

# 自旋卫星喷气姿态控制动力学

邢光谦

(北京控制工程研究所)

## 摘 要

本文讨论了自旋卫星向任意目标姿态机动的动力学问题。文中导出了一组受一串脉冲控制力矩作用的卫星姿态运动的解析表达式。这些公式描述了角动量、章动角和姿态相位角与控制力矩、控制次数之间的变化规律,可以直接应用于卫星姿控系统和姿态确定的设计。

必须指出的是:关于将卫星自旋轴控制到垂直于轨道平面或将自旋轴控制到指向太阳,都是本文所得结果的两个特例。

## 一、问题的提出

在自旋卫星喷气姿态控制系统设计中,由于姿控用的星上喷气发动机是和卫星本体固连的,因此,随着卫星的自旋,由发动机产生的控制力矩的方向也将在空间绕自旋轴旋转。根据刚体角动量定理,我们知道:“一个旋转的物体,在外力矩的作用下,其角动量矢量将倒向力矩的指向。”因此,要想控制自旋轴到所要求的方向,星上发动机喷气方式只能是断续周期的,而不是连续的。同时要求解决以下问题:

- (1) 断续喷气控制的相位如何选择?有何规律?
- (2) 在一定周期的断续力矩作用下,姿态运动规律是什么?
- (3) 控制力矩大小、次数和姿态运动参数的关系。

讨论在断续力矩作用下的姿态运动规律,实际在数学上就是讨论解决一组描述姿态运动的欧拉动力学和运动学方程问题。这类问题若在允许误差范围内,能近似地求出问题的解析解,则无论对于姿态控制系统设计还是姿测系统的设计都将具有十分重要的意义,这也正是我们所要研究的问题。

假定在单位球面上有个惯性参考系  $\{\hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1, o\}$  (见图1),若将自旋轴姿态  $A$  控制到  $C$ ,一般可取两种途径:一条是走大圆弧  $\widehat{AmC}$ ,从  $A$  到达  $C$ ;另一条是走所谓“等倾角线”轨迹  $\widehat{AnC}$ 。等倾角线名称的由来是因为在等倾角线上任何一点切线方向与这点的子午线方向所成的角是相等的缘故。显然在大圆弧轨线上各点切线方向和该点的子午线方向所成的角是不相等的。因此,从工程实现的观点来看,“等倾角线”控制方法比大圆弧方法简单,尽管大圆弧方法走的路径比“等倾角线”法所走的路径要短(因而所耗燃料当然也要节省些),但是工程上还是喜欢采用“等倾角线”的控制方法。

从图1中可看出:当目标姿态  $C$  位于赤道平面(例如是  $B$  的位置)或子午面上时(例

如是  $D$  的位置) 时, 这时大圆弧轨线和“等倾角线”轨线相重合, 目标姿态在赤道平面上时的等倾角为  $0$  或  $\pi$ . 1970 年德国人 Schmieler 发表了这两种特殊目标姿态的研究结果<sup>[1]</sup>, 所得结果与本文作者的一篇报告 (以下简称“报告”)<sup>1)</sup> 中做的结果一致. 本文主要将讨论对任意目标姿态控制动力学问题, 给出了对任意目标姿态, 用“等倾角线”控制方法控制过程姿态动力学的解析解. 这种解析解至今仍未见国外杂志发表, 仅在研究章动控制中, 对此类问题给了一个几何作图方法<sup>[2]</sup>. 我们讨论的方法全部用解析的方法, 当然对所得结果也可以用作图方法表示出来.

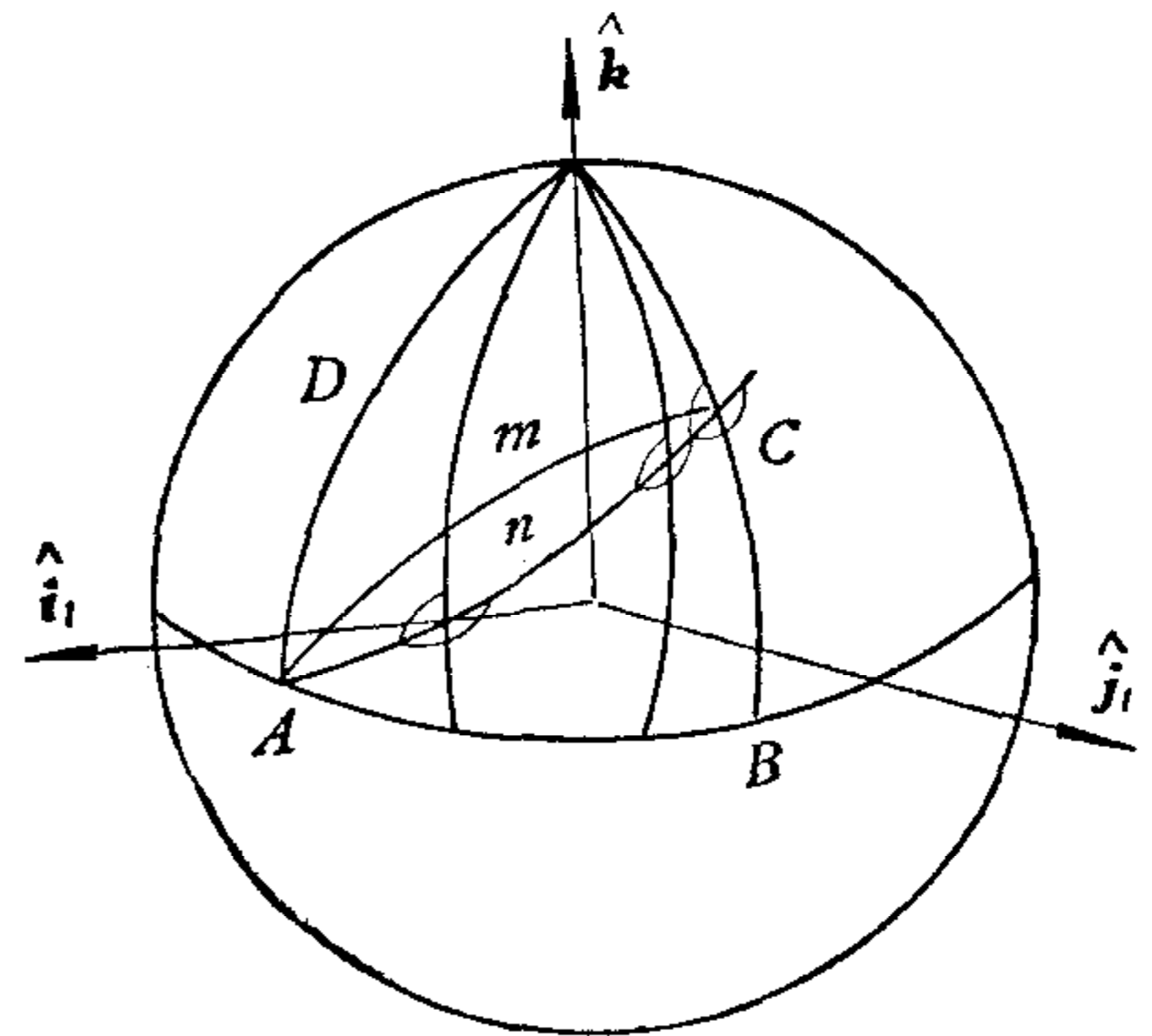


图 1 大圆弧和“等倾角线”控制姿态轨线

## 二、任意目标姿态的姿控动力学分析

在实际姿控中, 由于姿态测量部件的限制, 必须考虑任意目标姿态的“等倾角线”控制问题. 但困难在于若初始姿态和目标姿态在“等倾角线”控制方法中不在同一平面, 则找不到一惯性姿态参考系, 使在这一惯性参考系中描述姿态从而求得近似解析解. 为了克服这一困难, 我们选用了一组特定姿态参数作为姿态状态量, 在一组特定参考系中描述姿态运动, 最后求得问题的解析解.

