第 28 卷 第 1 期
2002 年 1 月
自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 28, No. 1
Jan., 2002

短文

离散时间系统下的积分二次约束方法的几个问题[1)]

喻学刚 黄 琳
（北京大学力学与工程科学系 北京 100871）
（E-mail：yuxg@263.net）

摘 要 研究了离散情形下的反馈系统的稳定性问题，利用新近发展起来的积分二次约束（IQC）方法，对离散系统的反馈连接问题，给出了其稳定性分析准则和一些必要条件，这些结果适用于时不变与时变系统. 其次，利用已有的结果，得到了离散时变系统 MIMO 情况下的绝对稳定性问题的一个判据. 最后，利用一个较强的 IQC 定义，给出了判断某一类反馈系统稳定的充分必要条件.

关键词 积分二次约束（IQC），离散时间系统，稳定性
中图分类号 O137

SOME PROBLEMS ON IQC'S OF THE DISCRETE-TIME SYSTEM

YU Xue-Gang HUANG Lin
(*Department of Mechanics & Engineering Science, Peking University, Beijing* 100871)
(E-mail: yuxg@263.net)

Abstract The stability of the feedback interconnection in the discrete-time case is studied in this paper. Using the integral quadratic constraints (IQC's) methods, some stability criteria are given, some necessary conditions are also discussed. These results are suitable for both time-invariant and time-varying discrete systems. As an application, a stability criterion for the absolute stability in the MIMO case is given. Finally, using a stronger definition of IQC, a necessary and sufficient condition for a class of feedback interconnection is given.

Key words Integral quadratic constraint (IQC), discrete system, stability

1 引言

积分二次约束（Integral Quardratic Constraints 简记为 IQC）被 Yakubovich 首次用来

1）国家攀登计划、国家重点基础研究专项经费（G19980302）和国家自然科学基金（69774007）资助.
收稿日期 1999-10-15 收修改稿日期 2000-07-10

处理含有非线性环节的系统的稳定性问题[1]，即所谓的 S-procedure. Safonov 则用反馈环路中两个算子的图的分划来对其结论作几何性解释[2]. 在过去的一段时间内，鲁棒控制领域出现和发展了大量的方法，它们中的大部分可纳入 IQC 的框架[3]. 因而用 IQC 来分析和解决控制问题成为一种重要方法. Megretski 和 Rantzer 在文献[4,5]中给出了一个判定系统反馈连接的稳定性的基本定理，并将以往的大量结果纳入其中. 但其结果一般只能用来判定频域或时不变问题或较简单的时域问题，而对较一般的时域问题，则缺乏有效性. 同时由于其稳定性定义中需要因果逆存在[4~6]，而这方面也是系统分析中的难点，已有的结论相对而言难于应用于实际工作.

本文将 IQC 的理论应用于离散系统，给出了相应的判据. 其次，已有的绝对稳定性问题的结果或者是单输入单输出(SISO)的，或者是完全解耦的，而且所考虑线性部分或是时不变的或带有小扰动，不具有一般性. 利用已有的 IQC 的结果，给出了离散系统多输入多输出(MIMO)情况下的绝对稳定性的判据. 该结果对系统的线性部分是时不变或时变的均适用，且对非线性环节是否解耦不作要求.

对于矩阵(向量)A，A^{T} 表示它的转置. 记 N_+ 为非负整数集. 我们记 $\boldsymbol{f}=\{\boldsymbol{f}_k\}_0^\infty$，这里每一个 $\boldsymbol{f}_k\in R^n$. $l_2^n[0,\infty)$空间定义为：$l_2^n[0,\infty):=\{\boldsymbol{f}:\|\boldsymbol{f}\|^2=\sum_{k=0}^{\infty}|\boldsymbol{f}_k|^2<\infty\}$. P_N，$N\in N_+$ 为截断算子，其定义为：$(P_N\boldsymbol{f})_k=\begin{cases}\boldsymbol{f}_k, & k\leqslant N\\ \boldsymbol{0}, & k>N\end{cases}$. $l_{2e}^n[0,\infty)$为 $l_2^n[0,\infty)$的扩展空间，$\boldsymbol{f}\in l_{2e}^n[0,\infty)$，则 $P_N\boldsymbol{f}\in l_2[0,\infty)$，$\forall N\in N_+$. 对一个算子 $F:l_{2e}^a[0,\infty)\to l_{2e}^b[0,\infty)$，其增益由下式给出

