第 28 卷 第 1 期
2002 年 1 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 28, No. 1
Jan., 2002

线性不确定系统鲁棒滤波器设计[1)]

刘诗娜　　费树岷　　冯纯伯

（东南大学自动化所　南京　210096）

（E-mail: infcon@seu.edu.cn）

摘　要　分别研究了一类线性不确定连续和离散系统的鲁棒保成本滤波器的设计问题. 采用保成本滤波器(guaranteed cost filter)的设计思想, 用线性矩阵不等式的形式给出鲁棒保成本滤波器存在的简便检验条件, 由 LMI 的解直接得到滤波器各参数的值. 对鲁棒保成本滤波器存在的系统, 进一步优化成本矩阵, 获得了最优鲁棒保成本滤波器. 最后给出一个仿真实例, 结果验证了方法的有效性.

关键词　不确定系统, 鲁棒保成本滤波器, LMI 方法

中图分类号　TP273

ROBUST FILTER DESIGN FOR LINEAR UNCERTAIN SYSTEM

LIU Shi-Na　FEI Shu-Min　FENG Chun-Bo

(*Institute of Automation, Southeast University, Nanjing* 210096)

(E-mail: infcon@seu.edu.cn)

Abstract　The robust guaranteed cost filter design problem for linear uncertain system is studied, including continuous-time and discrete-time systems. The design idea of the guaranteed cost filter is adopted. The convenient test approach for the existence of robust guaranteed cost filter is presented in the form of linear matrix inequality (LMI). Moreover, the parameters of the filter are determined directly by solutions of the LMI. If the robust guaranteed cost filter exists, the cost matrix can be optimized to get the optimal robust guaranteed cost filter. At last, a simulation example is given and the results demonstrate the effectiveness of the approach.

Key words　Uncertain system, guaranteed cost filter, LMI approach

1　引言

近年来对不确定系统的状态滤波问题已越来越受到人们的重视[1~4], 系统的最优保成本滤波[1]、H_∞滤波[2,3]、鲁棒 H_∞滤波[4]等滤波器的设计和理论均说明了这一点. 本文分别

1) 国家自然基金(69604003, 69934010)和国家攀登计划(970211017)资助.

收稿日期　2000-04-21　　收修改稿日期　2000-12-08

针对含范数有界的不确定量的连续和离散线性系统,采用线性矩阵不等式(Linear Matrix Inequality,LMI)方法进行鲁棒保成本滤波器的设计. 保成本滤波器的优点是除了保证稳定性外,还提供了一个给定性能指标的上界(即所谓的保成本),且可通过优化其上界获得最优保成本滤波器. 最初保成本滤波器的参数是通过解一个代数 Riccati 方程来获得的[1,2]. 而 Riccati 方程不便于参数的调整. 线性矩阵不等式可解决参数调整的困难,可方便处理各种附加约束,如成本矩阵上界值的限制等.

2　连续不确定系统的鲁棒保成本滤波器设计

考虑如下不确定线性连续系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A + \Delta A(t))\boldsymbol{x}(t) + B_1\boldsymbol{w}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = (C + \Delta C(t))\boldsymbol{x}(t) + B_2\boldsymbol{w}(t),\end{cases} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 为系统状态;$\boldsymbol{y}(t)\in R^m$ 为测量输出;$\boldsymbol{w}(t)\in R^p$ 为系统外部干扰输入;A,B_1,B_2,C 为具有相应维数的已知矩阵. $\boldsymbol{x}_0$ 为初始条件,且假设为零均值高斯随机向量,$\Delta A(t)$,$\Delta C(t)$分别代表系统矩阵与测量矩阵中的不确定性.

假设 1. 存在适当维数的已知常矩阵 D_1,D_2,F,使$\begin{bmatrix}\Delta A(t)\\ \Delta C(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\end{bmatrix}\Delta(t)F$,其中 $\Delta(t)$为不确定矩阵,满足 $\Delta^{\mathrm{T}}(t)\Delta(t)\leqslant I$.

假设 2. 外部干扰输入 $\boldsymbol{w}(t)$为零均值单位白噪声过程.

假设 3. 系统(1)为二次稳定[1].

