第 28 卷 第 2 期
2002 年 3 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 28, No. 2
Mar., 2002

一类多不确定性系统鲁棒 H^{∞} 控制器的 LMI 设计方法[1)]

胡中骥　施颂椒　翁正新

(上海交通大学自动化系　上海　200030)

(E-mail: huzj@263.net)

摘　要　对同时具有加型参数不确定性以及积分二次约束(IQC, integral quadratic constraint)不确定性环节的一类线性系统，给出设计其鲁棒 H^{∞} 状态反馈控制器和动态输出反馈降阶控制器的设计方法. 在具体推导过程中，首先基于动态耗散理论，考虑了无输入情况下系统只具不确定性闭环环节时的鲁棒 H^{∞} 稳定性问题. 然后基于这一条件，针对典型的无源类和有限增益类不确定性，推出了系统同时具有多不确定性时进行鲁棒 H^{∞} 状态反馈控制器和动态输出反馈降阶控制器设计的充分条件. 所有可解条件都可化为标准的 LMI(linear matrix inequality)求解.

关键词　H^{∞} 控制，积分二次约束，线性矩阵不等式，不确定性，状态反馈，输出反馈

中图分类号　TP273

LMI APPROACH TO ROBUST H^{∞} CONTROLLER DESIGN FOR A CLASS OF SYSTEMS WITH MULTI-UNCERTAINTIES

HU Zhong-Ji　SHI Song-Jiao　WENG Zheng-Xin

(*Institute of Automation, Shaghai Jiaotong University, Shanghai* 200030)

(E-mail: huzj@263.net)

Abstract　This paper considers the designs of static state feedback controller and dynamical reduced-order output feedback controller for a class of systems simultaneously with matrix parameter uncertainty and independent uncertainty structure which is described in the form of integral quadratic constraint. Then three problems are considered: the robust H^{∞} stability problem for systems only with IQC uncertainty structure based on dissipative dynamical system theory, the robust H^{∞} disturbance attenuation problem with static state feedback controller, and the robust H^{∞} disturbance attenuation problem with dynamical reduced-order output feedback for systems simultaneously with parameter uncertainty and IQC uncertainty structure. All the solvable sufficient conditions can be transformed into the form of LMI.

Key words　H^{∞} control, integral quadratic constraint, linear matrix inequality, un-

1) 国家自然科学基金(60004005)资助

收稿日期　1999-10-25　　收修改稿日期　2001-04-06

certainty, state feedback, output feedback

1 引言

本文中的多不确定性是指系统同时具有加型参数不确定性和积分二次约束不确定性环节. 积分二次约束可用于刻划范围广泛的一类系统不确定性环节[1,2]. 如范数不确定性仅仅利用了不确定性的增益信息，而没有利用其相位信息. 无源不确定性同时利用了系统的增益信息和相位信息. 而用积分二次约束可以统一描述这两类不确定性，它是这两种形式的推广. 另外，当积分二次约束不确定性环节部分或全部信息可量测时，本文充分利用此部分信息来进行状态反馈和输出反馈设计，以减少保守性. 基于上面两点，文中给出了具加型参数不确定性和积分二次约束不确定性环节线性系统的鲁棒 H^{∞} 状态反馈和动态输出反馈控制器设计方法. 最后的结果都可以转化为标准的 LMI 问题加以求解.

2 问题描述及预备知识

考察如下形式的线性系统

$$\Sigma:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B_p\boldsymbol{p} + B_u\boldsymbol{u} + B_w\boldsymbol{w},\\ \boldsymbol{q} = C_q\boldsymbol{x} + D_{qp}\boldsymbol{p} + D_{qu}\boldsymbol{u} + D_{qw}\boldsymbol{w},\\ \boldsymbol{z} = C_z\boldsymbol{x} + D_{zp}\boldsymbol{p} + D_{zu}\boldsymbol{u} + D_{zw}\boldsymbol{w},\\ \boldsymbol{y} = C_y\boldsymbol{x} + D_{yp}\boldsymbol{p} + D_{yw}\boldsymbol{w},\end{cases} \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{x}\in R^{n}$ 为系统状态，$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\in R^{n_q\times n_p}$ 为系统非线性环节的输入和输出，$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y})\in R^{u_u\times n_y}$ 为系统的控制输入和输出，$(\boldsymbol{w},\boldsymbol{z})\in R^{n_w\times n_z}$ 为外部干扰信号及其观测信号.

如图 1，假设系统存在不确定性环节 $\boldsymbol{p}=\psi(\boldsymbol{q},t)$，其中 $\psi(\boldsymbol{q},t)$ 为满足下面积分二次约束(IQC)的不确定性函数，即对 $\forall\ \boldsymbol{q}\in R^{n_q}$，有

$$\int_0^t[\psi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q},t)\quad \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}(t)]\pi\begin{bmatrix}\psi(\boldsymbol{q},t)\\ \boldsymbol{q}(t)\end{bmatrix}\mathrm{d}t\geqslant 0,\quad \pi=\pi^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\pi_{11} & \pi_{12}\\ \pi_{12}^{\mathrm{T}} & \pi_{22}\end{bmatrix} \tag{2}$$

