第 28 卷 第 2 期
2002 年 3 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 28, No. 2
Mar., 2002

研究简报

LURIE 控制系统的时滞相关绝对稳定性判据1)

徐炳吉 廖晓昕
(华中科技大学控制科学与工程系 武汉 430074)

关键词 Lurie 控制系统，绝对稳定性，Razumikhin 定理
中图分类号 TP13, TP202

ABSOLUTE STABILITY CRITERIA OF DELAY-DEPENDENT FOR LURIE CONTROL SYSTEMS

XU Bing-Ji LIAO Xiao-Xin
(*Department of Control Science & Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan* 430074)

Key words Lurie control system, absolute stability, Razumikhin theorem

1 引言

关于具有时滞的 Lurie 控制系统的绝对稳定性的讨论已有不少结果[1~4]，其绝对稳定性条件有时滞无关条件和时滞相关条件两种. 由于时滞无关条件缺少了时滞的信息，因此必然会使其稳定性具有保守性. 下面对具有多个时变时滞的 Lurie 控制系统，利用不同于文献[1]的方法进行讨论，给出系统绝对稳定的时滞相关判据. 算例表明，与文献[1]的结果相比本文结果可降低保守性.

2 主要结论

考虑如下具有多个时变时滞的 Lurie 控制系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i x(t-\tau_i(t)) + bf(\sigma(t)), \\ \sigma(t) = c^{\mathrm{T}} x(t),\end{cases} \tag{1}$$

其中实向量函数 $x(t)\in R^n$，实矩阵 $A, B_i\in R^{n\times n}(i=1,2,\cdots,m)$ 向量 $b, c\in R^n$，时变连续函数 $\tau_i(t)$ 满足条件 $0<\tau_i(t)\leqslant\tau(i=1,2,\cdots,m)$，$f(\cdot)\in F_{[0,k]}=\{f(\cdot)\,|\,f(0)=0,\ 0<\sigma f(\sigma)\leqslant$

1) 国家自然科学基金(60074008)及高等学校博士学科点专项基金(97048722)资助
收稿日期 1999-11-02 收修改稿日期 2000-09-06

$k\sigma^2$, $\sigma\neq 0$, $f(\cdot)$连续}.

文中约定:对任意矩阵 A, $\|A\|=\sqrt{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)}$, $\lambda_{\max}(P)$及 $\lambda_{\min}(P)$分别为矩阵 P 的最大、最小特征值;对任意向量 γ, $\|\gamma\|=\sqrt{\gamma^{\mathrm{T}}\gamma}$.

定理 1. 若 1)矩阵 $A_0=A+\sum_{i=1}^{m}B_i$ 渐近稳定;

2) 正定矩阵 P,Q 满足

$$A_0^{\mathrm{T}}P+PA_0=-Q \tag{2}$$

3) $$\tau<\frac{\lambda_{\min}(Q-\varepsilon P^2)-\frac{1}{\varepsilon}\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2k^2}{\varepsilon(m+2)\sum_{i=1}^{m}\|PB_i\|^2+\frac{m\alpha^2}{\varepsilon}\left(\|A\|^2+\sum_{i=1}^{m}\|B_i\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2k^2\right)} \tag{3}$$

其中

$$\frac{1-\sqrt{1-\beta}}{2\left\|Q^{-\frac{1}{2}}P\right\|^2}<\varepsilon<\frac{1+\sqrt{1-\beta}}{2\left\|Q^{-\frac{1}{2}}P\right\|^2} \tag{4}$$

$$\alpha=\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}},\quad \beta=\frac{4\left\|Q^{-\frac{1}{2}}P\right\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2k^2}{\lambda_{\min}(Q)} \tag{5}$$

则系统(1)绝对稳定.

证明. 将式(1)化为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A_0\boldsymbol{x}(t)-\sum_{i=1}^{m}B_i\int_{t-\tau_i(t)}^{t}\left[A\boldsymbol{x}(s)+\sum_{j=1}^{m}B_j\boldsymbol{x}(s-\tau_j(s))+\boldsymbol{b}f(\sigma(s))\right]\mathrm{d}s+\boldsymbol{b}f(\sigma(t)) \tag{6}$$