考虑如下形式的滤波器

$$\Psi:\ \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = G\hat{\boldsymbol{x}}(t) + K\boldsymbol{y}(t), \quad \hat{\boldsymbol{x}}(t_0) = \hat{\boldsymbol{x}}_0 \tag{2}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)\in R^n$ 为 $\boldsymbol{x}(t)$的滤波估计, $G\in R^{n\times n}$, $K\in R^{n\times m}$为滤波器参数,$\hat{\boldsymbol{x}}_0$ 为初始条件,假定为高斯随机向量. 令 $\boldsymbol{e}(t)=\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t)$,由式(1),(2)可得增广系统为

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t) = \bar{A}\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \bar{D}\Delta(t)\bar{F}\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \bar{B}\boldsymbol{w}(t), \quad \bar{\boldsymbol{x}}(t_0) = \bar{\boldsymbol{x}}_0 \tag{3}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{e}(t)\end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{x}}_0 = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}_0\end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix}A & 0\\ A - G - KC & G\end{bmatrix} \tag{4a}$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix}D_1\\ D_1 - KD_2\end{bmatrix}, \quad \bar{F} = [F \quad 0], \quad \bar{B} = \begin{bmatrix}B_1\\ B_1 - KB_2\end{bmatrix} \tag{4b}$$

定义 1. 考虑不确定系统(1),若存在滤波器 Ψ^* 和正定对称阵 Q^* 使得对所有满足假设 1 的不确定性,增广系统(3)为二次稳定,且稳态误差的协方差 $Q_\Delta(t)=\lim\limits_{t_0\to-\infty}\mathrm{E}\{\boldsymbol{e}(t)\boldsymbol{e}(t)^{\mathrm{T}}\}$ 满足 $Q_\Delta(t)\leqslant Q^*$,则称 Q^* 为保成本, Ψ^* 为鲁棒保成本滤波器.

定理 1. 如果存在稳定阵 G 及对称正定阵 $\bar{Q}=\begin{bmatrix}Q_1 & Q_{12}\\ Q_{12}^{\mathrm{T}} & Q_2\end{bmatrix}$,使

$$[\bar{A} + \bar{D}\Delta(t)\bar{F}]\bar{Q} + \bar{Q}[\bar{A} + \bar{D}\Delta(t)\bar{F}]^{\mathrm{T}} + \bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}} < 0 \tag{5}$$

其中 $\Delta^{\mathrm{T}}(t)\Delta(t)\leqslant I$. 则式(3)是保成本为 Q_2 的鲁棒保成本滤波器.

注释 1. 用误差的协方差矩阵作为成本函数的表示，物理意义直观明了. 定理 1 给出系统(1)鲁棒保成本滤波器存在的充分条件. 显然，条件(5)式是不可验证的，为获得滤波器存在的易于检验的条件，本文将用 LMI 形式给出滤波器存在的条件.

引理 1[5]. 给定矩阵 Y,H,E 分别具有适当维数，Y 对称，则

$$Y + H\Delta E + E^{\mathrm{T}}\Delta^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}} < 0, \quad \Delta^{\mathrm{T}}\Delta \leqslant I$$

成立的充分必要条件为：存在 $\varepsilon>0$，使得式 $Y+\varepsilon HH^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}E^{\mathrm{T}}E<0$ 成立.

引理 2[6]. 设 O 为 n 阶对称矩阵，$\mathrm{rank}B=r_b<n$，$\mathrm{rank}C=r_c<n$，则

$BXC^{\mathrm{T}}+(BXC^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}+O<0$ 关于 X 有解的充要条件是：$B^{\perp}OB^{\perp\mathrm{T}}<0$，$C^{\perp}OC^{\perp\mathrm{T}}<0$.

其中 $B^{\perp}$，$C^{\perp}$ 分别表示 B,C 的正交补，即：$B^{\perp}B=0$，$C^{\perp}C^{\mathrm{T}}=0$ 且 $B^{\perp}B^{\perp\mathrm{T}}>0$，$C^{\perp}C^{\perp\mathrm{T}}>0$.