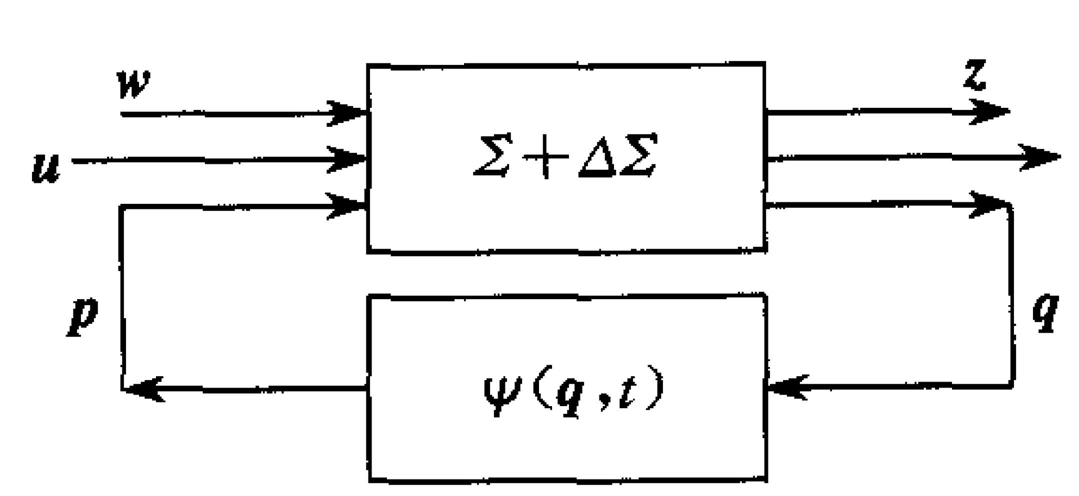

图 1　受控对象

式(2)可以表示范围很广的一类不确定性环节，特殊的 IQC 有以下几种

a) 有限增益类. $\pi=\begin{bmatrix}-I & \\ & \alpha^2 I\end{bmatrix}$，$\alpha>0$.　　b) 无源类. $\pi=\begin{bmatrix} & I\\ I & \end{bmatrix}$.

c) 耗散类. $\pi=\begin{bmatrix} & 0.5I\\ 0.5I & -\eta I\end{bmatrix}$，$\eta>0$.　　d) 结构 IQC. $\pi=\begin{bmatrix}\Lambda_{11} & \Lambda_{12}\\ \Lambda_{12} & \Lambda_{22}\end{bmatrix}$，其中 $\Lambda_{11},\Lambda_{12}$，$\Lambda_{22}$ 均为对角阵.

下面列出后面要用到的一些预备知识[3~5].

引理 1(双边投影引理). 设 Ω 为 m 阶对称矩阵，矩阵 A,B 的行数为 m，则存在适维矩阵 X 使得矩阵不等式

$$\Omega + AXB^{\mathrm{T}} + BXA^{\mathrm{T}} > 0$$

成立的充要条件为

$$A^{\circ}\Omega A^{\circ\mathrm{T}} > 0, \quad B^{\circ}\Omega B^{\circ\mathrm{T}} > 0,$$

其中 A°,B°的行向量分别为 A,B 的左零空间的基,即

$$A^{\circ}A = 0, \quad A^{\circ}A^{\circ\mathrm{T}} > 0, \quad B^{\circ}B = 0, \quad B^{\circ}B^{\circ\mathrm{T}} > 0.$$

当 $\mathrm{Rank}(A)<m$, $\mathrm{Rank}(B)<m$ 时,有

$$\boldsymbol{x} \in \chi_{gen} = \{X: X = B_R^{+}KC_L^{+} + Z - B_R^{+}B_RZC_LC_L^{+}\},$$

这里,

$$K := -R^{-1}B_L^{\mathrm{T}}TC_R^{\mathrm{T}}(C_RTC_R^{\mathrm{T}}) + R^{-1}S^{1/2}L(C_RTC_R^{\mathrm{T}})^{-1/2},$$

$$T := (B_LR^{-1}B_L^{\mathrm{T}} - \Omega)^{-1} > 0,$$

$$S := R - B_L^{\mathrm{T}}[T - TC_R^{\mathrm{T}}(C_RTC_R^{\mathrm{T}})^{-1}C_RT]B_L,$$

其中 Z 任取,$R>0$,$\|L\|<1$,而(B_L,B_R)与(C_L,C_R)分别是 B,C 的满秩分解.

引理 2(矩阵完成引理). 给定正定矩阵 $X,Y\in R^{n\times n}$, 存在适维矩阵 P_{12},P_{22},使得

$$P = \begin{bmatrix} X & P_{12} \\ P_{12}^{\mathrm{T}} & P_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & * \\ * & * \end{bmatrix}(*\text{ 表示相应的矩阵子块})$$

的充要条件为

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

上式满足时可以通过 X,Y 构造 P. 作 $X-Y^{-1}=P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^{\mathrm{T}}=LL^{\mathrm{T}}$,设 L 的满秩分解为 $L=L_lL_r$,此时可令 $P_{12}=L_l$, $P_{22}=(L_rL_r^{\mathrm{T}})^{-1}$. 易得 $\mathrm{Rank}(P_{22})=\mathrm{Rank}(X-Y^{-1})$.