### 1. 参考系

建立以下参考系:

$R^I: \{\hat{i}_I, \hat{j}_I, \hat{k}_I, o\}$  卫星质心惯性参考系, 其中心在卫星质心上, 而且平行地心惯性系;

$R^S: \{\hat{i}_S, \hat{j}_S, \hat{k}_S, o\}$  卫星质心太阳参考系;

$R^h: \{\hat{i}_h, \hat{j}_h, \hat{k}_h, o\}$  卫星质心角动量参考系;

$R^b: \{\hat{i}_b, \hat{j}_b, \hat{k}_b, o\}$  卫星质心本体坐标系.

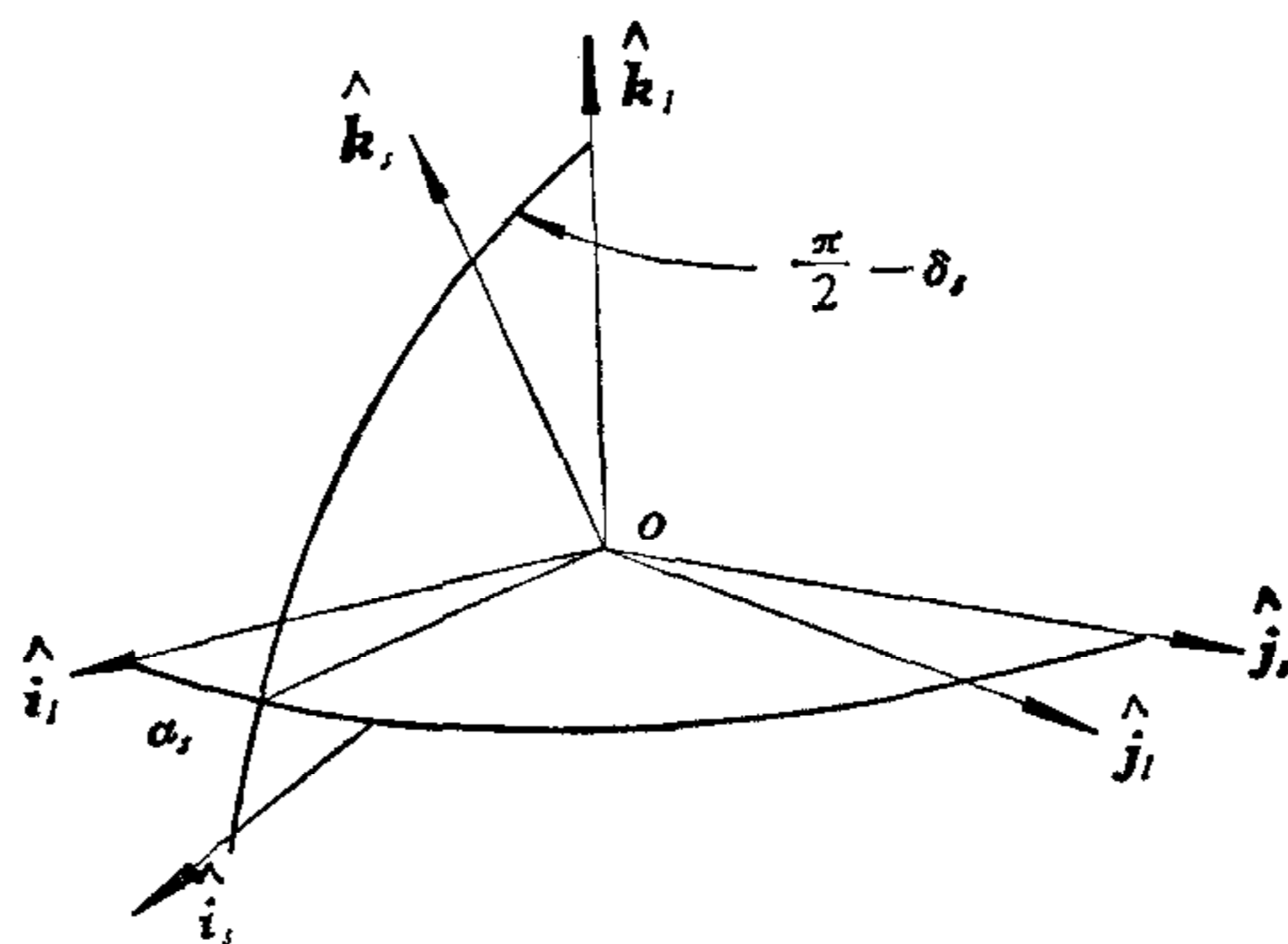


图 2 卫星质心惯性系和太阳参考系

1) 1979 年 4 月在全国空间控制技术会议上的报告.

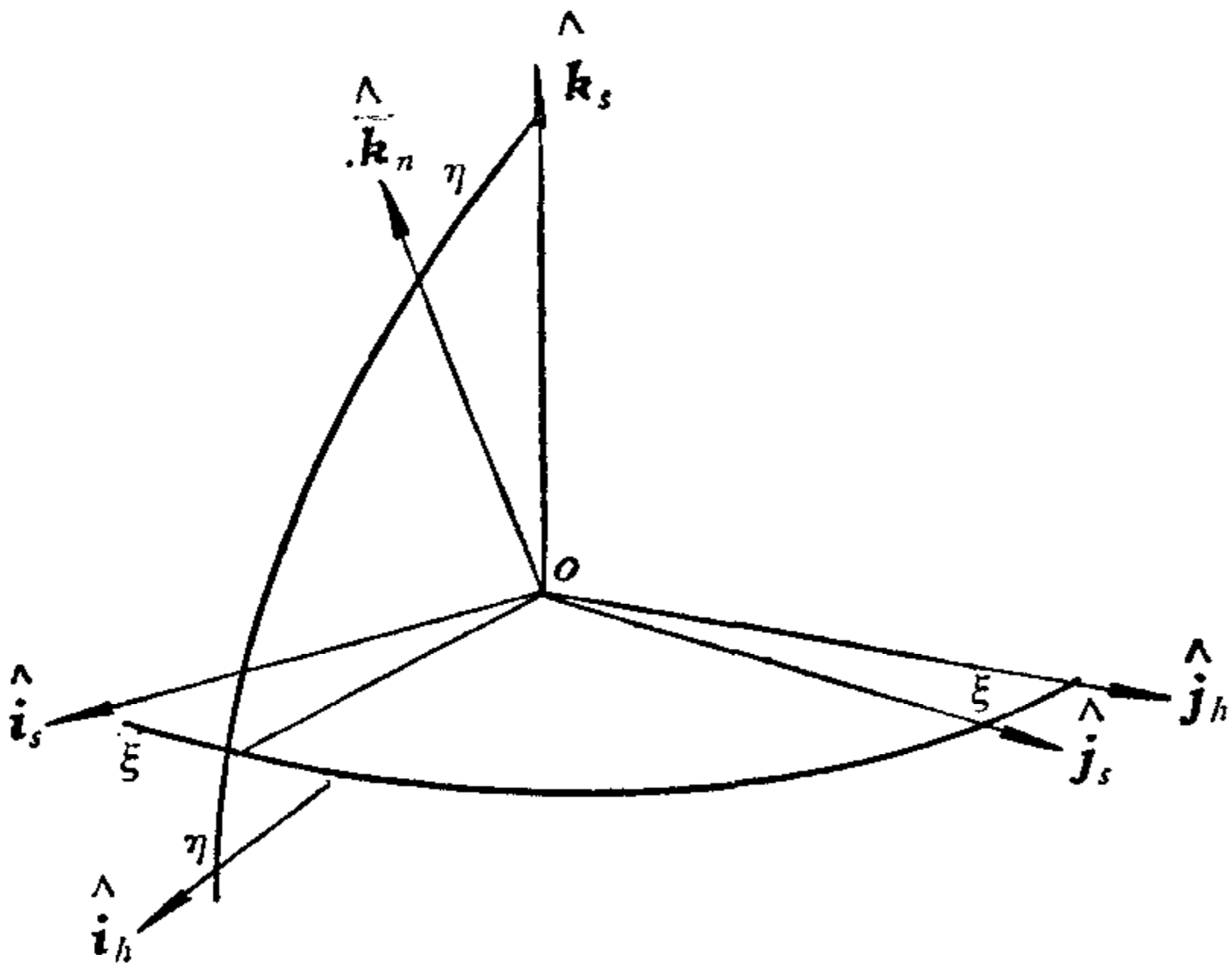


图3 太阳参考系和卫星角动量参考系

上述坐标系间坐标变换关系是:

