

# 扩展 Kalman 滤波法在高速公路 交通流模型上的应用

罗赞文<sup>1</sup> 吴志坚<sup>2</sup> 韩曾晋<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(上海经达机电工程设计研究所 上海 200031)

<sup>2</sup>(清华大学自动化系 北京 100084)

(E-mail: sssjd@sh163e. sta. net. cn)

**摘 要** 高速公路交通流模型是高速公路交通监控系统设计、分析、仿真、运行的基础。由于高速公路交通流模型是一个高阶非线性时变系统,这使得该模型的状态估计问题成为一个非常困难的问题。这里简要描述了传统解析模型中的交通流宏观动态模型及扩展的卡尔曼滤波法(Extended Kalman Filter-EKF)状态估计原理,讨论了该类模型在一条具有三个等长路段,一个入口匝道,一个出口匝道的公路的应用,并利用 EKF 得出对三路段高速公路车流密度、车流速度跟踪的仿真结果。仿真结果表明了算法的实用性。

**关键词** EKF,高速公路,交通流,宏观模型

**中图分类号** U491

## APPLICATION OF EXTENDED KALMAN FILTER TO THE FREEWAY TRAFFIC FLOW MODEL

LUO Zan-Wen<sup>1</sup> WU Zhi-Jian<sup>2</sup> HAN Zeng-Jin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(Shanghai Super Star E & M Engineering and Design Institute, Shanghai 200031)

<sup>2</sup>(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084)

(E-mail: sssjd@sh163e. sta. net. cn )

**Abstract** The freeway traffic flow model is the foundation of designing, analyzing, simulating and operating the Traffic Surveillance & Control System of freeway. Due to the freeway traffic flow model is a high order nonlinear & time variant system, it makes the state estimation of the model become very difficult. This article briefly describes the traffic flow macro dynamic model in a traditional analytic model and the state estimation principle of the Extended Kalman Filter (EKF). Then it discusses the application of the model in a road section which has three sections of equal length, one entry and one exit. The EKF is adopted to simulate the density and velocity of the freeway vehicle flow. The simulation result proves the practicability of this algorithm.

**Key words** EKF, freeway, traffic flow, macro model

## 1 引言

在高速公路交通控制系统中,入口调节率、速度限制以及信息发布等控制量的确定都必须以公路中各路段的交通状态作为反馈信息.此外,高速公路交通流模型的状态估计也是高速公路交通分析、事件检测及交通预报等工作的基础.但高速公路交通流模型是一个高阶非线性时变系统,这使得该模型的状态估计成为一个非常困难的问题.

## 2 交通流宏观动态模型的描述

目前应用得最广泛的解析模型是在 Payne 和 Papageorgiou 等学者的工作基础上发展起来的宏观动态模型<sup>[1~3]</sup>.下面讨论这种模型的离散状态方程.考虑一条高速公路,将它适当划分为  $N$  段,每段长度  $\Delta_i$  约为数百米.在整条路的首、末端均设有交通检测器,提供实测数据作为模型的输入,包括交通流量  $q_i(k)$ 、平均速度  $v_i(k)$ .检测周期  $T$  为 10~60 秒.

$$q_i(k) = \alpha \rho_i(k) v_i(k) + (1 - \alpha) \rho_{i+1}(k) v_{i+1}(k) \quad (1)$$

$$\rho_i(k+1) = \rho_i(k) + \frac{T}{\Delta_i} [q_{i-1}(k) - q_i(k) + r_i(k) - s_i(k)] \quad (2)$$

$$v_i(k+1) = v_i(k) + \frac{T}{\tau} \{v[\rho_i(k)] - v_i(k)\} + \frac{T\xi}{\Delta_i} v_i(k) [v_{i-1}(k) - v_i(k)] - \frac{\gamma T}{\tau \Delta_i} \frac{\rho_{i+1}(k) - \rho_i(k)}{\rho_i(k) + \lambda} \quad (3)$$

其中

$$v(\rho) = v_f \exp[-(1/b)(\rho/\rho_{cr})^b] \quad (4)$$

式中各主要变量含义为: $\rho_i(k)$ 为第  $i$  段  $KT$  时刻的车流密度, $v_i(k)$ 为第  $i$  段  $KT$  时刻的车流空间平均速度(注.本文中车流速度均取空间平均速度), $q_i(k)$ 为第  $i$  段到第  $i+1$  段在  $KT$  时刻的车流流量. $\Delta_i$ 为空间采样长度,即第  $i$  段的路段长度(为简单起见,以下均取为  $\Delta$ ). $r_i(k)$ 为第  $i$  段  $KT$  时刻的入口匝道车流率, $s_i(k)$ 为第  $i$  段  $KT$  时刻的出口匝道车流率.方程中参数有: $V_f$ 表示车流自由行驶速度,基本上可以理解为车流行驶的最大速度; $\rho_{cr}$ 表示临界密度,即车流量达到最大时的车流密度; $b, \tau, \gamma, \xi, \lambda, \alpha$ 等为方程的调整系数.式(4)是稳态交通流模型,描述稳态交通流的速密关系.