引理 3[6]. 设 S,V,F 为适维实矩阵,且 $\|F\|\leqslant 1$,则对任意标量 $\varepsilon>0$,有

$$SFV + V^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}} \leqslant 1/\varepsilon \cdot SS^{\mathrm{T}} + \varepsilon V^{\mathrm{T}}V.$$

3 只具不确定性环节 ψ 时系统鲁棒 H^{∞}稳定问题

系统 Σ 内稳且具有有限 L_2 增益 $\gamma(\gamma>0)$是指: 1)当 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$ 时,系统在平衡点 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$ 处渐近稳定; 2)当 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{0}$ 时,对$\forall\ t\geqslant 0$,有

$$\int_0^t (\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{z}(s) - \gamma^2\boldsymbol{w}(s)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}(s)\mathrm{d}s \leqslant 0.$$

如系统 Σ 具有参数不确定性或者具有不确定性结构,上面条件 1)和 2)仍然成立,则称系统鲁棒内稳且具有有限 L_2 增益 γ. 鲁棒 H^{∞}稳定性即指系统输入 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ 时系统鲁棒内稳且有有限 L_2 增益. 对此,有以下定理.

定理 1. 设系统 Σ 具有不确定性环节 ψ,如存在 $P>0$,$\lambda\geqslant 0$, 使得下面线性矩阵不等式成立

$$T_0 = \left[\begin{array}{c:c:c:c} A^{\mathrm{T}}P+PA+\lambda C_q^{\mathrm{T}}\pi_2C_q & PB_p+\lambda(C_q^{\mathrm{T}}\pi_{12}^{\mathrm{T}}+C_q^{\mathrm{T}}\pi_2D_{qp}) & PB_w+C_q^{\mathrm{T}}\pi_2D_{qw} & C_z^{\mathrm{T}} \\ \hdashline \begin{array}{c} B_p^{\mathrm{T}}P+\lambda(\pi_{12}C_q+ \\ D_{qp}^{\mathrm{T}}\pi_2C_q) \end{array} & \begin{array}{c} \lambda(\pi_1+D_{qp}^{\mathrm{T}}\pi_{12}^{\mathrm{T}}+ \\ \pi_{12}D_{qp}+D_{qp}^{\mathrm{T}}\pi_2D_{qp}) \end{array} & \begin{array}{c} \lambda(\pi_{12}D_{qw}+ \\ D_{qp}^{\mathrm{T}}\pi_2D_{qw}) \end{array} & D_{zp}^{\mathrm{T}} \\ \hdashline B_w^{\mathrm{T}}P+\lambda D_{qw}^{\mathrm{T}}C & \lambda(D_{qw}^{\mathrm{T}}\pi_{12}^{\mathrm{T}}+D_{qw}^{\mathrm{T}}\pi_2D_{qp}) & -\gamma^2I+\lambda D_{qw}^{\mathrm{T}}\pi_2D_{qw} & D_{zw}^{\mathrm{T}} \\ \hdashline C_z & D_{zp} & D_{zw} & -I \end{array}\right] < 0$$

则系统 Σ 鲁棒内稳且具有有限 L_2 增益 γ.

证明. 令储存函数

$$V(\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{x}(t)P\boldsymbol{x}(t) + \lambda\int_0^t (\boldsymbol{p}^{\mathrm T}(t)\quad \boldsymbol{q}^{\mathrm T}(t))\pi(\boldsymbol{p}^{\mathrm T}(t)\quad \boldsymbol{q}^{\mathrm T}(t))^{\mathrm T}\mathrm{d}t \geqslant 0,$$

$$W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) = V(\boldsymbol{x}(t)) + \int_0^t (\boldsymbol{z}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{z}(t) - \gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{w}(t))\mathrm{d}t, \text{则有}$$

$$\mathrm{d}W/\mathrm{d}t = \mathrm{d}V/\mathrm{d}t + \boldsymbol{z}^{\mathrm T}\boldsymbol{z} - \gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm T}\boldsymbol{w} = \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm T}P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm T}P\boldsymbol{x} +$$

$$\lambda(\boldsymbol{p}^{\mathrm T}\quad \boldsymbol{q}^{\mathrm T})\begin{bmatrix}\pi_1 & \pi_{12}\\ \pi_{12}^{\mathrm T} & \pi_2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{pmatrix} + \boldsymbol{z}^{\mathrm T}\boldsymbol{z} - \gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm T}\boldsymbol{w} = [\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\quad \boldsymbol{p}^{\mathrm T}\quad \boldsymbol{w}^{\mathrm T}]T_0'[\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\quad \boldsymbol{p}^{\mathrm T}\quad \boldsymbol{w}^{\mathrm T}]^{\mathrm T},$$

$$T_0' := \begin{bmatrix}A^{\mathrm T}P+PA & PB & PB_w\\ B^{\mathrm T}P & 0 & 0\\ B_w^{\mathrm T}P & 0 & -\gamma^2 I\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & C_q^{\mathrm T}\\ I & D_{qp}^{\mathrm T}\\ 0 & D_{qp}^{\mathrm T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\pi_1 & \lambda\pi_{12}\\ \lambda\pi_{12}^{\mathrm T} & \lambda\pi_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & C_q^{\mathrm T}\\ I & D_{qp}^{\mathrm T}\\ 0 & D_{qp}^{\mathrm T}\end{bmatrix}^{\mathrm T} + \begin{bmatrix}C_z^{\mathrm T}\\ D_{zp}^{\mathrm T}\\ D_{zw}^{\mathrm T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_z^{\mathrm T}\\ D_{zp}^{\mathrm T}\\ D_{zw}^{\mathrm T}\end{bmatrix}^{\mathrm T}.$$

由 Schur 补引理易证 $T_0<0\Leftrightarrow T_0'<0$. 故当 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$ 时, $W\geqslant 0$, $\mathrm{d}W/\mathrm{d}t\leqslant 0$, 且如令 $\mathrm{d}W/\mathrm{d}t=0$, 可推出 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$, 根据 Lasalle 定理, 可知系统在平衡点 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$ 渐近稳定. 当 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{0}$ 时, 有 $\int_0^t(\gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm T}\boldsymbol{w}-\boldsymbol{z}^{\mathrm T}\boldsymbol{z})\mathrm{d}t\geqslant V(\boldsymbol{x}(t))\geqslant 0$. 原命题得证.　　证毕.