定理 2. 不确定系统(1)满足定理 1 条件的充分必要条件是存在 $\varepsilon>0$，矩阵 $Q_{12}\in R^{n\times n}$，对称正定阵 $X_1,Q_2,\Omega,L\in R^{n\times n}$，使下列不等式同时成立

$$\begin{bmatrix} X_1A + A^{\mathrm{T}}X_1 + \varepsilon^{-1}F^{\mathrm{T}}F & X_1B_1 & X_1D_1 \\ B_1^{\mathrm{T}}X_1 & -I & 0 \\ D_1^{\mathrm{T}}X_1 & 0 & -\varepsilon^{-1}I \end{bmatrix} < 0 \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} \Omega A_1 + A_1^{\mathrm{T}}\Omega + \varepsilon^{-1}F^{\mathrm{T}}F - \varepsilon^{-1}W_1^{\mathrm{T}}W_1 & \Omega A_2 - \varepsilon^{-1}W_1^{\mathrm{T}}W_2 \\ A_2^{\mathrm{T}}\Omega - \varepsilon^{-1}W_2^{\mathrm{T}}W_1 & -I - \varepsilon^{-1}W_2^{\mathrm{T}}W_2 \end{bmatrix} < 0 \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} \Omega + L & I & I \\ I & Q_2 & Q_{12}^{\mathrm{T}} \\ I & Q_{12} & X_1^{-1} \end{bmatrix} > 0 \tag{8}$$

其中 $A_1=A+D_1W_1$，$A_2=B_1+D_1W_2$，$\begin{bmatrix} I & I & 0 & W_1^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & I & W_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$为$\begin{bmatrix} I & -I & 0 & 0 \\ C & 0 & B_2 & D_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 的正交补.

若矩阵不等式(6)～(8)有解 Q_{12}，及 $X_1,Q_2,\Omega,L,\varepsilon>0$，则存在鲁棒保成本滤波器. 且由下式确定 G_1,K 的值

$$M^{\perp}A^{\#}M^{\perp\mathrm{T}} < 0, \quad N^{\perp}(\Sigma^{-1}A^{\#}\Sigma^{-1})N^{\perp\mathrm{T}} < 0 \tag{9}$$

再由 $G=A-G_1$ 得 G 的值，此时 G,K 便确定了滤波器Ψ^*：$\dot{\hat{x}}(t)=G\hat{x}(t)+Ky(t)$为系统(1)的鲁棒保成本滤波器.

证明. 定义 $\overline{Y}=\overline{A}\overline{Q}+\overline{Q}\overline{A}^{\mathrm{T}}+\overline{B}\overline{B}^{\mathrm{T}}$，则由引理 1 知式(5)等价于存在 $\varepsilon>0$ 使

$$\overline{Y} + \varepsilon\overline{D}\overline{D}^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}\overline{Q}\overline{E}\overline{E}^{\mathrm{T}}\overline{Q} < 0 \tag{10}$$

将(4)式代入(10)式，由 Schur 补引理，经过计算得(10)式等价于

$$\Phi = A^{\#} + MG_0N^{\mathrm{T}}\Sigma + (MG_0N^{\mathrm{T}}\Sigma)^{\mathrm{T}} < 0 \tag{11}$$

其中

$$A^{\#} = \begin{bmatrix} AQ_1 + Q_1A^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}Q_1F^{\mathrm{T}}FQ_1 & AQ_{12} + Q_{12}A^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}Q_1F^{\mathrm{T}}FQ_{12} & B_1 & \varepsilon D_1 \\ AQ_{12}^{\mathrm{T}} + Q_{12}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}Q_{12}^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}FQ_1 & AQ_2 + Q_2A^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}Q_{12}^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}FQ_{12} & B_1 & \varepsilon D_1 \\ B_1^{\mathrm{T}} & B_1^{\mathrm{T}} & -I & 0 \\ \varepsilon D_1^{\mathrm{T}} & \varepsilon D_1^{\mathrm{T}} & 0 & -I \end{bmatrix},$$

$$M = [0 \quad I \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}, \quad G_0 = [G_1 \quad -K], \quad \Sigma = \mathrm{diag}(Q, I, \varepsilon I), \quad N = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & 0 \\ C & 0 & B_2 & D_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