## 3 EKF 状态估计原理

我们知道, Kalman 滤波器是线性系统中的一种最小方差滤波.对于非线性系统

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k)] + \mathbf{\Gamma}[\mathbf{x}(k)]\mathbf{w}(k) \quad (5)$$

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{h}[\mathbf{x}(k+1)] + \mathbf{v}(k+1) \quad (6)$$

其中  $\mathbf{w}(k), \mathbf{v}(k)$  为零均值噪声向量,且

$$\mathbf{E}\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(k) = \mathbf{Q}(k), \quad \mathbf{E}\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k) = \mathbf{R}(k),$$

$\mathbf{Q}(k)$ 为系统噪声方差矩阵, $\mathbf{R}(k)$ 测量噪声矩阵, $\mathbf{\Gamma}[\mathbf{x}(k)]$ 是噪声驱动矩阵.



将原系统在  $\hat{X}_k$  处线性化,由此得到扩展的 Kalman 滤波器(EKF),它由下列一组递推方程组成

$$\hat{x}(k+1|k) = f[\hat{x}(k), k], \quad \hat{y}(k+1) = h[\hat{x}(k+1|k)] \tag{7}$$

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(k+1)\{y(k+1) - h[\hat{x}(k+1|k)]\} \tag{8}$$

$$K(k+1) =$$

$$P(k+1|k) \left[ \frac{\partial h}{\partial \hat{x}(k+1|k)} \right]^T \left[ \frac{\partial h}{\partial \hat{x}(k+1|k)} P(k+1|k) \left( \frac{\partial h}{\partial \hat{x}(k+1|k)} \right)^T + R(k+1) \right]^{-1} \tag{9}$$

$$P(k+1|k) = \frac{\partial f}{\partial \hat{x}(k)} P(k) \left( \frac{\partial f}{\partial \hat{x}(k)} \right)^T + \Gamma[x(k)] Q \Gamma^T[x(k)] \tag{10}$$

$$P(k+1) = [I - K(k+1) \frac{\partial h}{\partial \hat{x}(k+1|k)}] P(k+1|k) \tag{11}$$

其中

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{x}(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1(k)} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_6(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_1(k)} & \cdots & \frac{\partial f_6}{\partial x_6(k)} \end{bmatrix}_{[x(k)=\hat{x}(k)]} \tag{12}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \hat{x}(k+1|k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \hat{x}_1(k+1|k)} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial \hat{x}_6(k+1|k)} \\ \frac{\partial h_2}{\partial \hat{x}_1(k+1|k)} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial \hat{x}_6(k+1|k)} \end{bmatrix} \tag{13}$$

在给出初始滤波值  $\hat{x}(0)$  和初始滤波协方差矩阵  $P(0)$  后,递推算法的计算次序为:  $\hat{x}(0), P(0) \rightarrow P(1|0)$  及  $\hat{x}(1|0) \rightarrow K(1)$  及  $\hat{x}(1) \rightarrow \hat{x}(2|1)$  及  $P(2|1) \rightarrow \dots$ ,由此可逐步计算,对系统状态进行估计.显然,递推方程全都要在线实现.

为了利用 EKF 算法对上述交通流模型进行状态估计,需要计算递推方程中相应的偏导矩阵,得到与 EKF 递推方程相符的表达式,即可进行在线递推计算,得到各个时刻的系统状态估计值.

### 4 模型的应用

对上述复杂的高阶非线性模型做状态估计是一个比较困难的问题,为了简单且不失一般性,我们将仅讨论一条具有三个等长路段,一个入口匝道,一个出口匝道的公路,如图 1 所示.