注 1. T_0 中(2,2)子块 $\pi_1+D_{qp}^{\mathrm T}\pi_{12}^{\mathrm T}+\pi_{12}D_{qp}+D_{qp}^{\mathrm T}\pi_2D_{qp}<0$, 是原系统的适定条件.

注 2. 对结构 IQC, 定理 1 仍成立, 只要把 T_0 中的 $\begin{bmatrix}\lambda\pi_1 & \lambda\pi_{12}\\ \lambda\pi_{12}^{\mathrm T} & \lambda\pi_2\end{bmatrix}$ 换为 $\begin{bmatrix}\Lambda_1 & \Lambda_{12}\\ \Lambda_{12} & \Lambda_2\end{bmatrix}$.

注 3. 当 $\pi_2=0$ 时, 如对无源类 IQC, T_0 中(1,1)子块无代数项 $\lambda C_q^{\mathrm T}\pi_2C_q$. 当 $\pi_2>0$ 时, 如对有限增益类 IQC, $T_0<0$ 可以进一步化为

$$\overline{T}_0 = \begin{bmatrix}A^{\mathrm T}P+PA & PB_p+\lambda C_q^{\mathrm T}\pi_{12}^{\mathrm T} & PB_w & C_z^{\mathrm T} & C_q^{\mathrm T}\\ B_p^{\mathrm T}P+\lambda\pi_{12}C_q & \lambda(\pi_1+D_{qp}^{\mathrm T}\pi_{12}^{\mathrm T}+\pi_{12}D_{qp}) & \lambda\pi_{12}D_{qw} & D_{zp}^{\mathrm T} & D_{qp}^{\mathrm T}\\ B_w^{\mathrm T}P & \lambda D_{qw}^{\mathrm T}\pi_{12}^{\mathrm T} & -\gamma^2 I & D_{zw}^{\mathrm T} & D_{qw}^{\mathrm T}\\ C_z & D_{zp} & D_{zw} & -I & 0\\ C_q & D_{qp} & D_{qw} & 0 & -(\lambda\pi_2)^{-1}\end{bmatrix} < 0 \tag{3}$$

4　同时具不确定性环节 ψ 和参数不确定性时系统鲁棒 H^∞ 镇定问题

4.1　状态反馈可解条件及控制律

定理 2. 考虑系统 Σ 具有不确定性环节 ψ, $\pi_2>0$, 如存在实数 $\gamma>0$, $\lambda\geqslant 0$ 和适维矩阵 $Q>0$, K_p, Y 使得下式成立

$$\overline{T}_0 = \begin{bmatrix}QA^{\mathrm T}+AQ+B_uY+Y^{\mathrm T}B_u^{\mathrm T} & \overline{B}_p+\lambda Y^{\mathrm T}D_{qu}^{\mathrm T}\pi_{12}^{\mathrm T}+\lambda QC_q^{\mathrm T}\pi_{12}^{\mathrm T} & B_w & QC_z^{\mathrm T}+Y^{\mathrm T}D_{zu}^{\mathrm T} & QC_q^{\mathrm T}+Y^{\mathrm T}D_{qu}^{\mathrm T}\\ \overline{B}_p^{\mathrm T}+\lambda\pi_{12}D_{qu}Y+\lambda\pi_{12}C_qQ & \lambda(\pi_1+\overline{D}_{qp}^{\mathrm T}\pi_{12}^{\mathrm T}+\pi_{12}\overline{D}_{qp}) & \lambda\pi_{12}D_{qw} & \overline{D}_{zp}^{\mathrm T} & \overline{D}_{qp}^{\mathrm T}\\ B_w^{\mathrm T} & \lambda D_{qw}^{\mathrm T}\pi_{12}^{\mathrm T} & -\gamma^2 I & D_{zw}^{\mathrm T} & D_{qw}^{\mathrm T}\\ C_zQ+D_{zu}Y & \overline{D}_{zp} & D_{zw} & -I & 0\\ C_qQ+D_{qu}Y & \overline{D}_{qp} & D_{qw} & 0 & -(\lambda\pi_2)^{-1}\end{bmatrix} < 0 \tag{4}$$

则状态反馈$\boldsymbol{u}=K\boldsymbol{x}+K_p\boldsymbol{p}$(其中$K=YQ^{-1}$)能使闭环系统鲁棒内稳且具有有限$L_2$增益$\gamma$.

证明. 把$\boldsymbol{u}=K\boldsymbol{x}+K_p\boldsymbol{p}$代入式(3),有

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \boldsymbol{q}\\ \boldsymbol{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{A} & \overline{B}_p & B_w\\ \overline{C}_q & \overline{D}_{qp} & D_{qw}\\ \overline{C}_z & \overline{D}_{zp} & D_{zw}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{w}\end{bmatrix},$$

其中$\begin{bmatrix}\overline{A} & \overline{B}_P\\ \overline{C}_q & \overline{D}_{qp}\\ \overline{C}_z & \overline{D}_{zp}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A+B_uK & B_P+B_uK_p\\ C_q+D_{qu}K & D_{qp}+D_{qu}K_p\\ C_z+D_{zu}K & D_{zp}+D_{zu}K_p\end{bmatrix}$.