取 Lyapunov 函数

$$V(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{x}(t) \tag{7}$$

则沿式(6)的任一解关于 t 求导,有

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(6)}=-2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)Q\boldsymbol{x}(t)+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{b}f(\sigma(t))-$$
$$2\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\tau_i(t)}^{t}\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)PB_iA\boldsymbol{x}(s)+\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)PB_iB_j\boldsymbol{x}(s-\tau_j(s))+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)PB_i\boldsymbol{b}f(\sigma(s))\right]\mathrm{d}s \tag{8}$$

由式(7)及 Razumikhin 定理,假定对任意实数 $q>1$, $V(\boldsymbol{x}(\xi))<q^2V(\boldsymbol{x}(t))$, $t-2\tau\leqslant\xi\leqslant t$,则 $\|\boldsymbol{x}(\xi)\|\leqslant q\alpha\|\boldsymbol{x}(t)\|$, 利用向量不等式 $2\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\leqslant\varepsilon\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}+\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in R^n$($\varepsilon>0$ 为任意实数),我们有

$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{b}f(\sigma(t))\leqslant\varepsilon\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)PP\boldsymbol{x}(t)+\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}f^2(\sigma(t))\leqslant$$
$$\varepsilon\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P^2\boldsymbol{x}(t)+\frac{1}{\varepsilon}\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2k^2\|\boldsymbol{x}(t)\|^2 \tag{9}$$

$$-2\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\tau_i(t)}^{t}\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)PB_iA\boldsymbol{x}(s)+\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)PB_iB_j\boldsymbol{x}(s-\tau_j(s))+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)PB_i\boldsymbol{b}f(\sigma(s))\right]\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\tau_i(t)}^{t}\Big\{2\varepsilon\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)PB_i(PB_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t)+\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}(s)+\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}f^2(\sigma(t))+$$
$$\sum_{j=1}^{m}\Big[\varepsilon\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)PB_i(PB_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t)+\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s-\tau_j(s))B_j^{\mathrm{T}}B_j\boldsymbol{x}(s-\tau_j(s))\Big]\Big\}\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{m}\tau\Big[\varepsilon(m+2)\|PB_i\|^2\|\boldsymbol{x}(t)\|^2+\frac{q^2\alpha^2}{\varepsilon}\Big(\|A\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2k^2+\sum_{j=1}^{m}\|B_j\|^2\Big)\|\boldsymbol{x}(t)\|^2\Big]=$$
$$\tau\Big[\varepsilon(m+2)\sum_{i=1}^{m}\|PB_i\|^2+\frac{mq^2\alpha^2}{\varepsilon}\Big(\|A\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2k^2+\sum_{i=1}^{m}\|B_i\|^2\Big)\Big]\|\boldsymbol{x}(t)\|^2 \tag{10}$$

将式(9),式(10)代入式(8)得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(6)}\leqslant-\Big[\lambda_{\min}(Q-\varepsilon P^2)-\frac{1}{\varepsilon}\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2k^2\Big]\|\boldsymbol{x}(t)\|^2+\tau\Big[\varepsilon(m+2)\sum_{i=1}^{m}\|PB_i\|^2+$$
$$\frac{mq^2\alpha^2}{\varepsilon}\Big(\|A\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2k^2+\sum_{i=1}^{m}\|B_i\|^2\Big)\Big]\|\boldsymbol{x}(t)\|^2=-w\|\boldsymbol{x}(t)\|^2 \tag{11}$$

其中

$$w=\lambda_{\min}(Q-\varepsilon P^2)-\frac{1}{\varepsilon}\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2k^2-$$
$$\tau\Big[\varepsilon(m+2)\sum_{i=1}^{m}\|PB_i\|^2+\frac{mq^2\alpha^2}{\varepsilon}\Big(\|A\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2k^2+\sum_{i=1}^{m}\|B_i\|^2\Big)\Big].$$

若式(3)成立,则必存在常数 $q>1$ 使得 $w>0$,由文献[5]中定理 4.2 知,系统(1)绝对稳定. 证毕.

定理 2. 若 1) 矩阵 $A_0=A+\sum_{i=1}^{m}B_i$ 渐近稳定;

2) 正定矩阵 P,Q 满足 $A_0^{\mathrm{T}}P+PA_0=-Q$;

3) $\tau<T=$

$$\frac{\lambda_{\min}^2(Q)M\rho-2\|P\|^2[(LM-N\|P\|^2)(LM-N\|P\|^2+\rho)+MN\lambda_{\min}^2(Q)]}{2M[(LM-N\|P\|^2)(LM-N\|P\|^2+\rho)+MN\lambda_{\min}^2(Q)]} \tag{12}$$

其中

$$L=\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2k^2,\quad M=(m+2)\sum_{i=1}^{m}\|PB_i\|^2 \tag{13a}$$

$$N=m\alpha^2\Big(\|A\|^2+\sum_{i=1}^{m}\|B_i\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2k^2\Big) \tag{13b}$$

$$\rho=\sqrt{(LM-N\|P\|^2)^2+MN\lambda_{\min}^2(Q)} \tag{13c}$$

则系统(1)绝对稳定.