由引理 2 可知，式(11)关于 G_0 有解的充分必要条件为

$$M^{\perp}A^{\#}M^{\perp\mathrm{T}} < 0, \quad N^{\perp}(\Sigma^{-1}A^{\#}\Sigma^{-1})N^{\perp\mathrm{T}} < 0$$

同时成立.将 M,N 的正交补及 Σ^{-1} 代入上面两式,并由 Schur 补定理即得式(6),(7).如果记 $\begin{bmatrix} Q_1 & Q_{12} \\ Q_{12}^{\mathrm{T}} & Q_2 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_2 \end{bmatrix}$,则由式(7)可得 $\Omega=\Omega_1+\Omega_2-\Omega_{12}-\Omega_{21}$ 最后为求出 Q_2 须将 Ω 写成

$$\Omega - X_1 - (X_1Q_{12} - I)(Q_2 - Q_{12}^{\mathrm{T}}X_1Q_{12})^{-1}(Q_{12}^{\mathrm{T}}X_1 - I) = 0 \tag{12}$$

可见式(12)成立的充分必要条件是存在正定对称矩阵 $L\in R^{n\times n}$ 使下式成立

$$\Omega + L - X_1 - (X_1Q_{12} - I)(Q_2 - Q_{12}^{\mathrm{T}}X_1Q_{12})^{-1}(Q_{12}^{\mathrm{T}}X_1 - I) > 0.$$

由 Schur 补便得式(8).　　证毕.

注释 2. 由 MATLAB 软件可直接确定式(6)~(8)是否存在满足条件的解,若有解,则定理 2 表明系统(1)的鲁棒保成本滤波器存在,且保成本矩阵为 Q_2.显然,若鲁棒保成本滤波器存在,如何进一步优化保成本矩阵 Q_2 是很有意义的.因 Q_2 正定,如果极小化 $\mathrm{tr}(Q_2)$,那么在一定程度上就优化了 Q_2,所以我们给出 $\mathrm{tr}(Q_2)$ 优化算法.

定理 3. 如果优化问题

$$\min_{\varepsilon,X_1,Q_{12},\Omega,L} \mathrm{tr}(Q_2) \qquad \text{s.t.} \quad (6),(7),(8) \tag{13}$$

有解 $X_1,Q_2,\Omega,L,\varepsilon>0,Q_{12}$,则相应滤波器 Ψ^* 为最优鲁棒保成本滤波器.

3　离散不确定系统的鲁棒保成本滤波器设计

考虑离散不确定系统

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k) + D_1\Delta(k)F\boldsymbol{x}(k) + B_1\boldsymbol{w}(k), \quad \boldsymbol{x}(k_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{y}(k) = C\boldsymbol{x}(k) + D_2\Delta(k)F\boldsymbol{x}(k) + B_2\boldsymbol{w}(k), \end{cases} \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{x}(k)\in R^n$ 为系统状态; $\boldsymbol{y}(k)\in R^m$ 为测量输出; $\boldsymbol{w}(k)\in R^p$ 为系统外部干扰输入; A,B_1,B_2,C 为具有相应维数的已知矩阵. $\boldsymbol{x}_0$ 为初始条件,且假设为零均值高斯随机向量; $\Delta A(k)$, $\Delta C(k)$ 分别代表系统矩阵与测量矩阵中的不确定性.

假设条件与连续系统(1)相同,现考虑如下形式的滤波器

$$\Psi:\ \hat{\boldsymbol{x}}(k+1) = G\hat{\boldsymbol{x}}(k) + K\boldsymbol{y}(k) \tag{15}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{x}}\in R^n$ 为状态 $\boldsymbol{x}$ 的滤波估计, $\hat{\boldsymbol{x}}_0$ 为滤波器初始条件,假定为高斯随机向量.令 $\boldsymbol{e}(k+1)=\boldsymbol{x}(k+1)-\hat{\boldsymbol{x}}(k+1)$,则由式(14),(15)可得增广系统为

$$\bar{\boldsymbol{x}}(k+1) = \bar{A}\bar{\boldsymbol{x}}(k) + \bar{D}\Delta\bar{F}\bar{\boldsymbol{x}}(k) + \bar{B}\boldsymbol{w}(k) \tag{16}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{x}}(k)=\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(k) \\ \boldsymbol{e}(k) \end{bmatrix}$, $\bar{\boldsymbol{x}}_0=\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{x}_0-\bar{\boldsymbol{x}}_0 \end{bmatrix}$, $\bar{A},\bar{D},\bar{F},\bar{B}$ 的定义同式(4).