依据定理1,同时令$Q=P^{-1},K=YQ^{-1}$,易证.对$\pi_2=0$,可类似推理. 证毕.

下面考虑系统同时具有参数不确定性以及不确定性环节ψ时的状态反馈鲁棒控制问题.首先,假定参数矩阵不确定性满足如下假设.

假设1. 名义系统Σ的各矩阵参数具有以下结构式不确定性描述

$$\begin{bmatrix}\Delta A & \Delta B_p & \Delta B_u & \Delta B_w\\ \Delta C_q & \Delta D_{qp} & \Delta D_{qu} & \Delta D_{qw}\\ \Delta C_z & \Delta D_{zp} & \Delta D_{zu} & \Delta D_{zw}\\ \Delta C_y & \Delta D_{yp} & * & \Delta D_{yw}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_1\\ E_2\\ E_3\\ E_4\end{bmatrix}F[H_1 \quad H_2 \quad H_3 \quad H_4],$$

其中Δ表示摄动,F为不确定方阵且有$\|F\|\leqslant 1$.

定理3. 考虑系统Σ同时具有不确定性环节ψ以及满足假设1的参数不确定性,且$\pi_2>0$,如存在实数$\varepsilon>0,\gamma>0,\lambda\geqslant 0$和适维矩阵$Q>0,K_p,Y$使得下式成立

$$\begin{bmatrix}\overline{T}_0 & W^{\mathrm{T}}\\ W & -I\end{bmatrix}<0 \tag{5}$$

其中$\overline{T}_0$如式(4),$W=\begin{bmatrix}1/\varepsilon\cdot E_1^{\mathrm{T}} & 1/\varepsilon\cdot E_2^{\mathrm{T}}\pi_{13}^{\mathrm{T}} & 0 & 1/\varepsilon\cdot E_3^{\mathrm{T}} & 1/\varepsilon\cdot E_2^{\mathrm{T}}\\ \varepsilon(H_1Q+H_3Y) & \varepsilon(H_2+H_3K_p) & \varepsilon H_4 & 0 & 0\end{bmatrix}$,

则状态反馈$\boldsymbol{u}=K\boldsymbol{x}+K_p\boldsymbol{p}$(其中$K=YQ^{-1}$)能使闭环系统鲁棒内稳且具有有限$L_2$增益$\gamma$.

证明. 根据定理2的证明过程,当系统满足假定1时,条件式(4)变为下式

$$\overline{T}=\overline{T}_0+SFV+V^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}<0 \tag{6}$$

其中$\overline{T}_0$如式(4),S,V为

$$S=[E_1^{\mathrm{T}} \quad \lambda E_2^{\mathrm{T}}\pi_{12}^{\mathrm{T}} \quad 0 \quad E_3^{\mathrm{T}} \quad E_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\quad V=[H_1Q+H_3Y \quad H_2+H_3K_p \quad H_4 \quad 0 \quad 0].$$

由引理3,要使式(6)成立,只需存在实数$\varepsilon>0$,使得$\overline{T}\leqslant\overline{T}_0+1/\varepsilon^2\cdot SS^{\mathrm{T}}+\varepsilon^2V^{\mathrm{T}}V<0$.即$\overline{T}_0+W^{\mathrm{T}}W<0$.根据Schur补引理易证,上式等价于式(5).原命题得证. 证毕.

在定理3中,根据Schur补引理,由式(5)可得如下关于变量ε,γ的隐含限制

$$-\gamma^2I+D_{zw}^{\mathrm{T}}D_{zw}<0,\quad \lambda_{\max}[D_{zw}]<\gamma,\quad -\varepsilon^2I+E_3E_3^{\mathrm{T}}<0.$$

进一步可得

$$\lambda_{\max}[E_3]<\varepsilon<\frac{\gamma}{\lambda_{\max}[H_4]},\quad \max[\lambda_{\max}[D_{zw}],\quad \lambda_{\max}[E_3]\lambda_{\max}[H_4]]<\gamma.$$

另外,如在假设1中,F满足如下更一般的条件,即$\|F\|\leqslant\rho$(其中$\rho>0$),则同样能得到与定理3形式相同的结果.这时,只需把E_i,H_i分别换成$\sqrt{\rho}E_i,\sqrt{\rho}H_i$即可.