$$\|F\| = \inf\{c \mid \|P_N F(\boldsymbol{f})\| \leqslant c\|P_n\boldsymbol{f}\|,\ \forall\ \boldsymbol{f}\in l_{2e}^a[0,\infty),\ \forall\ N\in N_+\}.$$

若上式为有限值，则称 F 为有界算子. 若其满足对所有 $N\in N_+$，$P_N F P_N=P_N F$，则称它为因果的. 一个线性算子 F，若它为有界算子，则称它为稳定的. 易知对于一个线性算子，若它是有界的，则必为因果的.

2 问题描述

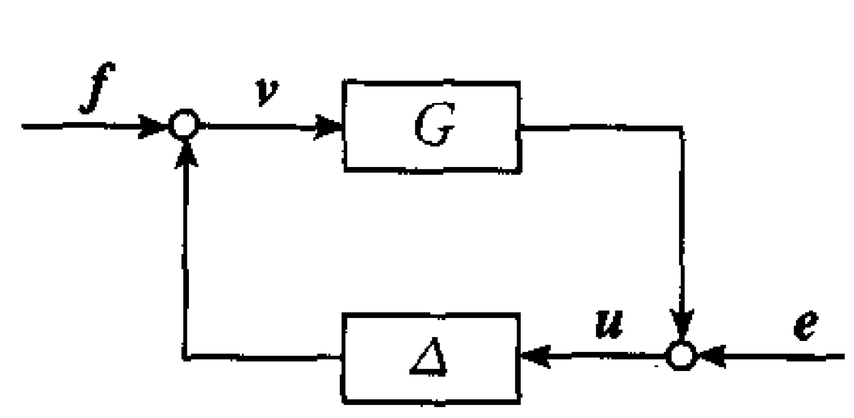

图 1 基本反馈连接

本文所考虑的问题如图 1 所示. 其方程可表示为

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}=G\boldsymbol{v}+\boldsymbol{e}\\ \boldsymbol{v}=\Delta(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{f}\end{cases} \tag{1}$$

这里 G 为 $l_{2e}^m[0,\infty)$空间上的线性因果稳定算子，而 Δ 为 $l_{2e}^n[0,\infty)$空间上的因果有界算子. $\boldsymbol{e}\in l_{2e}^n[0,\infty)$，$\boldsymbol{f}\in l_{2e}^m[0,\infty)$，它们可包含系统的初始条件.

定义 1. 若由(1)式定义的映射$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\mapsto(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})$在 $l_{2e}^{n+m}[0,\infty)$上可逆，则称 G 与 Δ 的反馈内联是适定的. 此外，如果该逆具有因果性，则称该系统满足 CI 条件. 若对一个适定的系统，还存在常数 $c>0$，使对式(1)的任意解，有

$$\sum_{k=0}^{N}(|v_k|^2+|u_k|^2)\leqslant c\sum_{k=0}^{N}(|e_k|^2+|f_k|^2),\ \forall\ N\in N_+ \tag{2}$$

成立，则称该反馈内联是稳定的.

注 1. 对比文献[4～6]中类似问题的定义，这里的稳定性定义中去掉了 CI 条件. 在实际

应用中,CI 条件非常难于检验.而解的存在性相对易于检验.此外,对一些系统而言,稳定性也意味着 CI 条件成立,如线性系统等.