$$\begin{pmatrix} \hat{i}_s \\ \hat{j}_s \\ \hat{k}_s \end{pmatrix} = A_{sI} \begin{pmatrix} \hat{i}_I \\ \hat{j}_I \\ \hat{k}_I \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$A_{sI} = R_y\left(\frac{\pi}{2} - \delta_s\right) R_z(\alpha_s) \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{i}_h \\ \hat{j}_h \\ \hat{k}_h \end{pmatrix} = A_{hs} \begin{pmatrix} \hat{i}_s \\ \hat{j}_s \\ \hat{k}_s \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$A_{hs} = R_y(\eta) R_z(\xi), \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{i}_b \\ \hat{j}_b \\ \hat{k}_b \end{pmatrix} = A_{bh} \begin{pmatrix} \hat{i}_h \\ \hat{j}_h \\ \hat{k}_h \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$A_{bh} = R_z(\phi_3) R_y(\phi_2) R_x(\phi_1). \quad (6)$$

$R_x(\cdot)$ ,  $R_y(\cdot)$ ,  $R_z(\cdot)$ , 分别为绕  $x$ ,  $y$ ,  $z$  轴的单次旋转坐标变换阵, 形式为:

$$R_x(\cdot) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\cdot) & \sin(\cdot) \\ 0 & -\sin(\cdot) & \cos(\cdot) \end{pmatrix}, \quad R_y(\cdot) = \begin{pmatrix} \cos(\cdot) & 0 & -\sin(\cdot) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\cdot) & 0 & \cos(\cdot) \end{pmatrix},$$

$$R_z(\cdot) = \begin{pmatrix} \cos(\cdot) & \sin(\cdot) & 0 \\ -\sin(\cdot) & \cos(\cdot) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

## 2. 动力学方程

从上述坐标变换关系, 不难算出  $R^h$  相对  $R^s$  的角速度  $\omega_{bs}$

$$\omega_{bs} = \dot{\xi} \hat{k}_s + \dot{\phi}_1 \hat{i}_h + (\eta + \dot{\phi}_2 \cos \phi_1) \hat{j}_h + \dot{\phi}_2 \sin \phi_1 \hat{k}_h + \dot{\phi}_3 \hat{k}_b. \quad (8)$$

显然, 若  $\omega_{bs}$  在  $R^b$  中投影记为  $\omega_{bs}^b$ , 则

$$\omega_{bs}^b = A_{bh} A_{hs} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} + A_{bh} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \eta + \dot{\phi}_2 \cos \phi_1 \\ \dot{\phi}_2 \sin \phi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_3 \end{pmatrix} \quad (9)$$

设卫星主轴惯量张量  $I$  为

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}, \quad (10)$$

则在  $R^b$  中角动量  $H$  为

$$H = I\omega_{bs}. \quad (11)$$

另一方面在  $R^h$  中, 角动量为

$$H^h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}, \quad (12)$$

那么在  $R^b$  中, 角动量  $H$  为

$$H = A_{bh} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}, \quad (13)$$

将 (11), (13) 两式联立, 并解出  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ ,

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 = \frac{1}{\cos \phi_2} \left\{ \dot{\xi} [\sin \eta \cos \phi_2 + \cos \eta \sin \phi_2 \cos \phi_1] + \eta (-\sin \phi_2 \sin \phi_1) \right. \\ \left. - h \sin \phi_2 \cos \phi_1 \left[ \frac{\cos^2 \phi_3}{I_x} + \frac{\sin^2 \phi_3}{I_y} \right] + h \sin \phi_1 \sin \phi_3 \cos \phi_3 \left( \frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_y} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_2 = -\dot{\xi} \cos \eta \sin \phi_1 - \eta \cos \phi_1 - \sin \phi_2 \cos \phi_1 \cos \phi_3 \sin \phi_3 h \left[ \frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_y} \right] \\ + \sin \phi_1 h \left[ \frac{\sin^2 \phi_3}{I_x} + \frac{\cos^2 \phi_3}{I_y} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_3 = \frac{h}{I_z} \cos \phi_2 \cos \phi_1 - \dot{\xi} \cos \eta \cos \phi_1 \frac{1}{\cos \phi_2} + \eta \frac{\sin \phi_1}{\sin \phi_2} + h \operatorname{tg} \phi_2 \\ \cdot \sin \phi_2 \cos \phi_1 \left( \frac{\cos^2 \phi_3}{I_x} + \frac{\sin^2 \phi_3}{I_y} \right) - h \sin \phi_1 \sin \phi_3 \cos \phi_3 \operatorname{tg} \phi_2 \left( \frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_y} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

众所周知, 在  $R^h$  中角动量动力学方程为:

$$\frac{dH^h}{dt} = \frac{\partial H^h}{\partial t} + \omega_{hs} \times H^h = M^h, \quad (17)$$

其中

$$H^h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$\omega_{hs} = \begin{pmatrix} -\sin \eta \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \cos \eta \dot{\xi} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

$M^h$  是控制力矩在  $R^h$  中的投影。

将 (17) 式写成分量形式, 并代入式 (14—16), 化简得描述姿态运动的全部动力学方

程组:

$$\dot{\xi} = \frac{M_y^h}{h \sin \eta}, \quad (20)$$

$$\dot{\eta} = \frac{M_x^h}{h}, \quad (21)$$

$$\dot{h} = M_z^h, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 = & -h \operatorname{tg} \phi_2 \cos \phi_1 \left[ \frac{\cos^2 \phi_3}{I_x} + \frac{\sin^2 \phi_3}{I_y} \right] + \frac{h \sin \phi_1 \sin \phi_3 \cos \phi_3}{\cos \phi_2} \left[ \frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_y} \right] \\ & + [\sin \eta + \cos \eta \cdot \operatorname{tg} \phi_2 \cos \phi_1] \frac{M_y^h}{h \sin \eta} - \operatorname{tg} \phi_2 \sin \phi_1 \frac{M_x^h}{h}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_2 = & \sin \phi_1 \left[ \frac{\sin^2 \phi_3}{I_x} + \frac{\cos^2 \phi_3}{I_y} \right] h - \cos \phi_1 \sin \phi_2 \sin \phi_3 \cos \phi_3 h \left[ \frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_y} \right] \\ & - \cos \eta \sin \phi_1 \frac{M_y^h}{h \sin \eta} - \cos \phi_1 \frac{M_x^h}{h}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_3 = & \frac{h}{I_z} \cos \phi_2 \cos \phi_1 + h \operatorname{tg} \phi_2 \sin \phi_1 \cos \phi_1 \left[ \frac{\cos^2 \phi_3}{I_x} + \frac{\sin^2 \phi_3}{I_y} \right] \\ & - h \sin \phi_1 \sin \phi_3 \cos \phi_3 \operatorname{tg} \phi_2 \left( \frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_y} \right) \\ & - \cos \eta \cos \phi_1 \frac{M_y^h}{h \sin \eta \cos \phi_2} + \frac{\sin \phi_1 M_x^h}{\cos \phi_2 h}. \end{aligned} \quad (25)$$