4.2 输出反馈可解条件及控制律

定理4. 考虑系统Σ具有不确定性环节ψ,且$\pi_2>0$,如存在实数$\gamma>0$, $\lambda\geqslant 0$和适维矩阵$X,Y>0$使得式(7)~式(9)成立

$$M_B T_{10} M_B^{\mathrm{T}} < 0 \tag{7}$$

$$M_C T_{20} M_C^{\mathrm{T}} < 0 \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{9}$$

其中

$$T_{10} = \begin{bmatrix} YA^{\mathrm{T}} + AY & YC_z^{\mathrm{T}} & YC_q^{\mathrm{T}} & B_p & B_w \\ C_z Y & -I & 0 & D_{zp} & D_{zw} \\ C_q Y & 0 & -(\lambda\pi_2)^{-1} & D_{qp} + \pi_2^{-1}\pi_{12}^{\mathrm{T}} & D_{qw} \\ B_p^{\mathrm{T}} & D_{zp}^{\mathrm{T}} & D_{qp}^{\mathrm{T}} + \pi_{12}\pi_2^{-1} & \lambda(\pi_1 - \pi_{12}\pi_2^{-1}\pi_{12}^{\mathrm{T}}) & 0 \\ B_w^{\mathrm{T}} & D_{zw}^{\mathrm{T}} & D_{qw}^{\mathrm{T}} & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix},$$

$$T_{20} = \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}X + XA & XB_w & C_z^{\mathrm{T}} & C_q^{\mathrm{T}} \\ B_w^{\mathrm{T}}X & -\gamma^2 I & D_{zw}^{\mathrm{T}} & D_{qw}^{\mathrm{T}} \\ C_z & D_{zw} & -I & 0 \\ C_q & D_{qw} & 0 & -(\lambda\pi_2)^{-1} \end{bmatrix},\ M_B = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} B_u \\ D_{zu} \\ D_{qu} \end{bmatrix}^{\circ} & \\ & I \end{bmatrix},\ M_C = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_y^{\mathrm{T}} \\ D_{yw}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\circ} & \\ & I \end{bmatrix},$$

则如下动态输出反馈控制器 Σ_c

$$\Sigma_c: \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_c = A_c \boldsymbol{x}_c + B_c \boldsymbol{y} + B_{cp}\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{u} = C_c \boldsymbol{x}_c + D_c \boldsymbol{y} + D_{cp}\boldsymbol{p} \end{cases} \tag{10}$$

能使闭环系统鲁棒内稳且具有有限 L_2 增益 γ. 而且，输出反馈控制器的阶次可以取为 $\mathrm{Rank}(X - Y^{-1})$.

证明. 原系统 Σ 和输出反馈控制器 Σ_c 组成的闭环系统为

$$\Sigma_f: \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_c \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{q} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A} & \overline{B}_p & \overline{B}_w \\ \overline{C}_z & \overline{D}_{zp} & \overline{D}_{zw} \\ \overline{C}_q & \overline{D}_{qp} & \overline{D}_{qw} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_c \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{q} \end{pmatrix},$$

其中各矩阵参数形式为

$$\begin{bmatrix} \overline{A} & \overline{B}_p & \overline{B}_w \\ \overline{C}_z & \overline{D}_{zp} & \overline{D}_{zw} \\ \overline{C}_q & \overline{D}_{qp} & \overline{D}_{qw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_p & \hat{B}_w \\ \hat{C}_z & \hat{D}_{zp} & \hat{D}_{zw} \\ \hat{C}_q & \hat{D}_{qp} & \hat{D}_{qw} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_u \\ \hat{D}_{zu} \\ \hat{D}_{qu} \end{bmatrix} G [\hat{C}_y \quad \hat{D}_{yp} \quad \hat{D}_{yw}] =$$

$$\left[\begin{array}{cc:c:c} A & 0 & B_p & B_w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline C_z & 0 & D_{zp} & D_{zw} \\ \hdashline C_q & 0 & D_{qp} & D_{qw} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc} B_u & 0 \\ 0 & I \\ \hdashline D_{zu} & 0 \\ \hdashline D_{qu} & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} C_c & D_c & D_{cp} \\ A_c & B_c & B_{cp} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc:c:c} 0 & I & 0 & 0 \\ C_y & 0 & D_{yp} & D_{yw} \\ 0 & 0 & I & 0 \end{array}\right] \tag{11}$$

依据定理 1，把闭环系统各参数代入式(3)，有

$$\Omega + BGC^{\mathrm{T}} + CGB^{\mathrm{T}} < 0 \tag{12}$$

其中

$$\Omega = \left[\begin{array}{c:c:c:c:c} \hat{A}^{\mathrm{T}}P + P\hat{A} & P\hat{B}_p + \lambda\hat{C}_q^{\mathrm{T}}\pi_{12}^{\mathrm{T}} & P\hat{B}_w & \hat{C}_z^{\mathrm{T}} & \hat{C}_q^{\mathrm{T}} \\ \hdashline \hat{B}_p^{\mathrm{T}}P + \lambda\pi_{12}\hat{C}_q & \lambda(\pi_1 + \hat{D}_{qp}^{\mathrm{T}}\pi_{12}^{\mathrm{T}} + \pi_{12}\hat{D}_{qp}) & \lambda\pi_{12}\hat{D}_{qw} & \hat{D}_{zp}^{\mathrm{T}} & \hat{D}_{qp}^{\mathrm{T}} \\ \hdashline \hat{B}_w^{\mathrm{T}}P & \lambda\hat{D}_{qw}^{\mathrm{T}}\pi_{12}^{\mathrm{T}} & -\gamma^2 I & \hat{D}_{zw}^{\mathrm{T}} & \hat{D}_{qw}^{\mathrm{T}} \\ \hdashline \hat{C}_z & \hat{D}_{zp} & \hat{D}_{zw} & -I & 0 \\ \hdashline \hat{C}_q & \hat{D}_{qp} & \hat{D}_{qw} & 0 & -(\lambda\pi_2)^{-1} \end{array}\right],$$

$$B^{\mathrm{T}}=[\hat{B}_u^{\mathrm{T}}P \quad \lambda\hat{D}_{qu}^{\mathrm{T}}\pi_{12} \quad 0 \quad \hat{D}_{zu}^{\mathrm{T}} \quad \hat{D}_{qu}^{\mathrm{T}}],\quad C=[\hat{C}_y \quad \hat{D}_{yp} \quad \hat{D}_{yw} \quad 0 \quad 0],$$