定义 2. 考虑不确定系统(14),若存在滤波器 Ψ 和正定对称阵 Q^* 使得对所有满足假设 1 的不确定性,增广系统(16)为二次稳定,且稳态误差的协方差 $Q_\Delta(n)=\lim\limits_{k_0\to-\infty}\mathrm{E}\{\boldsymbol{e}(n)\boldsymbol{e}(n)^{\mathrm{T}}\}$ 满足 $Q_\Delta(n)\leqslant Q^*$,则称 Q^* 为保成本, Ψ 为鲁棒保成本滤波器.

定理 4. 如果存在稳定阵 G 及对称正定阵 $\bar{Q}=\begin{bmatrix} Q_1 & Q_{12} \\ Q_{12}^{\mathrm{T}} & Q_2 \end{bmatrix}$,使

$$[\bar{A} + \bar{D}\Delta(k)\bar{F}]\bar{Q}[\bar{A} + \bar{D}\Delta(k)\bar{F}]^{\mathrm{T}} + \bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}} - \bar{Q} < 0 \tag{17}$$

成立,其中 $\Delta^{\mathrm{T}}(t)\Delta(t)\leqslant I$.则式(15)是成本为 Q_2 的鲁棒保成本滤波器.

定理 5. 对不确定系统(14)满足(17)式的充分必要条件是存在 $\varepsilon>0$,矩阵 $Q_{12}\in R^{n\times n}$,

对称正定阵 $Q_1,Q_2,\Omega,L\in R^{n\times n}$,使下列不等式同时成立

$$\begin{bmatrix} -Q_1+B_1B_1^{\mathrm T}+\varepsilon D_1D_1^{\mathrm T} & AQ_1 & AQ_{12} & 0 \\ Q_1A^{\mathrm T} & -Q_1 & -Q_{12} & Q_1F^{\mathrm T} \\ Q_{12}^{\mathrm T}A^{\mathrm T} & -Q_{12}^{\mathrm T} & -Q_2 & Q_{12}^{\mathrm T}F^{\mathrm T} \\ 0 & FQ_1 & FQ_{12} & -\varepsilon I \end{bmatrix}<0 \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} -\bar{Q}+A_1 & A+A_2 \\ A^{\mathrm T}+A_2^{\mathrm T} & -\Omega+A_3 \end{bmatrix}<0 \tag{19}$$

$$\begin{bmatrix} \Omega+L & I & I \\ I & Q_2 & Q_{12}^{\mathrm T} \\ I & Q_{12} & Q_1^{-1} \end{bmatrix}>0 \tag{20}$$

其中

$A_1=(B_1+D_1W_2)(I+\varepsilon^{-1}W_2^{\mathrm T}W_2)^{-1}(B_1+D_1W_2)^{\mathrm T}\begin{bmatrix} I & I \\ I & I \end{bmatrix}$, $A_3=\varepsilon^{-1}F^{\mathrm T}F-\varepsilon^{-1}W_1^{\mathrm T}(I+\varepsilon^{-1}W_2W_2^{\mathrm T})^{-1}W_1$, $A_2=(D_1W-\varepsilon^{-1}(B_1+D_1W_2)(I+\varepsilon^{-1}W_2^{\mathrm T}W_2)^{-1}(W_2^{\mathrm T}W_1))\begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & I & I & 0 & 0 & W_1^{\mathrm T} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & W_2^{\mathrm T} \end{bmatrix}$为$\begin{bmatrix} 0 & 0 & I & -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C & 0 & 0 & -B_2 & -D_2 \end{bmatrix}^{\mathrm T}$的正交补. 若矩阵不等式(18)～(20)有解 $\varepsilon>0,Q_1,Q_2,\Omega,L>0$ 及 Q_{12},则存在鲁棒保成本滤波器. 且可直接确定 G,K 值,此时 $\Psi^*:\hat{x}(k+1)=G\hat{x}(k)+Ky(k)$为鲁棒保成本滤波器.