若卫星是对称旋转体即  $I_x = I_y$  时, 则式 (20—25) 方程组可简化为:

$$\dot{\xi} = \frac{M_y^h}{h \sin \eta}, \quad (26)$$

$$\dot{\eta} = \frac{M_x^h}{h}, \quad (27)$$

$$\dot{h} = M_z^h, \quad (28)$$

$$\dot{\phi}_1 = -\frac{h}{I_{\parallel}} \operatorname{tg} \phi_2 \cos \phi_1 + [1 + \operatorname{ctg} \eta \operatorname{tg} \phi_2 \cos \phi_1] \frac{M_y^h}{h} - \operatorname{tg} \phi_2 \sin \phi_1 \frac{M_x^h}{h}, \quad (29)$$

$$\dot{\phi}_2 = \frac{h \sin \phi_1}{I_{\parallel}} - \operatorname{ctg} \eta \sin \phi_1 \frac{M_y^h}{h} - \cos \phi_1 \frac{M_x^h}{h}, \quad (30)$$

$$\dot{\phi}_3 = \frac{h}{I_z} \cos \phi_2 \cos \phi_1 + \frac{h}{I_{\parallel}} \operatorname{tg} \phi_2 \sin \phi_2 \cos \phi_1 - \operatorname{ctg} \eta \frac{\cos \phi_1}{\cos \phi_2} \frac{M_y^h}{h} + \frac{\sin \phi_1 M_x^h}{\cos \phi_2 h}. \quad (31)$$

其中

$$I_{\parallel} = I_x = I_y. \quad (32)$$

### 3. 等倾角脉冲力矩作用下的姿态运动

首先我们考察一下作用在卫星上的力矩。如图 5 所示, 一般姿控喷管和自旋轴平行安装并和自旋轴相距一段距离, 这个距离就是力臂。

如图 5 所示, 由于星上姿控发动机喷管是和自旋卫星本体固连的, 因而卫星旋转一周, 姿控喷气力矩  $M$  也跟着在空间旋转一周. 所以要想控制姿控力矩在与自旋轴相垂直的平面上的方向, 就必须给出一个已知的相位参考基准.

如果选用卫星子午面太阳狭缝脉冲作为控制参考相位基准时, 那么图 1 中  $\hat{k}_l$  就应该代表太阳方向矢量  $\hat{s}$ . 我们将自旋轴——太阳方向矢量平面和自旋轴——控制力矩平面的夹角称为“控制力矩相位角”, 用  $\beta$  表示. 这样一来, 所谓“等倾角线”控制就是要求控制力矩相位角  $\beta$  等于某一常数的控制, 这个常数是由初始姿态和目标姿态所决定的. 我们知道发动机喷气有一段时间, 这段时间内喷气合力矩必须指向所要求的方向. 理论上喷气的时间越短越好, 但从执行机构来说, 喷气时间越短, 其重复性越差, 而且研制困难也越多. 但喷气时间长了部分燃料被浪费. 根据分析, 一般取喷气角(即喷气时间和卫星转速的乘积)  $45^\circ-60^\circ$  为宜. 为了分析方便, 不失一般性, 假定控制力矩是理想的脉冲形式, 数学上用  $\delta$  函数描述.

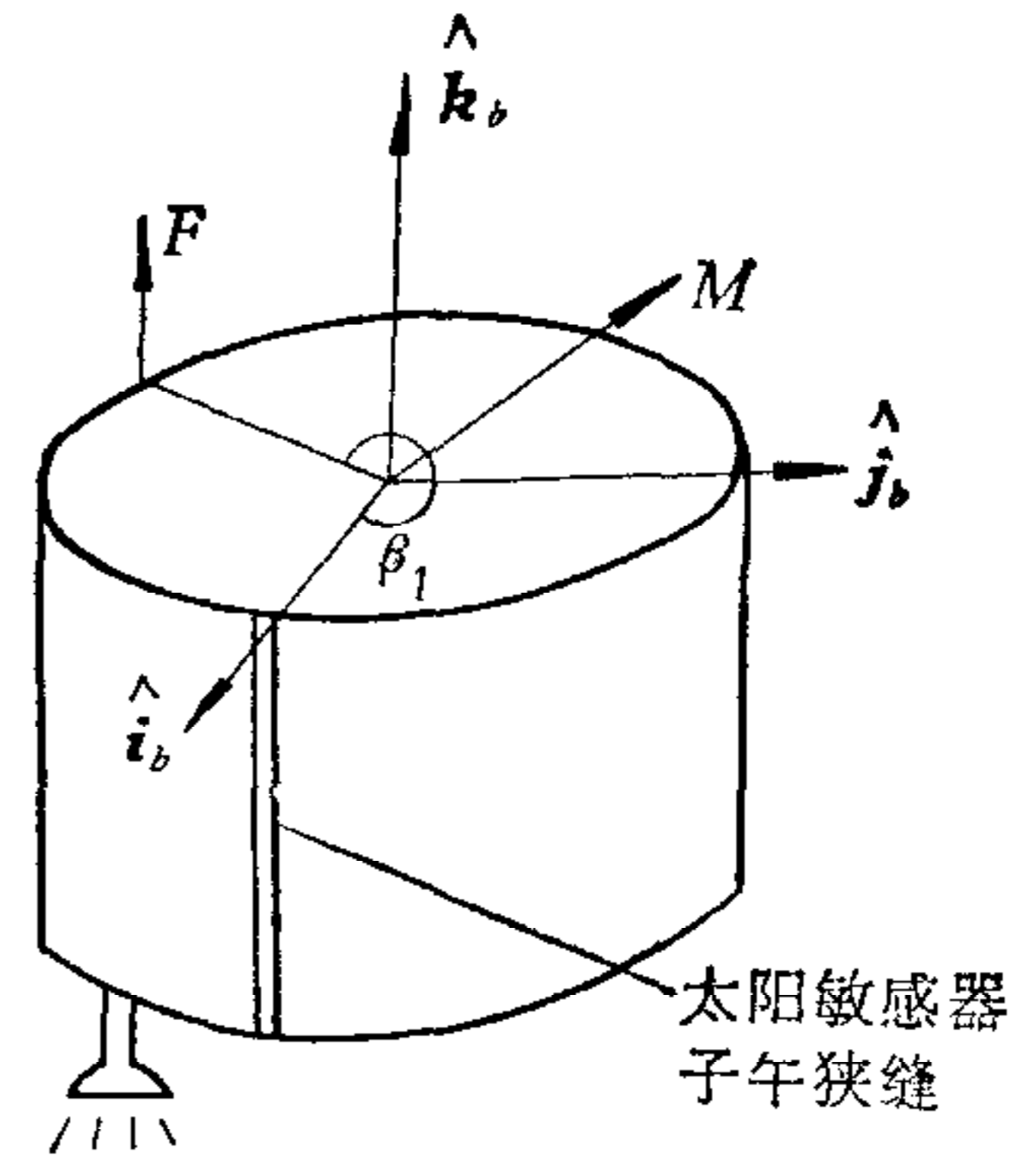


图 5 作用于卫星的力矩及喷管安装位置

如图 5 所示, 喷管和太阳敏感器子午面狭缝相位角是  $\beta_j$ , 因此在  $R^b$  中力矩是:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos\left(\beta_j - \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\beta_j - \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} |\mathbf{M}| = \begin{pmatrix} \sin \beta_j \\ -\cos \beta_j \\ 0 \end{pmatrix} |\mathbf{M}|. \quad (33)$$

在  $R^h$  中分量形式为:

$$\mathbf{M}^h = A_{bh}^{-1} \mathbf{M} = R_x(-\phi_1) R_y(-\phi_2) R_z(-\phi_3) \begin{pmatrix} \sin \beta_j \\ -\cos \beta_j \\ 0 \end{pmatrix} |\mathbf{M}|, \quad (34)$$

因为控制力矩很小, 所以引起姿态变化可认为是一阶小量即

$$\phi_1 \doteq 0, \quad \phi_2 \doteq 0 \quad (35)$$

同时假定太阳敏感器子午面狭缝见太阳时刻为  $t_s$ , 控制力矩脉冲作用时刻是在  $t_s$  后延迟  $\tau_s$ , 若力矩看成理想脉冲, 则式 (34) 可化为:

$$\mathbf{M}^h = \begin{pmatrix} \sin(\phi_3 + \beta_j) \\ -\cos(\phi_3 + \beta_j) \\ 0 \end{pmatrix} |\mathbf{M}| \delta(t - t_s - \tau_s). \quad (36)$$