根据引理 1 可知

$$C^{\circ}\Omega C^{\circ\mathrm{T}}<0,\quad B^{\circ}\Omega B^{\circ\mathrm{T}}<0 \tag{13}$$

由式(11)可得出 B,C 的具体表达式,进一步可推出

$$B^{\circ}=M_B\begin{bmatrix} I & & & & & \\ & & & I & & \\ & & & & & I \\ & I & & & & \\ & & I & & & \\ & & & & I & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (P^{-1})_{n+n_c} & & & & \\ & I & & -\lambda\pi_{12} & \\ & & I & & \\ & & & I & \\ & & & & I \end{bmatrix},\quad C^{\circ}=M_C\begin{bmatrix} I & & & & & \\ & & I & & & \\ & I & & & & \\ & & & I & & \\ & & & & I & \\ & & & & & I \end{bmatrix},$$

令

$$P=\begin{bmatrix} X & P_{12} \\ P_{12}^{\mathrm{T}} & P_{22} \end{bmatrix},\quad Q=P^{-1}=\begin{bmatrix} Y & * \\ * & * \end{bmatrix},$$

由引理 2 得

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix}\geqslant 0,\quad X-Y^{-1}=P_{12}^{\mathrm{T}}P_{22}P_{12}.$$

把 B°,C°,P,Q 及式(11)中各矩阵参数表达式代入式(13),经过整理简化,可得式(7)和式(8),依据定理 1,原命题得证. 由推导过程知,x_c 维数等于方阵 P_{22} 的秩数,由于 $\mathrm{Rank}(P_{22})\geqslant\mathrm{Rank}(X-Y^{-1})$,故动态输出反馈控制器的阶数可降为 $\mathrm{Rank}(X-Y^{-1})$. 证毕.

注 4. 对 $\pi_2=0$ 的情况,可同样推导.

注 5. 对积分二次约束不确定性环节控制变量 $\boldsymbol{p}$ 只有部分可量测的情况,可设 $\boldsymbol{p}=[\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,并假定只有 $\boldsymbol{p}_1$ 可量测,这时对各矩阵作以下分解:

$$\begin{bmatrix} B_{cp} \\ D_{cp} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{cp1} & B_{cp2} \\ D_{cp1} & D_{cp2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{n_{p1}} & \\ & 0 \end{bmatrix},\quad [\pi_1 \quad \pi_2]=\left[\begin{array}{cc:c} * & * & * \\ * & \pi_{122} & \underline{\pi_{122}} \end{array}\right],\quad \begin{bmatrix} B_p \\ D_{zp} \\ D_{qp} \\ D_{yp} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{p1} & B_p \\ D_{zp1} & D_{zp2} \\ D_{qp1} & D_{qp2} \\ D_{yp1} & D_{yp2} \end{bmatrix} \tag{14}$$

此时,有下面定理.

定理 5. 考虑系统 Σ 具有不确定性环节 ψ,$\pi_2>0$,控制变量 p 只有部分可量测且系统各矩阵有如式(14)所示分解,如存在实数 $\gamma>0$,$\lambda\geqslant 0$ 和适维矩阵 $X,Y>0$ 使得式(7),式(9),式(15)成立

$$M_C\left[\begin{array}{c:c:c:c:c} A^{\mathrm{T}}X+XA & XB_{p_2}+\lambda C_q^{\mathrm{T}}\underline{\pi_{122}}^{\mathrm{T}} & XB_w & C_z^{\mathrm{T}} & C_q^{\mathrm{T}} \\ \hdashline B_{p_2}^{\mathrm{T}}X+\lambda\underline{\pi_{122}}C_q & \lambda(\pi_{122}+\underline{\pi_{122}}D_{qp2}+D_{qp2}\underline{\pi_{122}}^{\mathrm{T}}) & \lambda\underline{\pi_{122}}D_{qw} & D_{zp2}^{\mathrm{T}} & D_{qp2}^{\mathrm{T}} \\ \hdashline B_wX & \lambda D_{qw}^{\mathrm{T}}\underline{\pi_{122}}^{\mathrm{T}} & -\gamma^2 I & D_{zw}^{\mathrm{T}} & D_{qw}^{\mathrm{T}} \\ \hdashline C_z & D_{zp2} & D_{zw} & -I & 0 \\ \hdashline C_q & D_{qp2} & D_{qw} & 0 & -(\lambda\pi_2)^{-1} \end{array}\right]M_c^{\mathrm{T}}<0 \tag{15}$$

这里　$M_C=\mathrm{Diag}(([C_y \quad D_{yp2} \quad D_{yw}]^{\mathrm{T}})^{\circ}, I)$，

则动态输出反馈控制器 Σ_c

$$\Sigma_c:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_c = A_c\boldsymbol{x}_c + B_c\boldsymbol{y} + B_{cp_1}\boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{u} = C_c\boldsymbol{x} + D_c\boldsymbol{y} + D_{cp_1}\boldsymbol{p}_1\end{cases} \tag{16}$$

能使闭环系统鲁棒内稳且具有有限 L_2 增益 γ. 而且输出反馈控制器的阶次可以取为 $\mathrm{Rank}(X-Y^{-1})$.