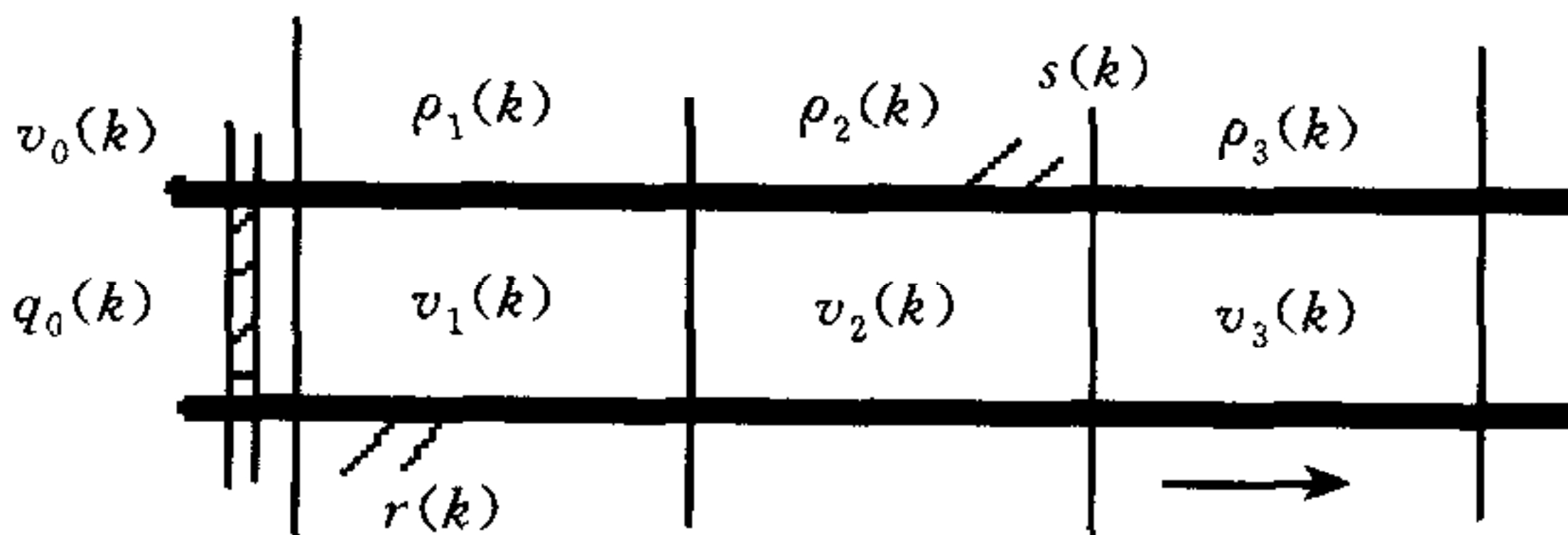


图 1 高速公路交通流系统示意图

仅第一路段、第三路段提供流量、平均速度的检测数据作为状态估计问题的输入量和输出量(测量值).取第一路段首端流量  $q_0$ 、平均速度  $v_0$  的实测值作为输入量;取第三路段末端的密度  $\rho_3$ 、平均速度  $v_3$  的实测值作为输出量.状态估计的目的就是根据检测器的测量值,经过滤波运算,能够比较准确的估计出中间没有检测器的路段的交通变量值(假设模型起始时刻状态值为标称值).

根据模型方程,各段状态交通量表达式如下

$$\rho_1(k+1) = \rho_1(k) + \frac{T}{\Delta} [q_0 - \alpha \rho_1(k)v_1(k) + (1-\alpha)\rho_2(k)v_2(k) + r(k)] \quad (14)$$

$$\rho_2(k+1) = \rho_2(k) + \frac{T}{\Delta} [\alpha \rho_1(k)v_1(k) + (1-\alpha)\rho_2(k)v_2(k) - \alpha \rho_2(k)v_2(k) - (1-\alpha)\rho_3(k)v_3(k) - s(k)] \quad (15)$$

$$\rho_3(k+1) = \rho_3(k) + \frac{T}{\Delta} [\alpha \rho_2(k)v_2(k) + (1-\alpha)\rho_3(k)v_3(k) - \alpha \rho_3(k)v_3(k) - (1-\alpha)\rho_4(k)v_4(k)] \quad (16)$$

$$v_1(k+1) = v_1(k) + \frac{T}{\tau} \left\{ v_f \exp \left[ -\frac{1}{b} \left( \frac{\rho_1(k)}{\rho_{cr}} \right)^b \right] - v_1(k) \right\} + \frac{T\xi}{\Delta} v_1(k) [v_0(k) - v_1(k)] - \frac{\gamma T}{\tau \Delta} \frac{\rho_2(k) - \rho_1(k)}{\rho_1(k) + \lambda} \quad (17)$$

$$v_2(k+1) = v_2(k) + \frac{T}{\tau} \left\{ v_f \exp \left[ -\frac{1}{b} \left( \frac{\rho_2(k)}{\rho_{cr}} \right)^b \right] - v_2(k) \right\} + \frac{T\xi}{\Delta} v_2(k) [v_1(k) - v_2(k)] - \frac{\gamma T}{\tau \Delta} \frac{\rho_3(k) - \rho_2(k)}{\rho_2(k) + \lambda} \quad (18)$$

$$v_3(k+1) = v_3(k) + \frac{T}{\tau} \left\{ v_f \exp \left[ -\frac{1}{b} \left( \frac{\rho_3(k)}{\rho_{cr}} \right)^b \right] - v_3(k) \right\} + \frac{T\xi}{\Delta} v_3(k) [v_2(k) - v_3(k)] - \frac{\gamma T}{\tau \Delta} \frac{\rho_4(k) - \rho_3(k)}{\rho_3(k) + \lambda} \quad (19)$$

其中  $\rho_4(k), v_4(k)$  可用前一路段前一时刻的密度和速度  $\rho_3(k-1), v_3(k-1)$  近似。

我们做如下定义,令  $x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \\ x_6(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1(k) \\ \rho_2(k) \\ \rho_3(k) \\ v_1(k) \\ v_2(k) \\ v_3(k) \end{bmatrix}$ ,  $u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_3(k) \\ u_4(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0(k) \\ q_0(k) \\ r(k) \\ s(k) \end{bmatrix}$ . 于是有

$$x_1(k+1) = x_1(k) + \frac{T}{\Delta} [u_2(k) - \alpha x_1(k)x_4(k) - (1-\alpha)x_2(k)x_5(k) + u_3(k)] \quad (20)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + \frac{T}{\Delta} [\alpha x_1(k)x_4(k) + (1-\alpha)x_2(k)x_5(k) - \alpha x_2(k)x_5(k) - (1-\alpha)x_3(k)x_6(k) - u_4(k)] \quad (21)$$

$$x_3(k+1) = x_3(k) + \frac{T}{\Delta} [\alpha x_2(k)x_5(k) + (1-\alpha)x_3(k)x_6(k) - \alpha x_3(k)x_6(k) - (1-\alpha)x_3(k-1)x_6(k-1)] \quad (22)$$

$$x_4(k+1) = x_4(k) + \frac{T}{\tau} \left\{ v_f \exp \left[ -\frac{1}{b} \left( \frac{x_1(k)}{\rho_{cr}} \right)^b \right] - x_4(k) \right\} + \frac{T\xi}{\Delta} x_4(k) [u_1(k) - x_4(k)] - \frac{T\gamma}{\Delta\tau} \frac{x_2(k) - x_1(k)}{x_1(k) + \lambda} \quad (23)$$