下面讨论太阳狭缝脉冲出现时刻. 在  $R^h$  中太阳方向矢量  $\hat{s}$  和自旋轴方向矢量  $\hat{p}$  为:

$$\hat{s} = A_{hs} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \eta \\ 0 \\ \cos \eta \end{pmatrix}, \quad (37)$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}^h = R_z(-\phi_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$$\hat{\boldsymbol{j}}_b^h = R_z(-\phi_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi_3 \\ \cos \phi_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

$$\hat{\boldsymbol{i}}_b^h = R_z(-\phi_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi_3 \\ \sin \phi_3 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

显然,太阳脉冲应该满足下列条件:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{s}}^h \cdot \hat{\boldsymbol{j}}_b^h = 0 \\ \hat{\boldsymbol{s}}^h \cdot \hat{\boldsymbol{i}}_b^h \geq 0 \end{cases} \quad (41)$$

展开即为:

$$\begin{cases} \sin \phi_3 \sin \eta = 0 \\ -\sin \eta \cos \phi_3 \geq 0 \end{cases} \quad (42)$$

将式(36)代入式(28)和式(31),忽略高阶小量得:

$$\dot{\phi}_3 = \frac{h}{I_z} = \Omega. \quad (43)$$

若

$$t = 0 \quad \text{时} \quad \phi_3 = 0 \quad (44)$$

则

$$\phi_3 = \Omega t. \quad (45)$$

将式(45)代入式(42)得:

$$\phi_3 = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots, (2n-1)\pi, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

显然,上述角度是出现太阳脉冲时的  $\phi_3$  值,它对应的时刻为:

$$t_{s_1} = \frac{\pi}{\Omega}, \quad t_{s_2} = \frac{3\pi}{\Omega}, \quad t_{s_3} = \frac{5\pi}{\Omega}, \quad \dots, \quad t_{s_n} = \frac{(2n-1)\pi}{\Omega}. \quad (46)$$

下面讨论等倾角控制力矩作用规律.

根据图5所示喷管和太阳敏感器子午面狭缝之间几何关系知道,若太阳脉冲出现时刻就喷气,则控制相位角为:

$$\beta = \beta_j - \frac{\pi}{2},$$

假定喷气时刻比太阳脉冲延迟  $\tau_s$ , 那么控制相位角  $\beta$  为:

$$\beta = \beta_j - \frac{\pi}{2} + \Omega \tau_s \quad (47)$$

即

$$\Omega \tau_s = \beta - \beta_j + \frac{\pi}{2}.$$

考虑到(45), (46), (47)式,显然有

当  
则

$$\phi_3 = (t - t_{s_1})\Omega + \pi.$$

$$t = t_{s_1} + \tau_s$$

$$\phi_3 = \tau_s\Omega + \pi = \beta - \beta_j + \frac{\pi}{2} + \pi.$$

同理,当

$$t = t_{s_2} + \tau_s$$

$$\phi_3 = 2\pi + \beta - \beta_j + \frac{\pi}{2} + \pi$$

...

$$t = t_{s_n} + \tau_s$$

$$\phi_3 = (n - 1)2\pi + \beta - \beta_j + \frac{\pi}{2} + \pi. \quad (48)$$

应用(48)式,则(36)式变成

$$\mathbf{M}_k^h = \sum_{\tau=1}^k \begin{pmatrix} \cos(\beta - \pi) \\ \sin(\beta - \pi) \\ 0 \end{pmatrix} |\mathbf{M}| \delta(t - t_{s_k} - \tau_s) = \begin{pmatrix} M_x^h \\ M_y^h \\ M_z^h \end{pmatrix}. \quad (49)$$

因为在控制中,控制力矩是不大的,同时作用时间也很短,所以可以认为每个脉冲的冲量矩是一阶小量,即可假定每个脉冲力矩冲量使卫星角动量进动弧长为  $\Delta S$  即

$$\int_0^t \frac{|\mathbf{M}|}{h} \delta(\tau - t_s - \tau_s) d\tau = \Delta S. \quad (50)$$

又忽略高阶小量,(26—31)式可化为下列线性方程:

$$\dot{\xi} = \frac{M_y^h}{h \sin \eta}, \quad (51)$$

$$\dot{\eta} = \frac{M_x^h}{h}, \quad (52)$$

$$\dot{h} = M_z^h, \quad (53)$$

$$\dot{\phi}_1 = -\frac{h}{I_z} \mu \phi_2 + \frac{M_y^h}{h}, \quad (54)$$

$$\dot{\phi}_2 = \frac{h}{I_z} \mu \phi_1 - \frac{M_x^h}{h}, \quad (55)$$

$$\dot{\phi}_3 = \frac{h}{I_z}, \quad \left( \mu = \frac{I_z}{I_{\parallel}} \right). \quad (56)$$

假定  $t = 0$  时,初条件是:

$$\begin{cases} \xi = \xi_0 \\ \eta = \eta_0 \\ h = I_z \Omega = h_0, \end{cases} \quad (57)$$

$$\begin{cases} \phi_1 = 0 \\ \phi_2 = 0 \\ \phi_3 = 0. \end{cases} \quad (58)$$



则第一个脉冲力矩作用前后姿态运动情况：当  $0 \leq t < t_{s_1} + \tau_s$ ，  
由 (51—53) 解得：

$$\eta = \eta_0, \quad \xi = \xi_0, \quad h = h_0 = \Omega I_x. \quad (59)$$

当  $t_{s_1} + \tau_s \leq t < t_{s_2} + \tau_s$ ，  
若考虑到 (49) 式力矩表达式，则由 (51), (52) 得

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_0 + \Delta S \cos(\beta - \pi) \\ \frac{d\eta}{d\xi} &= \frac{M_x^h}{M_y^h} \sin \eta = \operatorname{ctg} \beta \cdot \sin \eta \end{aligned} \quad (60)$$

积分得：

$$\xi_1 = \xi_0 + \operatorname{tg} \beta \ln \left\{ \frac{\operatorname{tg} \frac{\eta_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\eta_0}{2}} \right\} \quad (61)$$

不难把上述结果推广到第  $k$  个脉冲力矩作用后的  $\xi$  和  $\eta$ 。若第  $k$  个脉冲作用前，

$$\eta = \eta_{k-1}, \quad \xi = \xi_{k-1} \quad (62)$$

则第  $k$  个脉冲作用后

$$\begin{cases} \eta_k = \eta_{k-1} + \Delta S \cos(\beta - \pi) \\ \xi_k = \xi_{k-1} + \operatorname{tg} \beta \ln \left\{ \frac{\operatorname{tg} \frac{\eta_k}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\eta_{k-1}}{2}} \right\}, \end{cases} \quad (t_{s_k} + \tau_s \leq t < t_{s_{k+1}} + \tau_s) \quad (63)$$

下面从式 (54), (55) 求得  $\phi_1, \phi_2$ 。令

$$\mathbf{z} = \phi_1 + \phi_2 i, \quad (64)$$

则将 (54), (55) 变成复数形式：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \frac{h}{I_x} \mu \mathbf{z} i + \frac{|M|}{h} \delta(t - t_{s_k} - \tau_s) e^{i(\beta - \frac{3}{2}\pi)} \\ \mathbf{z}(t_{s_{k-1}} + \tau_s) = \mathbf{z}_{(k-1)}, \quad (t_{s_{k-1}} + \tau_s \leq t < t_{s_k} + \tau_s) \end{cases} \quad (65)$$

(65) 式解不难写出，为

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}_{(k-1)} e^{\Omega \mu i(t - t_{s_{k-1}} - \tau_s)}, \quad (t_{s_{k-1}} + \tau_s \leq t < t_{s_k} + \tau_s) \quad (66)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}_{(k)} = \mathbf{z}_{(k-1)} e^{\Omega \mu i T} + \Delta S e^{i(\beta - \frac{3}{2}\pi)} \quad (t = t_{s_k} + \tau_s) \quad (67)$$

根据已知条件  $\mathbf{z}(0) = 0$

$$\mathbf{z}(1) = \Delta S e^{i(\beta - \frac{3}{2}\pi)},$$

$$\mathbf{z}(2) = \mathbf{z}(1) e^{\Omega \mu T i} + \Delta S e^{i(\beta - \frac{3}{2}\pi)},$$

$$\mathbf{z}(3) = \mathbf{z}(2) e^{\Omega \mu T i} + \Delta S e^{i(\beta - \frac{3}{2}\pi)},$$

...

$$\mathbf{z}(n) = \mathbf{z}(n-1) e^{\Omega \mu T i} + \Delta S e^{i(\beta - \frac{3}{2}\pi)}.$$

因此

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(n+1) &= \Delta S e^{i(\beta - \frac{3}{2}\pi)} \{ e^{\Omega \mu T i n} + e^{\Omega \mu T i(n-1)} + \dots + 1 \} \\ &= \Delta S e^{i(\beta - \frac{3}{2}\pi)} \left\{ \frac{1 - e^{\Omega \mu T i(n+1)}}{1 - e^{\Omega \mu T i}} \right\}, \end{aligned} \quad (68)$$

其中  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ .

另外,我们还可以将式(63)写成非递推形式

$$\begin{cases} \eta_n = \eta_0 + n\Delta S \cos(\beta - \pi) \\ \xi_n = \xi_0 + \operatorname{tg} \beta \left\{ \ln \left( \frac{\operatorname{tg} \frac{\eta_n}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\eta_0}{2}} \right) \right\} \end{cases} \quad (69)$$

(69), (70) 两式成立的条件是  $\eta_n \neq \eta_0$ . 当  $\eta_n = \eta_0$  时, 根据式(51—56)和式(49), 由于此时

$$\beta = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \frac{3}{2}\pi \quad (71)$$

因此

$$\xi_k = \xi_{k-1} + \frac{\sin(\beta - \pi) \cdot \Delta S}{\sin \eta_0}, \quad (t_{sk} + \tau_s \leq t < t_{sk+1} + \tau_s). \quad (72)$$

(72) 式的非递推形式

$$\xi_n = \xi_0 + n \cdot \Delta S \frac{\sin(\beta - \pi)}{\sin \eta_0}, \quad (t_{sk} + \tau_s \leq t < t_{sk+1} + \tau_s). \quad (73)$$

由式(67), (68) 第  $n$  个脉冲力矩作用后的时刻

$$\mathbf{z}(n) = \Delta S e^{i(\beta - \frac{3}{2}\pi)} \left\{ \frac{1 - e^{\Omega \mu T n}}{1 - e^{\Omega \mu T}} \right\}, \quad (t = t_{sn} + \tau_s) \quad (74)$$

第  $n+1$  个脉冲力矩以前, 第  $n$  个脉冲力矩之后

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(n) e^{\Omega \mu i(t - t_{sn} - \tau_s)}, \quad (t_{sn} + \tau_s \leq t < t_{sn+1} + \tau_s) \quad (75)$$

因为

$$\frac{1 - e^{2\pi \mu n i}}{1 - e^{2\pi \mu i}} = \frac{1 - e^{2\pi n(\mu-1)i}}{1 - e^{2\pi(\mu-1)i}} = \frac{\sin(\mu-1)n\pi}{\sin(\mu-1)\pi} \cdot e^{(\alpha_n - \alpha_1)i} \quad (76)$$

$$\alpha_n = (\mu-1)n\pi - \frac{\pi}{2} \quad (77)$$

$$\alpha_1 = \pi(\mu-1) - \frac{\pi}{2} \quad (78)$$

将式(80—82)代入(78)式得

$$\mathbf{z}(n) = \Delta S \frac{\sin(\mu-1)n\pi}{\sin(\mu-1)\pi} e^{i(\beta - \frac{3}{2}\pi + (n-1)(\mu-1)\pi)} \quad (79)$$

#### 4. 姿态轨迹的几何作图法和物理意义

将式(69), (70), (71), (72), (79) 结果和“报告”或[1]中有关内容相比较, 不难看出本文得到的结果是“报告”或[1]中内容的直接推广. “报告”和[1]中讨论的问题是本文目标姿态的控制相位角  $\beta$  等于  $0$ ,  $\pi$  和  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{3}{2}\pi$  的特殊情况. 只要我们令  $\beta$  等于上述角度, 所对应的(75), (76) 式给出角动量坐标就是“报告”或[1]中有关卫星角动量描述的坐标. 同时(83)式给出章动圆半径

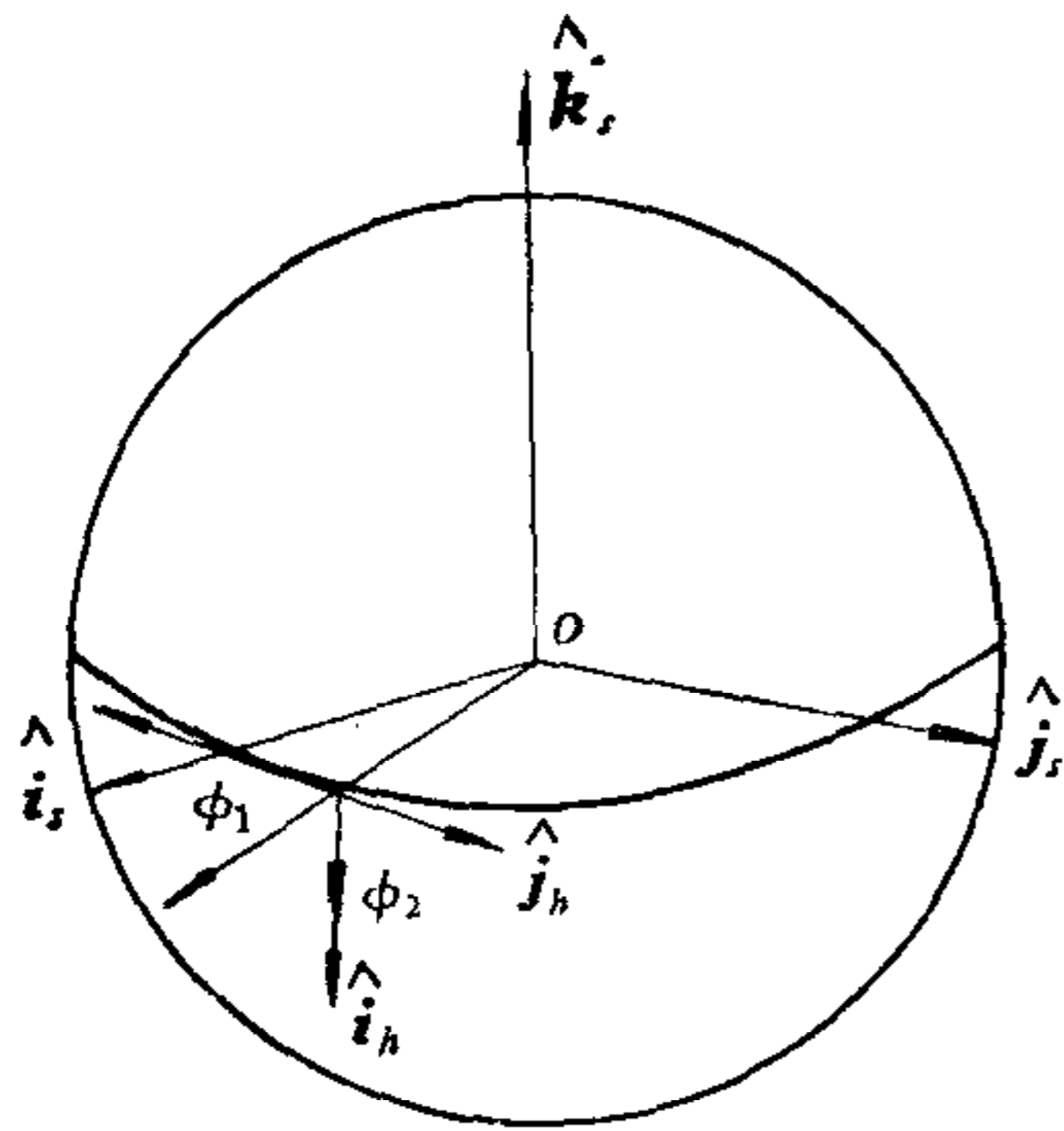


图6  $\phi_1$ - $\phi_2$  坐标矢量和  $\hat{i}_h \hat{j}_h \hat{k}_h$  坐标系关系.

$$|z_{(n)}| = \frac{\sin(\mu - 1)n\pi}{\sin(\mu - 1)\pi} \Delta S. \quad (80)$$

和“报告”或 [1] 给出章动圆半径完全一样.