引理 1[7]. 对图 1 及式(1)所示的系统,如果存在一个常数 $\alpha>0$,使得下式成立

$$\alpha\|P_N\boldsymbol{u}\| \leqslant \|P_N(I-G\Delta)\boldsymbol{u}\|,\ \forall\ \boldsymbol{u}\in l_{2e}^n[0,+\infty),\ \forall\ N\in N_+ \tag{3}$$

则该系统是稳定的.如果该系统满足 CI 条件,则上式也是必要的.

定义 2. 记 $\mathfrak{R}^{m\times n}$ 为一个取值在 $R^{m\times n}$ 上的函数集合,其定义为

$$\mathfrak{R}^{m\times n}=\{F(j,k)\mid\exists\ \beta\geqslant 0,\ \forall\ \boldsymbol{x}\in l_2^n[0,\infty),$$

$$\boldsymbol{y}(p)=\sum_{q=0}^{\infty}F(p,q)\boldsymbol{x}(q)\in l_2^m[0,\infty),\ \|\boldsymbol{y}\|\leqslant\beta\|\boldsymbol{x}\|\} \tag{4}$$

显然,$\mathfrak{R}^{m\times n}$ 中的任一元素 F 定义了一个有界线性卷积算子,而 $\mathfrak{R}^{m\times n}$ 中所有对应一个因果有界线性卷积算子的元素构成它的一个子空间,记为 $\mathfrak{R}_C^{m\times n}$. 以下由 F 定义的算子也记为 F,记 $y=F\boldsymbol{x}$,即 $\boldsymbol{y}(j)=\sum_{k=0}^{\infty}F(j,k)x(k)$.

3 主要结果

采用如下的定义作为离散系统的 IQC 的定义.

定义 3. 对有界因果算子 $\Delta:l_{2e}^n[0,\infty)\mapsto l_{2e}^m[0,\infty)$,如存在 $F\in\mathfrak{R}^{p\times(M+n)}$,$R\in\mathfrak{R}^{q\times(m+n)}$,使得

$$\left\|F\begin{bmatrix}P_N\boldsymbol{u}\\ P_N\Delta(\boldsymbol{u})\end{bmatrix}\right\|^2-\left\|R\begin{bmatrix}P_N\boldsymbol{u}\\ P_N\Delta(\boldsymbol{u})\end{bmatrix}\right\|^2\geqslant 0,\quad\forall\ \boldsymbol{u}\in l_{2e}^n[0,\infty),\ \forall\ N\in N_+ \tag{5}$$

则称 Δ 满足由 F,R 定义的 IQC. 简记为 $\Delta\in IQC(F,R)$.

注 2. F,R 是被用来描述 Δ 的,怎样选择它们依具体问题而定.如取 $F=(\delta_{ij}I,0)$,$R=(0,\delta_{ij}I)$ 用来描述算子 $\|\Delta\|\leqslant 1$,$F=(\delta_{ij}I,\delta_{ij}I)$,$R=\begin{pmatrix}\delta_{ij}I & 0\\ 0 & \delta_{ij}I\end{pmatrix}$ 则描述一个无源算子.其中 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$.

定理 1. 对于图 1 及(1)式所示的系统,如果下面的条件成立

i) 系统反馈连接 (G,Δ) 是适定的;

ii) 存在具相容维数的 $\mathfrak{R}$ 中的元素 F,R,使得 $\Delta\in IQC(F,R)$;

iii) 存在一个常数 $\varepsilon>0$,下式成立

$$\left\|F\begin{bmatrix}P_NG\boldsymbol{v}\\ P_N\boldsymbol{v}\end{bmatrix}\right\|^2-\left\|R\begin{bmatrix}P_NG\boldsymbol{v}\\ P_N\boldsymbol{v}\end{bmatrix}\right\|^2\leqslant-\varepsilon\|P_N\boldsymbol{v}\|^2,\quad\forall\ \boldsymbol{v}\in l_{2e}^m[0,\infty),\ \forall\ N\in N_+ \tag{6}$$

则(1)式中的系统反馈连接 (G,Δ) 是稳定的.

上面的结果仅仅是一个充分条件,以下也可以给出一个必要条件.