定理 6. 若式(18)～(20)有解,则求优化问题

$$\min_{\varepsilon,X_1,Q_{12},\Omega,L} \operatorname{tr}(Q_2) \qquad \text{s.t.} \quad (18),(19),(20) \tag{21}$$

的解 $Q_1,Q_2,\Omega,L,\varepsilon>0$ 及 Q_{12},相应得出 Ψ 为最优鲁棒保成本滤波器.

4 数值举例

作者用文献[2]中的例子进行数字仿真,并与文献[2]的结果进行比较,从而可看出本文结果具有更好的性能. 对应于系统(1),考虑不确定线性随机系统模型参数为

$$A=\begin{bmatrix} -1.5 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},\quad C=[1\quad 0],\quad B_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad B_2=[1\quad 0],$$

$$D_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix},\qquad D_2=0.1,\qquad F=[1\quad 2],$$

不确定时变函数为 $\Delta(t)=\sin(\sigma(t))$, $\sigma(t)$为任意连续函数. 把相关参数代入(6)～(8)式,并进行优化(13)式,可得最终结果为

$$\varepsilon=1.1447,\quad X_1=\begin{bmatrix} 0.6443 & 0.1009 \\ 0.1009 & 0.7037 \end{bmatrix},\quad Q_2=\begin{bmatrix} 0.2496 & -0.0290 \\ -0.0290 & 0.2989 \end{bmatrix},$$

$$Q_{12}=\begin{bmatrix} -0.0045 & 0.0109 \\ -0.0274 & 0.0421 \end{bmatrix},\quad \Omega=\begin{bmatrix} 20.1756 & 7.5997 \\ 7.5997 & 7.6792 \end{bmatrix},\quad L=\begin{bmatrix} 1.0768 & 0 \\ 0 & 1.0768 \end{bmatrix},$$

$$G=\begin{bmatrix} -3.1620 & -2.0654 \\ 0.6111 & -2.5628 \end{bmatrix},\quad K=\begin{bmatrix} -1.3536 \\ 0.1826 \end{bmatrix}.$$

可见其最优成本 Q_2 远小于文献[2]中的 $Q_2=\begin{bmatrix}0.6400 & 0.3575\\ 0.3575 & 0.9000\end{bmatrix}$,获得的滤波器增益 $\|G\|=3.9463$, $\|K\|=1.3659$,也小于文献[2]的两组滤波器增益 $\|G\|=5.3250$, $\|K\|=2.4596$, $\|G\|=4.0925$, $\|K\|=1.8212$.这说明得到的最优鲁棒保成本滤波器性能得到了提高,且滤波器增益也较少,文献[2]的滤波器不过是本文鲁棒保成本滤波器的一个特例,因为文献[2]中的解一定满足本文(6)～(8)式.以下给出滤波图形图 1,2.