为了形象地描述姿态运动,我们也可用几何作图方法,在  $\phi_1$ - $\phi_2$  平面上,画出自旋轴矢端的轨迹.

例1.  $\beta = \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4}$ ,  $\mu = 1.25$ ,  $\xi_0 = 0$ ,  $\eta_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  
 $\Delta S = 0.1$ ,

利用 (69), (70), (71), (72) 角动量坐标:

$t = t_1$ , $\eta_1 = 1.5$	$t = t_5$ , $\eta_5 = 1.2172$
$\xi_1 = 0.07076$ ,	$\xi_5 = 0.3611$ ,
$t = t_2$ , $\eta_2 = 1.4293$	$t = t_6$ , $\eta_6 = 1.4650$
$\xi_2 = 0.1418$ ,	$\xi_6 = 0.4375$ .
$t = t_3$ , $\eta_3 = 1.3586$	$t = t_7$ , $\eta_7 = 1.0758$
$\xi_3 = 0.21374$ ,	$\xi_7 = 0.5165$ .
$t = t_4$ , $\eta_4 = 1.2879$	$t = t_8$ , $\eta_8 = 1.005$
$\xi_4 = 0.2869$ .	$\xi_8 = 0.5985$ .

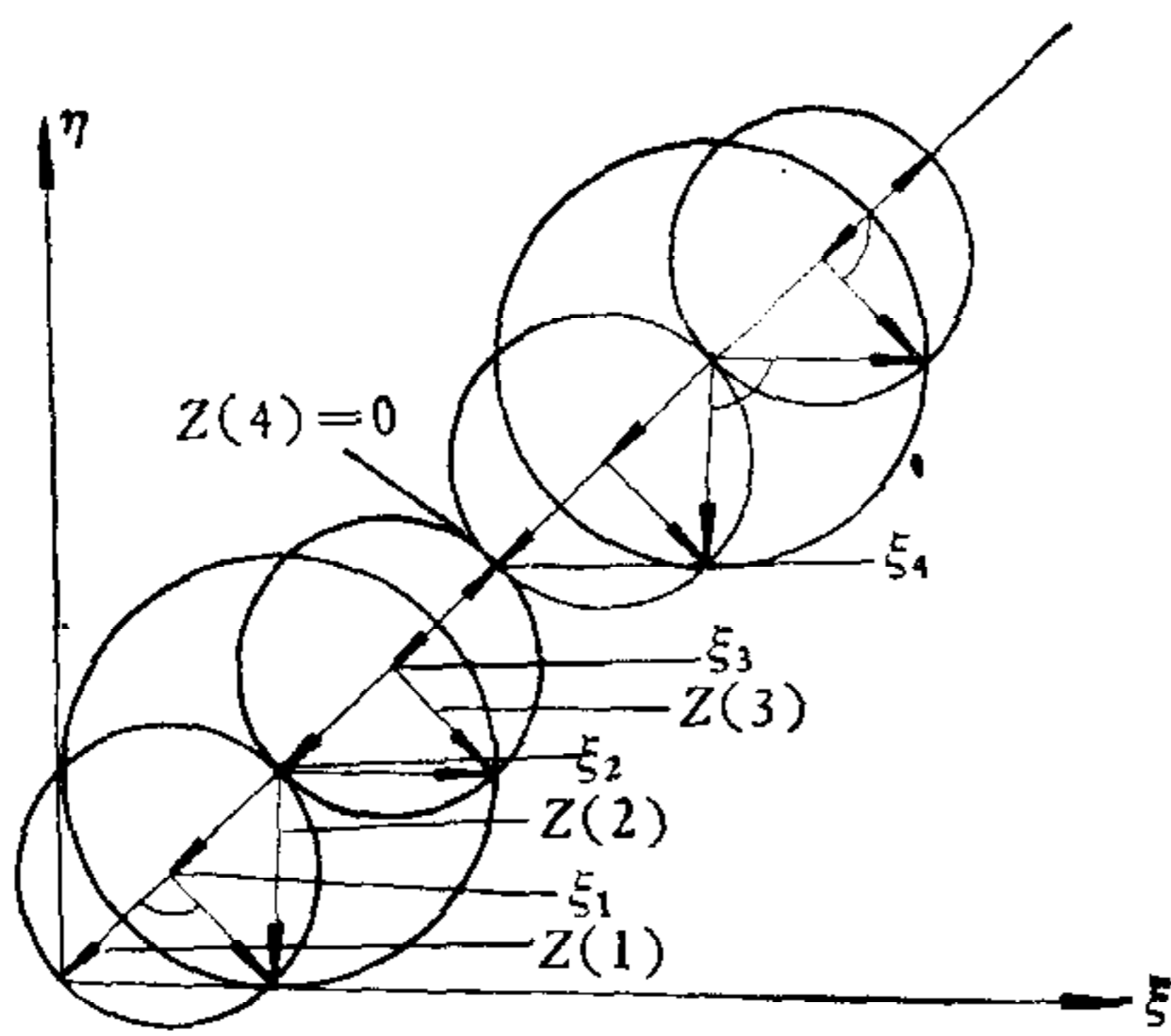


图7  $\mu = 1.25$ ,  $\beta = \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4}$  姿态运动在  $\phi_1$ - $\phi_2$  上相图