$$x_5(k+1) = x_5(k) + \frac{T}{\tau} \left\{ v_f \exp \left[ -\frac{1}{b} \left( \frac{x_2(k)}{\rho_{cr}} \right)^b \right] - x_5(k) \right\} + \frac{T\xi}{\Delta} x_5(k) [x_4(k) - x_5(k)] - \frac{T\gamma}{\Delta\tau} \frac{x_3(k) - x_2(k)}{x_2(k) + \lambda} \quad (24)$$

$$x_6(k+1) = x_6(k) + \frac{T}{\tau} \left\{ v_f \exp \left[ -\frac{1}{b} \left( \frac{x_3(k)}{\rho_{cr}} \right)^b \right] - x_6(k) \right\} + \frac{T\xi}{\Delta} x_6(k) [x_5(k) - x_6(k)] - \frac{T\gamma}{\Delta\tau} \frac{x_3(k-1) - x_6(k)}{x_6(k) + \lambda} \quad (25)$$

$$\text{令 } \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_5(k+1) \\ x_6(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1[\mathbf{x}(k)] \\ f_2[\mathbf{x}(k)] \\ f_3[\mathbf{x}(k)] \\ f_4[\mathbf{x}(k)] \\ f_5[\mathbf{x}(k)] \\ f_6[\mathbf{x}(k)] \end{bmatrix} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k)], \text{ 并且取输出量为}$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3(k) \\ x_6(k) \end{bmatrix} = \mathbf{h}[\mathbf{x}(k)],$$

则系统状态方程可以表示成

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}[\mathbf{x}(k)] + \Gamma[\mathbf{x}(k)]\mathbf{w}(k), \\ \mathbf{y}(k+1) &= \mathbf{h}[\mathbf{x}(k+1)] + \mathbf{v}(k+1), \end{aligned}$$

其中  $\Gamma[\mathbf{x}(k)]$  为噪声驱动矩阵, 本文用一个常数矩阵代替.

由式(12), (13)计算出偏导矩阵

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \hat{\mathbf{x}}(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1(k)} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_6(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_1(k)} & \cdots & \frac{\partial f_6}{\partial x_6(k)} \end{bmatrix}_{[\mathbf{x}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k)]},$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1(k)} &= 1 - \frac{T}{\Delta} \alpha x_4(k), \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2(k)} = -\frac{T}{\Delta} (1 - \alpha) x_5(k), \quad \cdots, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_6(k)} = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1(k)} &= \frac{T}{\Delta} \alpha x_4(k), \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2(k)} = 1 + \frac{T}{\Delta} (1 - 2\alpha) x_5(k), \quad \cdots, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_6(k)} = -\frac{T}{\Delta} (1 - \alpha) x_3(k), \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_1(k)} &= 0, \quad \frac{\partial f_6}{\partial x_2(k)} = 0, \quad \cdots, \quad \frac{\partial f_6}{\partial x_6(k)} = 1 - \frac{T}{\tau} + \frac{T}{\Delta} \xi x_5(k) - 2 \frac{T}{\Delta} \xi x_6(k), \\ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \hat{\mathbf{x}}(k+1|k)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \hat{x}_1(k+1|k)} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial \hat{x}_6(k+1|k)} \\ \frac{\partial h_2}{\partial \hat{x}_1(k+1|k)} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial \hat{x}_6(k+1|k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

即可利用递推方程组(7)~(11)进行计算. 其中系统噪声方差矩阵  $Q(k)$ 、测量噪声矩阵  $R(k)$  均由仿真产生的测量数据实时计算得到.

## 5 仿真讨论

对以上模型进行仿真, 假设交通密度不均是由第一路段的突发性交通事故引起的. 模型中的仿真参数<sup>[3]</sup>为:  $v_f = 98$  (km/h),  $\rho_{cr} = 32$  (veh/m),  $b = 3$ ,  $\tau = 19.4/3600$ ,  $\gamma = 34.7$ ,  $\xi = 1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\alpha = 0.95$ ,  $\Delta = 0.8$  km.



图 2,3 是利用 EKF 对三路段高速公路车流密度、车流速度跟踪的仿真结果.