定理 2. 如果由图 1 和(1)式所示的系统是稳定的,且满足 CI 条件,则下面条件成立

i) 存在 $F,R\in\mathfrak{R}_C^{(n+m)\times(n+m)}$,使得 $\Delta\in IQC(F,R)$;

ii) 存在一个常数 $\varepsilon>0$,使得下式成立

$$\left\|F\begin{bmatrix}G\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix}\right\|^2-\left\|R\begin{bmatrix}G\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix}\right\|^2\leqslant-\varepsilon\|\boldsymbol{v}\|^2,\quad\forall\ \boldsymbol{v}\in l_2^m[0,\infty) \tag{7}$$

推论 1. 如果 G 为常数算子，即存在某一矩阵 M，使得 $G\boldsymbol{v}=M\boldsymbol{v}$，而系统 (G,Δ) 是适定的，并且算子 $(I-G\Delta)^{-1}$ 是因果的，则定理 2 中的条件也为充分的. 若 Δ 为一线性常数算子，则定理 1 中的各个条件也是必要的.

4 在绝对稳定性问题中的应用

作为上节结果的应用，下面给出多输入多输出(MIMO)情形下的绝对稳定性问题的一个判据.

考虑如下系统

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=A(k)\boldsymbol{x}(k)+B(k)\boldsymbol{v}(k),\\ \boldsymbol{y}(k)=C(k)\boldsymbol{x}(k)+D(k)\boldsymbol{v}(k)+\boldsymbol{f}(k),\\ \boldsymbol{u}(k)=\Delta(\boldsymbol{y}(k))+\boldsymbol{g}(k),\end{cases}\tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{g}\in l_{2e}^m[0,\infty)$，$\boldsymbol{f}\in l_{2e}^n[0,\infty)$，它们可包含系统的初始条件；$A(k)\in R^{p\times p}$，$B(k)\in R^{p\times m}$，$C(k)\in R^{n\times p}$，$D(k)\in R^{n\times m}$ 且要求系统线性部分是稳定的，即线性系统的状态转移矩阵 $H(j,k)\in\Re^{n\times m}$. 而 $\Delta: l_{2e}^n[0,\infty)\mapsto l_{2e}^m[0,\infty)$ 为一个有界因果算子，且有矩阵 M,Q 及半正定矩阵 $P\geqslant 0$，使得

$$\begin{cases}0\leqslant\sum\limits_{k=0}^{N}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(k)M(\Delta(\boldsymbol{y}(k)))\leqslant\sum\limits_{k=0}^{N}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(k)P\boldsymbol{y}(k),\\ 0\leqslant\sum\limits_{k=0}^{N}(\Delta(\boldsymbol{y}(k)))^{\mathrm{T}}(\Delta(\boldsymbol{y}(k)))\leqslant\sum\limits_{k=0}^{N}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(k)Q(\Delta(\boldsymbol{y}(k))),\end{cases}\quad\forall\,\boldsymbol{y}\in l_{2e}^n[0,\infty),\ \forall\,N\in N_+,$$

则可以给出判定系统(8)稳定的一个充分条件.

定理 3. 如果存在常数 $\varepsilon>0$，$\forall\,\boldsymbol{v}\in l_{2e}^n[0,\infty)$，记 $\boldsymbol{w}(j)=\sum\limits_{k=0}^{j}H(j,k)\boldsymbol{v}(k)$，使得下式成立

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(k)P\boldsymbol{w}(k)+\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(k)(Q-M)\boldsymbol{v}(k)-\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{v}(k))\leqslant-\varepsilon\|\boldsymbol{v}\|^2\tag{9}$$

则系统(8)稳定. 若其中的线性部分 G 为时不变的，则式(9)等价于 $\exists\ R=R^{\mathrm{T}}$，令 $W=Q-M$，使得下式成立

$$\begin{pmatrix}A^{\mathrm{T}}RA-R+2C^{\mathrm{T}}PC & A^{\mathrm{T}}RB+2C^{\mathrm{T}}PD+C^{\mathrm{T}}W\\ B^{\mathrm{T}}RA+2D^{\mathrm{T}}PC+W^{\mathrm{T}}C & 2D^{\mathrm{T}}PD+B^{\mathrm{T}}RB+D^{\mathrm{T}}W+W^{\mathrm{T}}D-2I\end{pmatrix}<0.$$

注 3. 显然，该定理考虑的非线性环节并不要求是解耦的，且线性部分可为时不变的，也可为时变的.

