *Automatica*, 1994, **30**(12):1885~1897
- 7 Jiang Y A, Hesketh T, Clements D J. High order sliding mode control of uncertain linear systems. In: Proc. 14th IFAC World Congress, Beijing:PRC, 1999. **G**:437~442

- 8 Li Q X, Hu Y M, Pei H L, Zhou Q J. Robust output tracking of mobile robots. 控制理论与应用, 1998, **15**(4): 515~524
- 9 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法. 北京: 科学出版社, 1998
- 10 Chiacchiarini H G, Desages A C, Romagnoli J A, Palazoglu A. Variable structure control with a second order sliding condition; Application to a steam generator. *Automatica*, 1995, **31**(8):1157~1168
- 11 Bartolini G, Ferrara A, Giacomini L. A robust control design for a class of uncertain nonlinear systems featuring a second-order sliding mode. *Int. J. Control*, 1999, **72**(4):321~331
- 12 Sastry S. *Nonlinear Systems Analysis, Stability and Control*. New York: Springer-Verlag, 1999
- 13 Canudas de Wit C, Siciliano B, Bastin G. *Theory of Robot Control*. London: Springer-Verlag, 1998

胡跃明 华南理工大学自动控制工程系教授、博士生导师,曾任香港理工大学电子系副研究员和研究员等职. 目前主要研究兴趣为非线性控制理论、机器人控制系统、模式识别与智能控制等.

晁红敏 1997年考入华南理工大学攻读硕士学位,现为在读博士生,主要研究兴趣为非线性控制理论与机器人控制.

系统复杂性研究中心在中国科学院自动化研究所挂牌成立

中国科学院自动化研究所

由中国科学院自动化所联合中国科学院过程研究所、中国中医研究院中药研究所、首都儿科医学研究所、国家安全部信息安全研究所、青岛大学等单位,于2001年12月21日在中国科学院自动化研究所挂牌成立“系统复杂性研究中心(System Complexity Research Center)”. 该中心的成立,是中国科学院在前沿领域进行新布点的举措,也将有利于我国不失时机地开展复杂性科学研究并进一步提高我国在该学科领域的学术地位.

全国人大副委员长蒋正华,国家自然科学基金委员会副主任周炳昆等出席了成立大会. 蒋正华副委员长在成立大会上讲话并祝贺中心成立.

指导委员会

总顾问 钱学森

委员 成思危 蒋正华 于景元 王永炎 朱宗涵 李静海 刘艳茹 何德全 张嗣瀛
杨芙清 葛家理 郭雷 涂元季 徐建培 谭铁牛 戴汝为

学术委员会

主任 戴汝为

副主任 王飞跃 王龙 黄璐琦

委员 于景元 王飞跃 王龙 刘保延 刘艳茹 朱宗涵 余振苏 李静海 张嗣瀛
陈彪 陈钰 张兆田 郭雷 涂元季 黄琳 黄璐琦 刘胜 姚力
谭民 田捷 杨一平 戴汝为