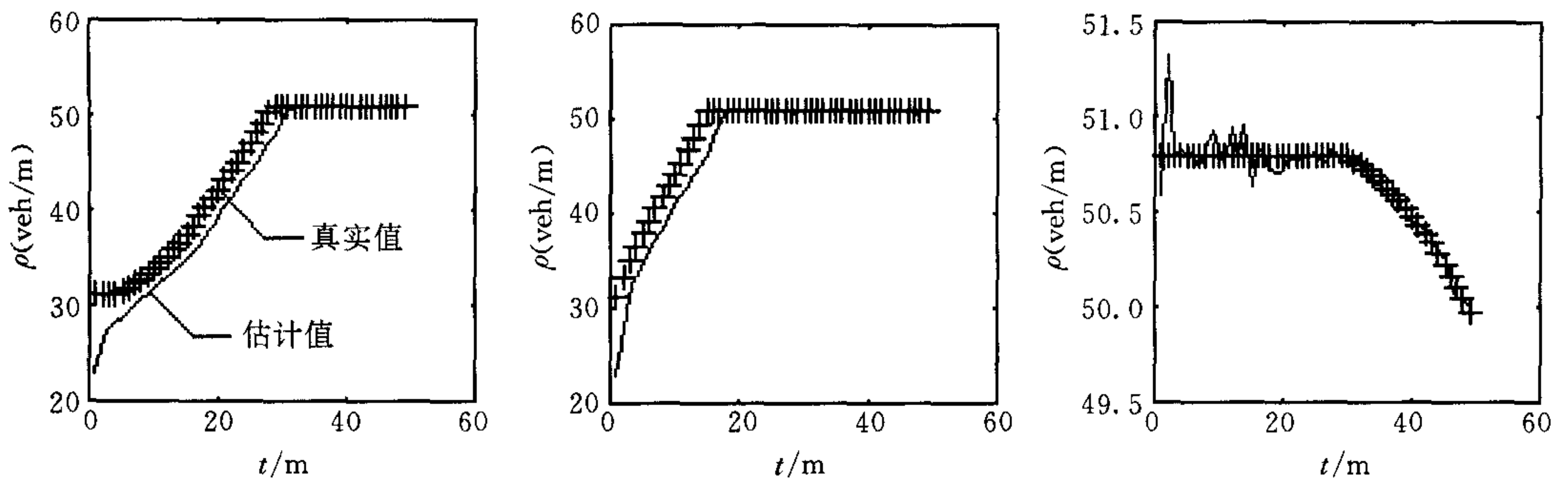


图 2 扩展 Kalman 滤波器对交通流密度的估计

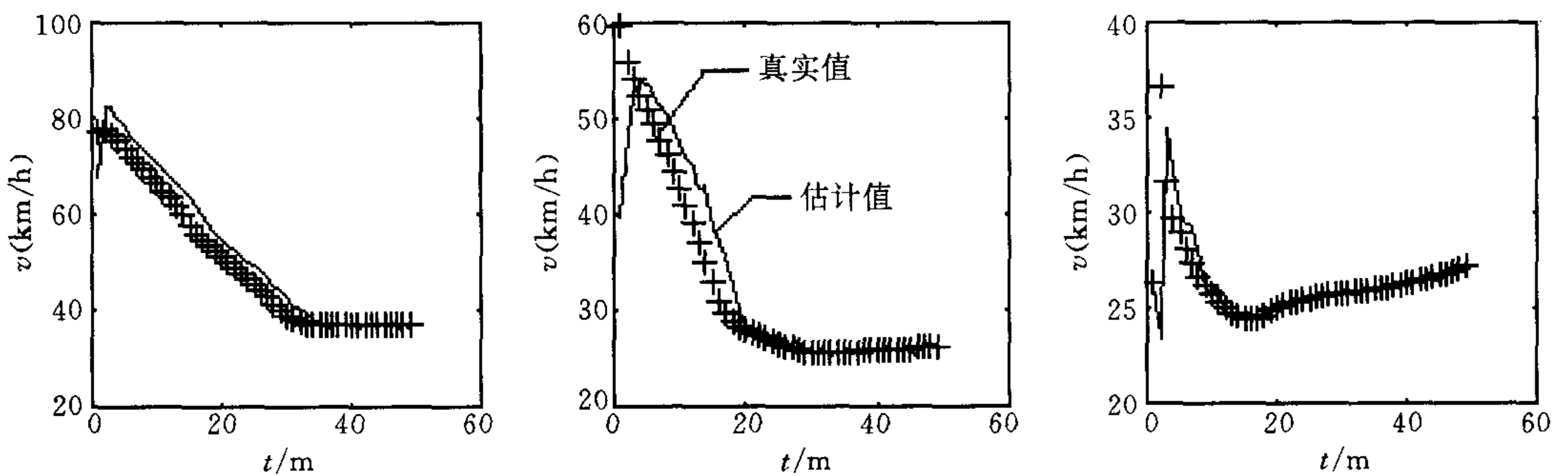


图 3 扩展 Kalman 滤波器对交通流车速度的估计

图中+号构成的曲线表示仿真的状态数据真值,连续曲线表示状态数据的估计值.显然,估计结果很好地跟踪了第三路段发生交通事故后引起的一系列交通状态的变化.仿真过程中研究了模型误差、初始状态值的误差以及测量误差对算法的影响:通过对模型参数加一定的扰动可以研究模型误差的影响,对算法初始状态值取一定的随机数可以研究初始值的影响,对算法的采样函数加入一定的扰动可以研究测量误差的影响.由图 2,3 可以看出用 Kalman 滤波器的状态估计可以有效地去除由初始状态值的误差以及测量误差所造成的模型状态计算的误差,在短时间内迅速跟踪实际状态数据;而模型误差对算法的影响比较大(图略).图 4~7 是各路段车流密度、车流速度的真值及其 EKF 估计值的三维图形表示,图