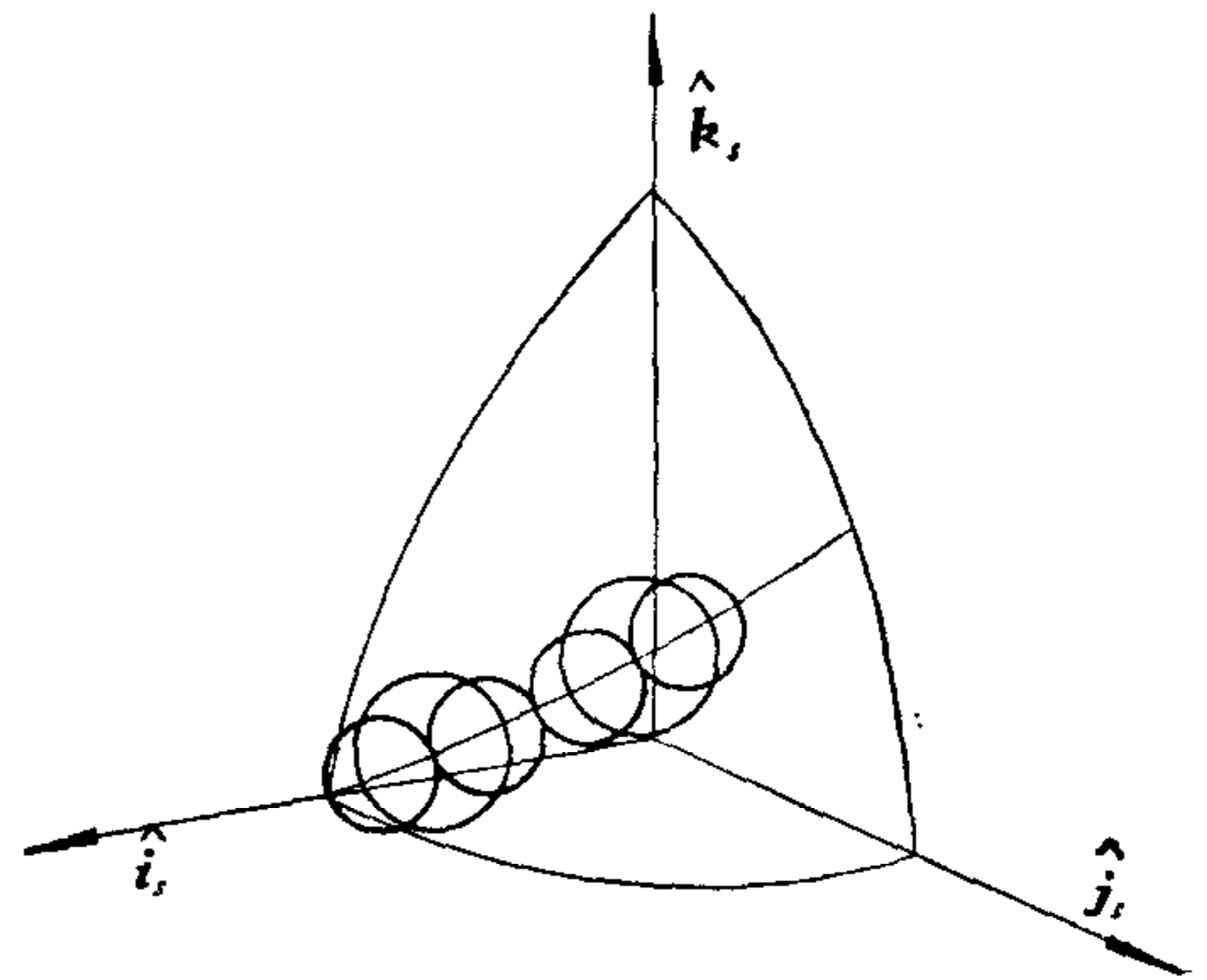


图8  $\mu = 1.25$   $\beta = \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4}$  时  
单位姿态球面上自旋轴矢端轨迹.

相角规律:

$$\begin{aligned} z_{(1)} &= \Delta S e^{i\frac{\pi}{4}}, & z_{(5)} &= \Delta S e^{i\frac{\pi}{4}} + z_{(4)} e^{i\frac{\pi}{2}}, \\ z_{(2)} &= \Delta S e^{i\frac{\pi}{4}} + z_{(1)} e^{i\frac{\pi}{2}}, & z_{(6)} &= \Delta S e^{i\frac{\pi}{4}} + z_{(5)} e^{i\frac{\pi}{2}}, \\ z_{(3)} &= \Delta S e^{i\frac{\pi}{4}} + z_{(2)} e^{i\frac{\pi}{2}}, & z_{(7)} &= \Delta S e^{i\frac{\pi}{4}} + z_{(6)} e^{i\frac{\pi}{2}}, \\ z_{(4)} &= \Delta S e^{i\frac{\pi}{4}} + z_{(3)} e^{i\frac{\pi}{2}}, & z_{(8)} &= \Delta S e^{i\frac{\pi}{4}} + z_{(7)} e^{i\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

将例1数据在  $\phi_1$ - $\phi_2$  上作相图如图7所示.

为了形象地描述姿态运动,我们可以将例1数据在单位姿态球面上,作出自旋轴矢端轨迹图.如图8所示.

### 三、非线性计算结果的比较

为了检验线性近似解析解是否适用,我们在数字机上对非线性欧拉动力学方程求出其数字解,并将这些结果和线性解析式给出的结果进行比较.兹抄录一组结果列于表 1.其它详细情况可参阅“报告”.

表 1

符 号	单 位 类 别		值 $\Omega_r$ (度)		
			30	90	120
$R_{\max}^*$	弧度	线性	$0.306 \times 10^{-2}$	$0.913 \times 10^{-2}$	$1.21 \times 10^{-2}$
		非线性	$0.306 \times 10^{-2}$	$0.913 \times 10^{-2}$	$1.21 \times 10^{-2}$
$\theta^*$	度	线性	0	0	0
		非线性	-1.1	-1.77	-2.58
$k$	次	线性	733	268	219
		非线性	733	268	218
$t_c$	秒	线性	244.3	89.3	73.0
		非线性	244.3	89.3	72.6
$\theta$	公斤	线性	0.873	0.957	1.043
		非线性	0.873	0.957	1.043

$R_{\max}^*$  (弧度): 控制过程最大章动圆半径;

$\theta^*$  (度): 卫星在控制力矩作用下,  $\psi^*$  进动  $90^\circ$  时  $\theta^*$  的角度;

$k$  (次): 使卫星  $\psi^* = 90^\circ$  所需脉冲次数;

$t_c$  (秒): 使卫星  $\psi^* = 90^\circ$  所经历的时间;

$Q$  (公斤): 使卫星  $\psi^* = 90^\circ$  时所需要的喷气量.

比较计算结果表明: 线性解析解是个很好的近似解,完全适合于工程设计.

从表 1 明显地看出,对不同的喷气扫过的扇形角 ( $\Omega_r = 30^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ ),当  $\psi^*$  从  $0^\circ \rightarrow 90^\circ$  时对应于不同喷气角,  $R_{\max}^*, k, t_c, \theta$  值基本一样,不同的只是  $\theta^*$ , 线性近似解  $\theta^* = 0$ ,而非线性对各种不同的喷气角  $\theta^*$  值也略有不同.一般说来,  $\Omega_r$  越大,  $\theta^*$  也越大.即使如此,  $\theta^*$  变化也是不大的,对于从事姿控设计,这样的精度完全够用.

另外,本文还对不同  $\mu$  值,不同外力矩,不同转速,在线性和非线性不同模式下,研究它们对参数  $R_{\max}^*, \theta^*, k, t_c$  和  $\theta$  的影响,比较它们的差异.所有这些结果都说明线性近似解析解在设计中可采用,由于线性化引起的误差在所讨论问题的精度范围内是允许的.具体可参阅“报告”.

### 四、结 论

(1) 本文导出了自旋卫星在“等倾角线”控制规律下的任意目标机动的姿态运动近似解析解.

(2) 若喷气扫描扇形角不大于  $30^\circ$  时, 则当目标姿态达到时, 线性模型给出解产生的控制误差仅是目标姿态进动幅值的 1—2%。这样的模型误差在姿态控制设计中是可允许的。

(3) 姿态解析解由式 (69), (70), (71), (72), (79) 和 (80) 中令  $\beta = \frac{3}{2}\pi$  时即可得“报告”或 [1] 中的结论。

(4) 控制过程角动量变化规律主要依赖于卫星的纵横惯量比  $\mu$ , (79) 式具体描述这种变化规律。根据这个规律, 一方面可适当地选择合适的  $\mu$  使得周期性呈现的章动半径为零, 另一方面在惯量比选定后, 也可以在姿态控制中, 合适选择控制次数, 使得控制结束时章动半径最小。

(5) 姿态运动解析解可直接应用于自旋卫星姿态控制方案设计。根据这个解可以简便地确定控制次数。同时, 这个解对于双脉冲控制或章动控制也都是必要的。

(6) 姿态运动解析解还可用于卫星姿态测定, 特别是章动测定。

(7) 可应用姿态解析解来实现具有姿态反馈作用的闭路姿态控制系统。也就是说, 可以利用卫星传下的姿态信息进行控制过程的姿态确定, 然后将估计的姿态反馈到姿态逻辑设计, 及时修改姿控逻辑。

本文初稿承蒙中国科学院系统科学研究所关肇直先生和毕大川同志审阅, 并提出宝贵意见, 特此致谢。

### 参 考 文 献

- [1] Schmieder, Optimale Ausrichtung Von Rotationssymmetrischen Drallstabilisierten Körpern in Abhängigkeit Vom Trägheitsmomentenverhältnis, Raumfahrtforschung Band XIV Heft 3 1970, Mai-Juni.
- [2] 村上力, 中岛厚: 对称スピン衛星のガスジェットによるニューテーション能動制御 NAL TR-344, 1973.

## DYNAMICS OF A SPIN-STABILIZED SATELLITE ATTITUDE CONTROL BY JET

XING GUANGQIAN

(Beijing Institute of Control Engineering)

### ABSTRACT

The dynamical problem of a spin satellite attitude maneuver to any aim attitude is discussed in this paper. A set of analytical formulae of attitude of the spin satellite which is applied by a series of control pulses torque have been derived. These formulae described the variational rules of angular momentum, of nutation angle, and of attitude phase angle with control torque and control times. They may be directly applied to the design of the satellite attitude control system and attitude determination.

It is necessary to point out that both cases in which the spin axis is to orient normal to orbit or coincide with the Sun direction are all the special examples of what we obtained.