5 一个充要条件

本节将要表明，如果采用合适形式的 IQC 定义，在一定的条件下，可以得到关于判定系统(1)稳定的充要条件. 我们采用如下的 IQC 定义.

定义 4. 一个有界因果算子 $\Delta: l_{2e}^n[0,\infty)\mapsto l_{2e}^m[0,\infty)$，如存在 $F\in\Re^{p\times(M+n)}$，$R\in\Re^{q\times(m+n)}$，使得

$$\left\|P_NF\begin{bmatrix}P_N\boldsymbol{u}\\P_N\Delta(\boldsymbol{u})\end{bmatrix}\right\|^2-\left\|P_NR\begin{bmatrix}P_N\boldsymbol{u}\\P_N\Delta(\boldsymbol{u})\end{bmatrix}\right\|^2\geqslant 0,\quad \forall \boldsymbol{u}\in l_{2e}^n[0,\infty),\ \forall N\in N_+ \tag{10}$$

则称 Δ 满足由 F,R 定义的 IQC，简记为 $\Delta\in IQC(F,R)$.

可以看出,由于没有限定算子 F,R 是否是因果的,故用到了 P_NFP_N,P_NRP_N,但从下文的结果中可以看出,如果算子$(I-G\Delta)^{-1}$是因果的,并仅考虑系统(1)的稳定性问题,只要假定算子 F,R 为因果的就足够了.

定理 4. 对于图 1 所示的并由(1)式确定的系统，若它是适定的,且满足 CI 条件,即算子$(I-G\Delta)^{-1}$是因果的，则它是稳定的当且仅当下面的条件成立

i) 存在 $F,R\in\Re_C^{(n+m)\times(n+m)}$,使得 $\Delta\in IQC(F,R)$;

ii) 存在一常数 $\varepsilon>0$,使得下式成立

$$\left\|P_NF\begin{bmatrix}G\boldsymbol{v}\\\boldsymbol{v}\end{bmatrix}\right\|^2-\left\|P_NR\begin{bmatrix}G\boldsymbol{v}\\\boldsymbol{v}\end{bmatrix}\right\|^2\leqslant-\varepsilon\,\|P_N\boldsymbol{v}\|^2,\quad \forall \boldsymbol{v}\in l_{2e}^m[0,\infty),\ \forall N\in N_+ \tag{11}$$

参 考 文 献

1 Yakubovich V A. S-procedure in nonlinear control theory. Vestnik Leningrad University, 1971. 62～77

2 Safonov M G. Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems. MIT Press, 1980

3 Megretski A. Power distribution approach in robust control. *Proc. of IFAC Congress*, 1993. **1**:399～402

4 Megretski A, Rantzer A. System analysis via integral quadratic constraints. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1997, **42**(6):819～830

5 Rantzer A, Megretski A. System analysis via integral quadratic constraints. In: Proc. of the 33rd CDC, 1994. 3062～3067

6 Jönsson U. Robust analysis of uncertain and nonlinear systems[Ph D thesis]. Lund Institute of Technology, 1996

7 Desoer C A, Vidyasagar M. Feedback Systems: Input-Output Properties. New York: Academic Press, 1975

喻学刚　2000 年在北京大学力学与工程科学系获博士学位,现在中讯公司从事计算机软件工作. 研究兴趣为系统理论、计算机网络等.

黄　琳　北京大学力学与工程科学系教授、博士生导师. 研究兴趣为稳定性理论、鲁棒控制、复杂控制系统理论等.