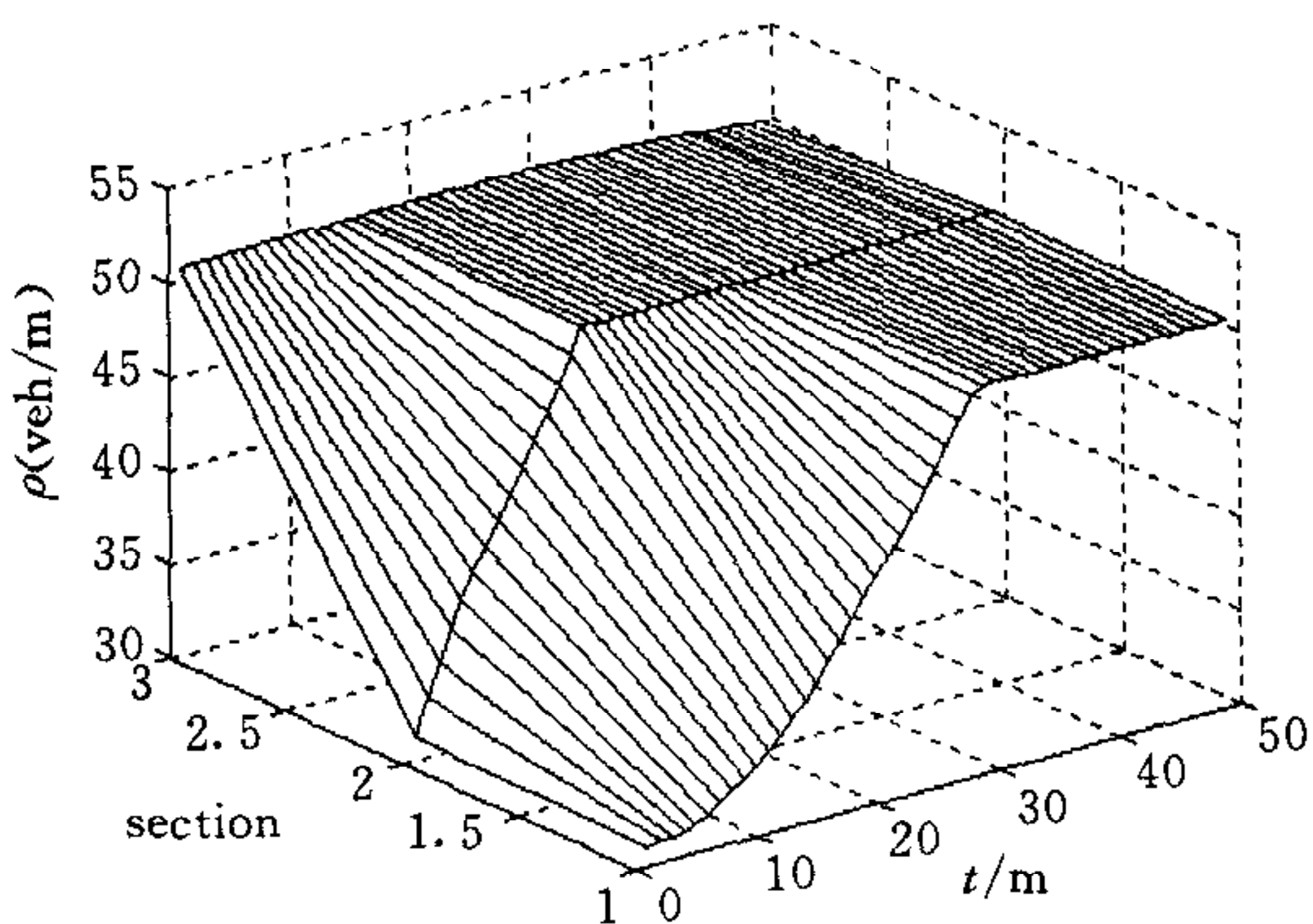


图 4 各路段车流密度的真值

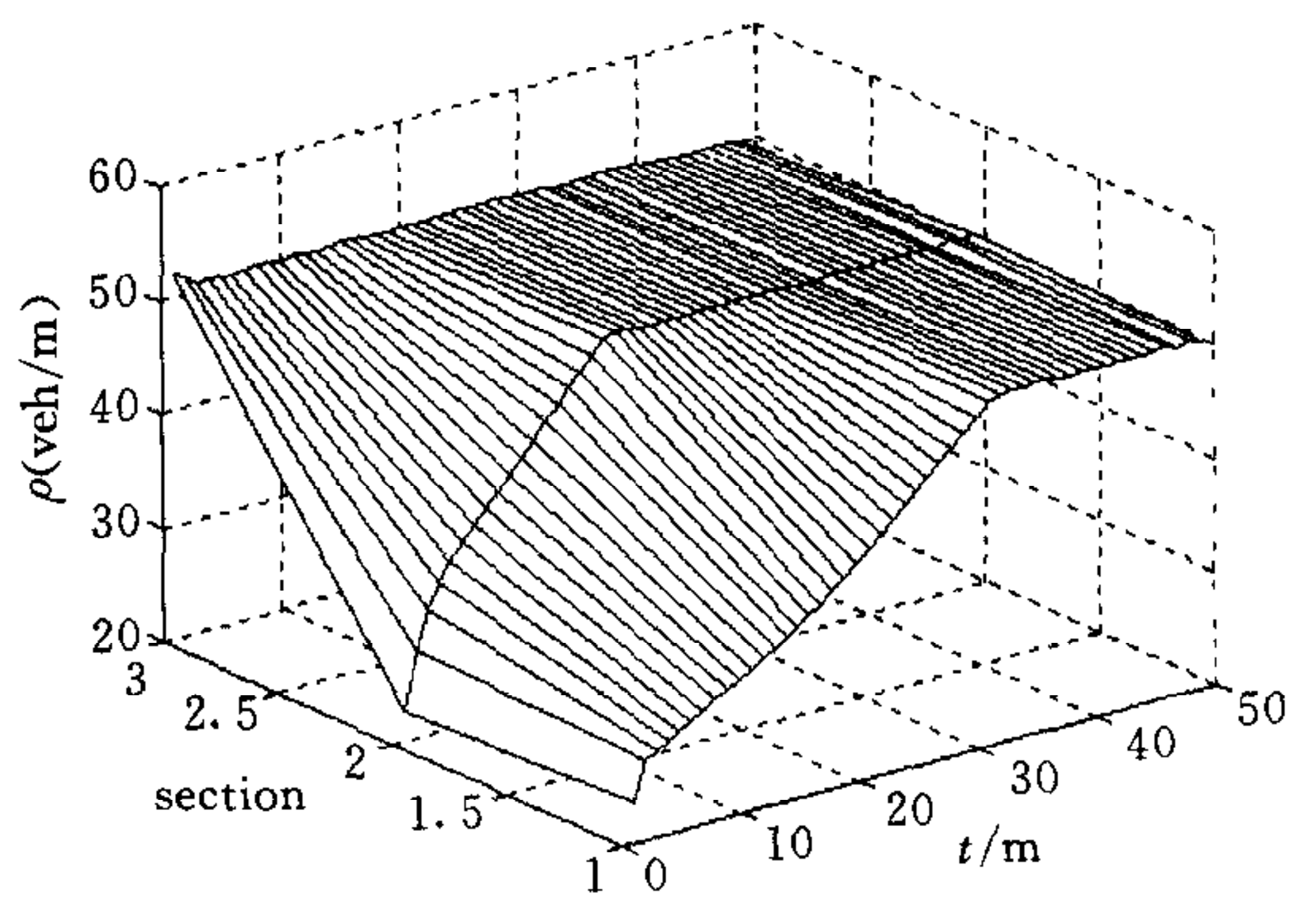


图 5 EKF 对各路段车流密度的估计值

中每个 Section 的长度为 800 米.