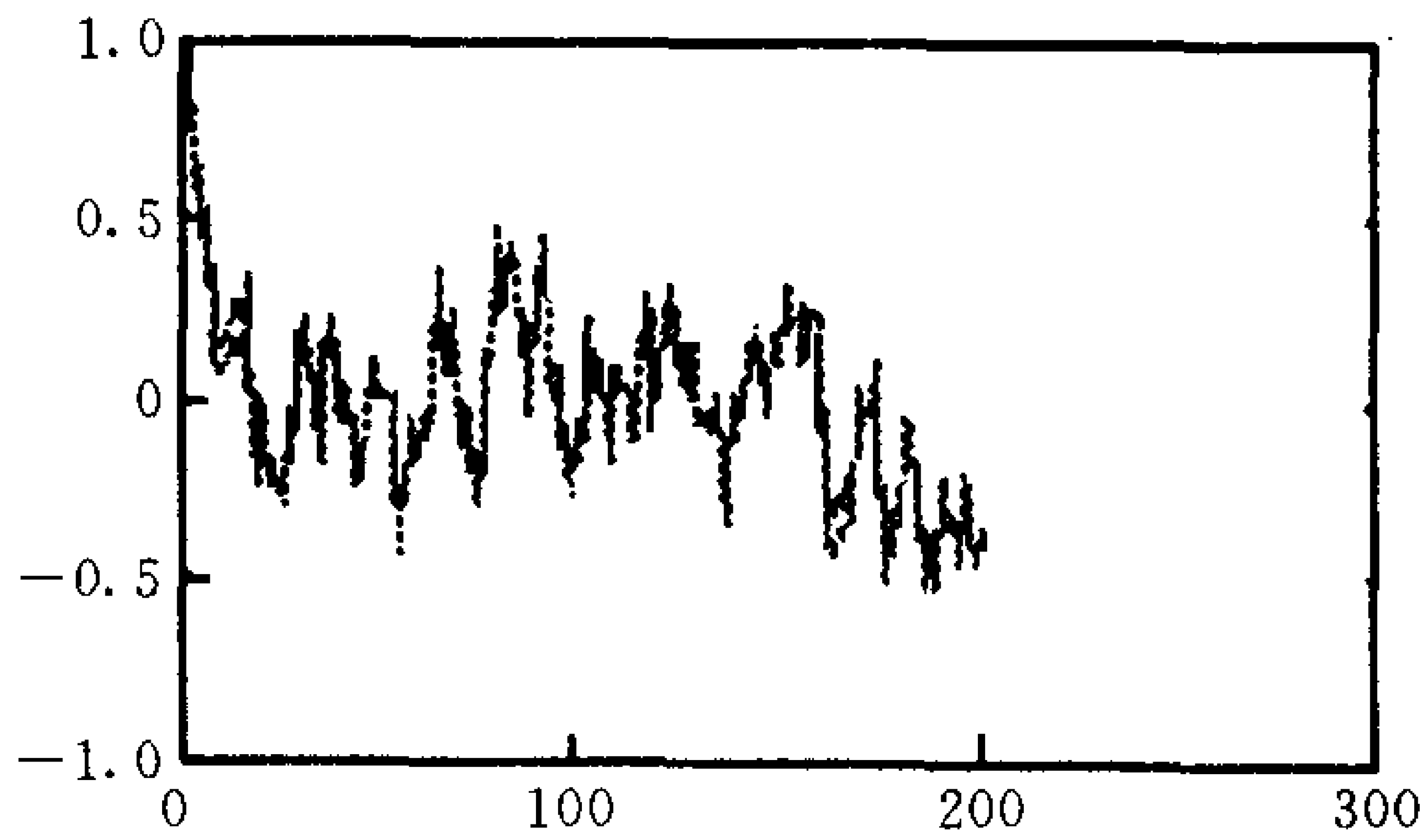

图 1　x_1与其滤波器估计值

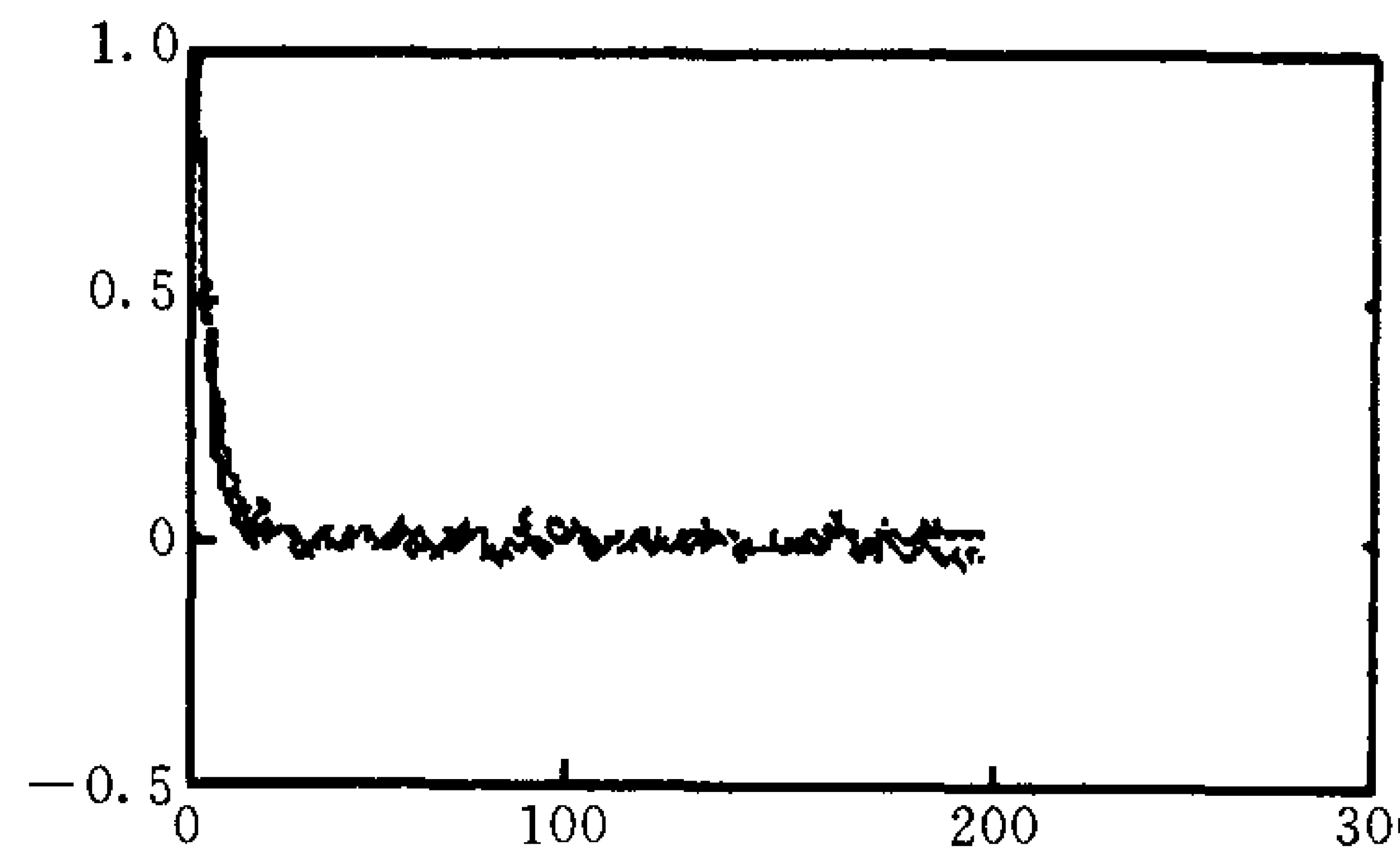

图 2　x_2与其滤波器估计值

5　结束语

利用 LMI 作为有力工具对线性不确定系统的鲁棒保成本滤波器的设计进行讨论,避免了用 Riccati 方程或不等式求解滤波器参数时的一些困难.仿真结果表明本文的结果具有很大的优越性,不仅可得最优成本,而且滤波器增益也较小.

参　考　文　献

1　Petersen I R, McFarlane D C. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, **39**(9):1971～1977

2　朱纪洪,郭治. 连续时变不确定系统约束方差/H_∞鲁棒状态滤波. 控制理论与应用, 1997, **14**(3):389～392

3　Haddad W M, Berstein D S, Mustafu D. Mixed-norm H_2/H_∞ regulation and estimation: The discrete-time case. *Systems. Control Lett.*, 1991, **16**:235～247

4　Wang Z D, Guo Z, Unbehaven H. Robust H_2/H_∞ state estimation for discrete-time systems with error variance constraints. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1997, **42**(10):1431～1435

5　Yu L, Chen G D, Chu J. Optimal guaranteed cost control of linear uncertain systems: LMI approach. *IFAC*, 1999, G-2e-21-1:541～546

6　Pertersen I R. Guaranteed cost LQG control of uncertain linear systems. *IEEE Proc. Control Theory Appl.*, 1995, **142**(2):95～102

刘诗娜　1994 年在青岛大学获工业自动化学士学位,现为东南大学自动化研究所控制理论与控制工程专业硕士生.主要研究方向为系统滤波与鲁棒滤波理论.

费树岷　1995 年获工学博士,现为东南大学自动化研究所教授,博士生导师.主要研究兴趣为非线性系统理论与综合、H^∞控制设计、混杂系统建模与优化、时滞系统理论与设计方法等.

冯纯伯　中国科学院院士、俄罗斯外籍院士,现为东南大学自动化研究所教授、博士生导师.主要研究兴趣为复杂系统建模与优化、智能系统分析与设计、模糊控制理论、神经网络控制、自适应控制等.