证明. 略.

注 6. 输出反馈控制器的求解步骤如下

1) 求解式(7)～式(9)或式(7)，式(9)，式(15)，得到实数 $\lambda\geqslant 0$ 和正定矩阵 $X>0, Y>0$；

2) 利用引理 2，构造 P，并进一步求得式(12)中矩阵 Ω, B, C 的值；

3) 根据引理 1，求解矩阵不等式(12)，得到 G，再从 G 中分离 $A_c, B_c, B_{cp}, C_c, D_c, D_{cp}$.

下面考虑系统同时具有参数不确定性和不确定性环节 ψ 时的输出反馈的鲁棒控制问题. 首先，假定参数不确定性满足如下假设.

假设 2. 名义系统 Σ 的各矩阵参数具有以下加型不确定性

$$\begin{bmatrix}\Delta A & \Delta B_p & \Delta B_w \\ \Delta C_q & \Delta D_{qp} & \Delta D_{qw} \\ \Delta C_z & \Delta D_{zp} & \Delta D_{zw}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E_1 \\ E_2 \\ E_3\end{bmatrix} F[H_1 \quad H_2 \quad H_3],$$

其中 Δ 表示摄动，F 为不确定方阵且有 $\|F\|\leqslant 1$.

定理 6. 考虑系统 Σ 满足假设 2 以及具有不确定性环节 ψ，且 $\pi_2>0$，如果存在实数 ε_1，$\varepsilon_2>0, \gamma>0, \lambda\geqslant 0$ 和适维矩阵 $X, Y>0$ 使得式(9)，式(17)成立

$$\begin{bmatrix}M_B & \\ & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_{10} & W_1^{\mathrm{T}} \\ W_1 & -I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_B^{\mathrm{T}} & \\ & I\end{bmatrix}<0, \quad \begin{bmatrix}M_C & \\ & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_{20} & W_2^{\mathrm{T}} \\ W_2 & -I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_C^{\mathrm{T}} & \\ & I\end{bmatrix}<0 \tag{17}$$

其中 M_B, M_C, T_{10}, T_{20} 如定理 4 中所示，其它有

$$W_1^{\mathrm{T}} = \left[\frac{1}{\varepsilon_1}S_1 \quad \varepsilon_1 V_1\right], \quad W_2^{\mathrm{T}} = \left[\frac{1}{\varepsilon_2}S_2 \quad \varepsilon_2 V_2\right],$$

$$S_1^{\mathrm{T}} = [E_1^{\mathrm{T}} \quad E_3^{\mathrm{T}} \quad E_2^{\mathrm{T}} \quad 0 \quad 0], \quad S_2^{\mathrm{T}} = [E_1^{\mathrm{T}}X \quad 0 \quad E_3^{\mathrm{T}} \quad E_2^{\mathrm{T}}],$$

$$V_1 = [H_1 Y \quad 0 \quad 0 \quad H_2 \quad H_3], \quad V_2 = [H_1 \quad H_3 \quad 0 \quad 0],$$

则动态输出反馈控制器 Σ_c 如式(10)能使闭环系统鲁棒内稳且具有有限 L_2 增益 γ. 而且输出反馈控制器的阶次可以取为 $\mathrm{Rank}(X-Y^{-1})$.

证明. 略.

5　结论

对于具有积分二次约束不确定性环节的线性系统，如果它的不确定性环节控制变量可量测，或部分可量测，则进行系统的 H^{∞} 状态反馈和 H^{∞} 动态输出反馈设计时可以充分利用这一信息. 对输出反馈，本文设计控制器可以是降阶的. 而且，当系统同时具有参数不确定性和不确定性环节 ψ 时，可以同样处理其相应的鲁棒 H^{∞} 控制器设计问题. 无论对状态反

馈,还是对动态输出反馈,上述问题的可解条件都能用线性矩阵不等式表示.另外,对于系统具有其它类型不确定性时的鲁棒问题及其应用问题,本文进一步研究的后续工作正在进行中.

参 考 文 献

1 Yakubovich V A. Nonconvex optimization problem: The infinite-horizon linear quadratic control problem with quadratic constraints. *System and Control Letters*, 1992, **19**(1):13~22

2 Megretski A, Rantzer A. System analysis via integral constraints. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1997, **42**(6):819~829

3 Boyd S, Ghaoui L E, Feron E *et al.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994

4 Apkarian P, Becker G, Gahinet P, Kajiwara H. LMI techniques in control engineering from theory to practice: Workshop notes. In: Proc. 35th IEEE Conf. Decision and Control, Kobe, Japan:1996

5 Iwasaki T, Skelton R E. All controllers for the general H^∞ control problem: LMI existence condition and state space formulas. *Automatica*, 1994, **30**:1307~1317

6 Li Xi, Carlos E De Souza. Delay-dependent stability and stabilization of uncertain linear delay systems: A linear matrix inequalities approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1997, **42**(8):1144~1148

胡中骥 上海交通大学自动化系博士研究生.主要研究方向为鲁棒控制和 H^∞控制、LMI.

施颂椒 上海交通大学自动化系教授,博士生导师.主要研究方向为鲁棒控制、自适应控制及其应用等.

翁正新 上海交通大学自动化系副教授,博士.主要研究方向为鲁棒控制、模糊控制及其应用等.