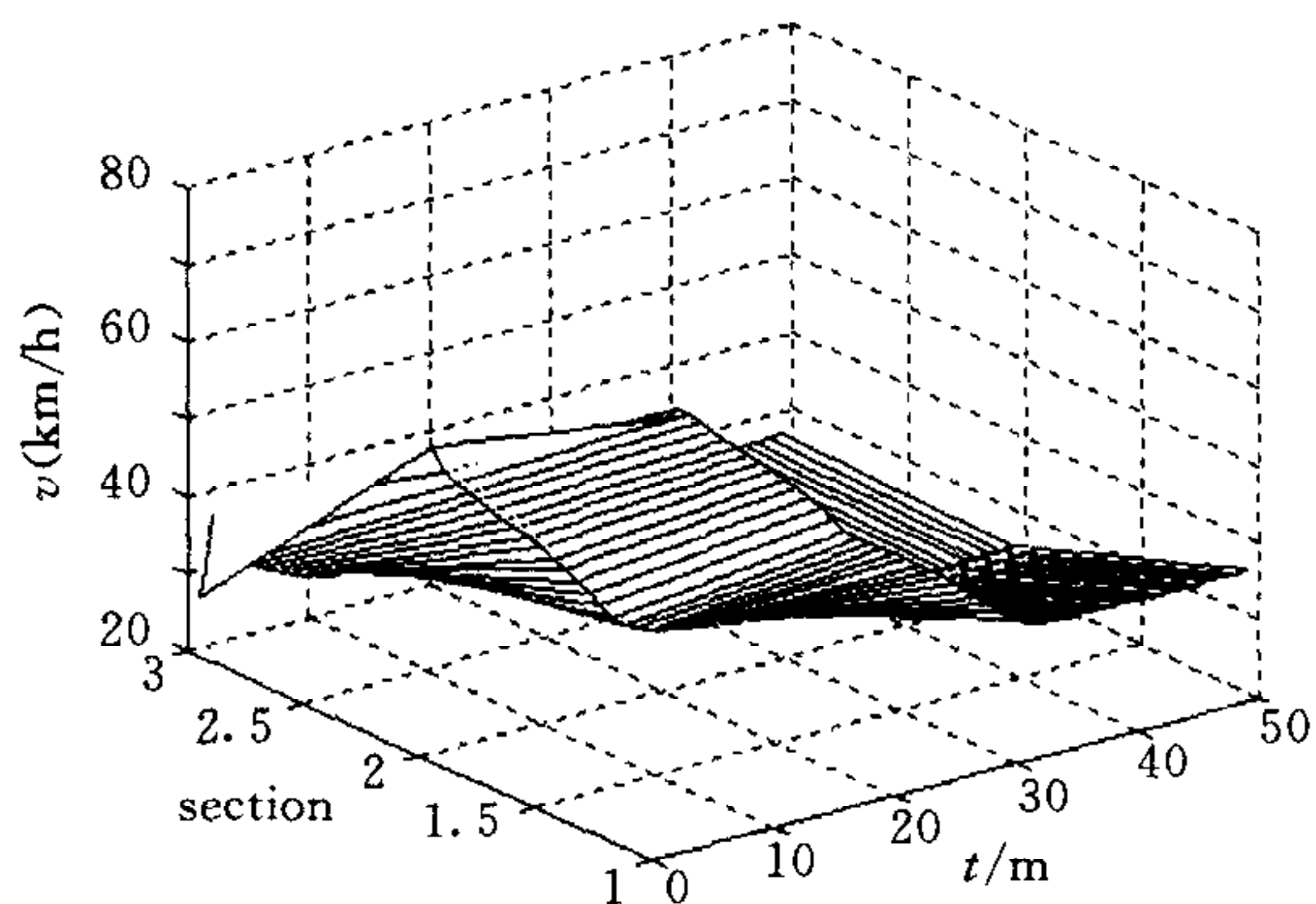


图 6 各路段车流速度的真值

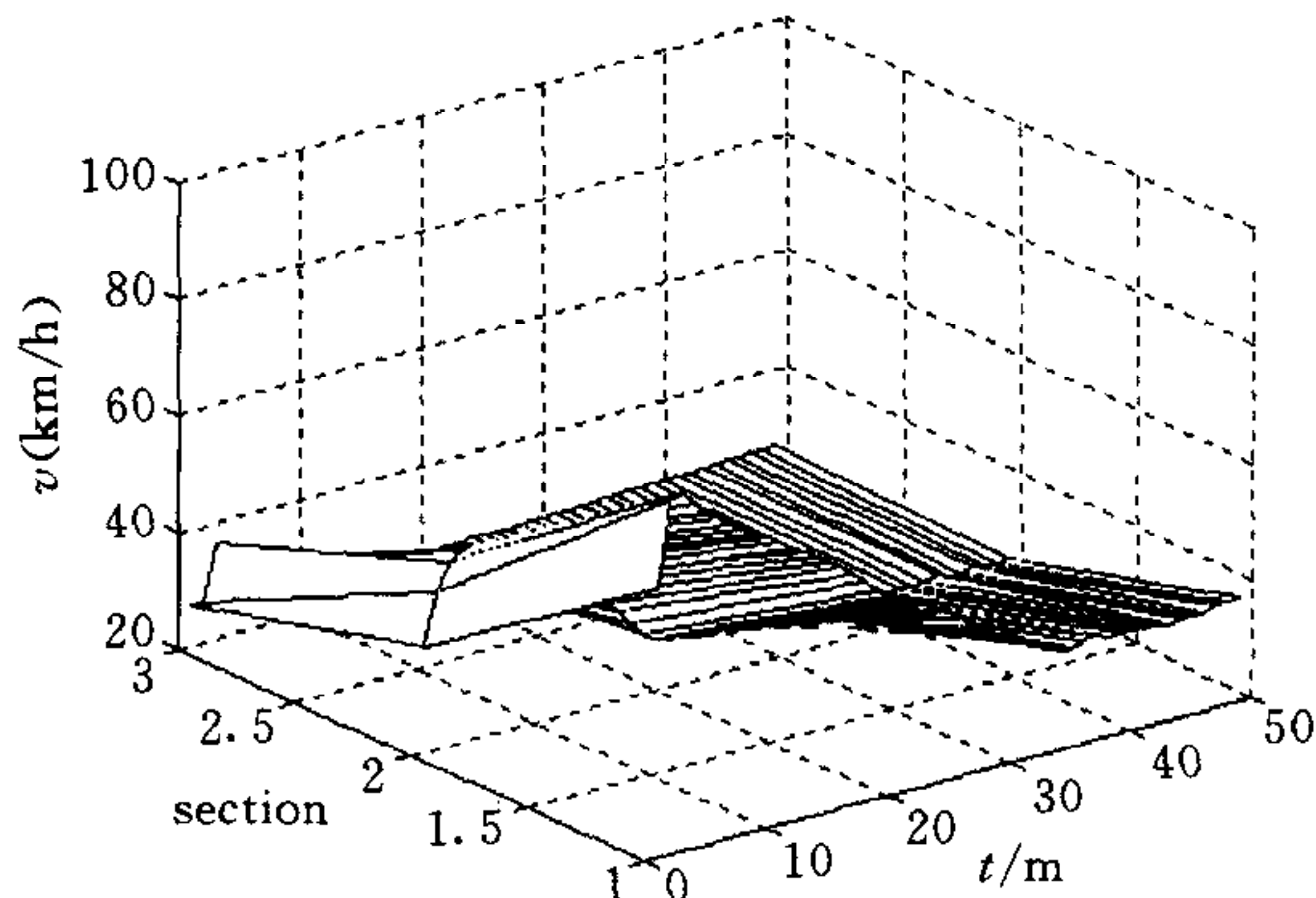


图 7 EKF 对各路段车流速度的估计值

## 6 结束语

本文提供了从实际高速公路交通数据产生宏观模型状态估计,进而有了进行交通流监控的可能性.通过划分成段并分别计算这个方法,可以扩展到更长的高速公路路段.

同时,根据实际控制需要以及采样时间的设定,再考虑一定条件下每计算一次状态数据所需的最大时间以及计算的精度,可以确定所能准确估计的状态量的个数,由此可以粗略估计公路上两个检测器之间的最大路段数,实际上也即是估算出两个检测器之间的最远距离,这对交通设备安装过程中的节省开支将可能具有直接的指导意义.

## 参 考 文 献

- 1 Papageorgiou M. Applications of Automatic Control Concepts to Traffic Flow Modeling and Control. New York: Springer-Verlag, 1983. 35~41
- 2 Papageorgiou M. Multiplayer control system design applied to freeway traffic. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1984, 29(6):36~45
- 3 荆便顺. 道路交通控制工程. 北京:人民交通出版社, 1995. 3~38

**罗赞文** 教授级高级工程师、上海经达机电工程设计研究所所长、清华大学论文博士生. 主要从事交通工程方面的研究.

**吴志坚** 硕士. 主要从事自动控制理论、智能控制方面的研究.

**韩曾晋** 清华大学自动化系教授, 博士生导师.