证明. 令

$$g(\varepsilon)=\frac{\lambda_{\min}(Q)-\varepsilon\|P\|^2-\frac{1}{\varepsilon}\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2k^2}{\varepsilon(m+2)\sum_{i=1}^{m}\|PB_i\|^2+\frac{m\alpha^2}{\varepsilon}\Big(\|A\|^2+\sum_{i=1}^{m}\|B_i\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2k^2\Big)},$$

$$T(\varepsilon)=\frac{\lambda_{\min}(Q-\varepsilon P^2)-\frac{1}{\varepsilon}\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2k^2}{\varepsilon(m+2)\sum_{i=1}^{m}\|PB_i\|^2+\frac{m\alpha^2}{\varepsilon}\Big(\|A\|^2+\sum_{i=1}^{m}\|B_i\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2k^2\Big)},$$

则 $g(\varepsilon)\leqslant T(\varepsilon)$，故由定理 1 知，当 $\tau<g(\varepsilon)$ 时系统(1)绝对稳定.

由 $g'(\varepsilon)=0$，得 $\varepsilon_0=\dfrac{LM-N\|P\|^2+\rho}{M\lambda_{\min}(Q)}$，因 $g''(\varepsilon_0)<0$，故 $g(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=\varepsilon_0$ 处取得最大值 $g(\varepsilon_0)=T$，因此定理结论成立. 证毕.

3 例

考虑如下时滞 Lurie 型控制系统[1]

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.2 & -0.5\\ 0.5 & -0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t-\tau)\\ x_2(t-\tau)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.2\\ -0.3\end{bmatrix}f(\sigma(t)),$$

$\sigma(t)=0.6x_1(t)+0.8x_2(t)$，$f\in F_{[0,0.5]}$.

取 $P=I$ 则 $\alpha=1$，$Q=\begin{bmatrix}4.4 & 1\\ 1 & 4.4\end{bmatrix}$，$\lambda_{\min}(Q)=3.4$，由定理 1 可得 $0.0096<\varepsilon<3.3904$，取 $\varepsilon=1.33$ 得 $\tau<0.3230$；由定理 2 得 $\tau<0.3230$，而文献[1]的结果为 $\tau<0.3053$.

若取 $Q=I$ 则 $\alpha=1.5880$，$P=\begin{bmatrix}0.23965 & -0.05446\\ -0.05446 & 0.23965\end{bmatrix}$，$\lambda_{\min}(Q)=1$. 由定理 1 可得 $0.0326<\varepsilon<11.5281$，取 $\varepsilon=4.8$ 得 $\tau<0.2190$；由定理 2 得 $\tau<0.2191$. 而由文献[1]得 $\tau<0.0800$，可见本文的结果较文献[1]具有更低的保守性.

4 结论

本文基于 Razumikhin 定理与向量不等式的方法，得到了具有多个时变时滞的 Lurie 控制系统的时滞相关绝对稳定性判据. 算例表明与文献[1]的结果比较，利用本文的稳定性判据可给出时滞界限较高的估计.

参 考 文 献

1 年晓红. Lurie 控制系统绝对稳定的时滞相关条件. 自动化学报，1999，**25**(4)：564～566

2 Wang P G. Absolute stability of Lurie indirect control systems with delay-time. *Advances in Modelling & Simulation*, 1992, **29**(3)：43～49

3 Somolines A. Stability of Lurie-type functional equations. *J. Differential Equations*, 1977, **26**(2)：191～199

4 Liao X X. Absolute Stability of Nonlinear Control Systems. Kluwer Academic Publishers, 1993

5 Hale J K. Theory of Functional Differential Equation. New York: Springer-Verlag, 1977

徐炳吉 副教授，博士. 主要研究方向为非线性控制及稳定性.

廖晓昕 教授，博士生导师. 主要研究方向为神经网络及非线性控制.