第7卷 第1期 自动化学报 Vol. 7, No. 1
1981年1月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1981

极点配置问题算法的改进

王 翼
(南开大学)

摘 要

本文在证明了定理2的基础上，改进了多输入系统的极点配置问题的算法，使计算量大为减少．由于观测器的设计也化为一个极点配置问题，本文提出的算法也简化了观测器的设计．

极点配置问题是现代控制理论中的一个重要问题．由于一个系统的极点决定着系统的重要特性，因此，对于定常线性系统：

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \tag{1}$$

人们常通过状态反馈

$$\boldsymbol{u} = K\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \tag{2}$$

使闭环系统

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = (A + BK)\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{v} \tag{3}$$

有事先给定的极点，也就是使矩阵 $A + BK$ 有要求的特征值．

如果 A, B 分别为 $n \times n$ 和 $n \times m$ 维矩阵，已给包含 n 个复数的集合 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ (Λ 中的复数成共轭对出现)．我们知道，当 (A, B) 能控时，对任意给定的复数集合 Λ，存在 K 使闭环系统 (3) 的极点集合为 Λ[1,2]．

在 [3, 4] 中给出了配置极点的算法，本文在证明了定理2的基础上改进了它们的算法，使运算量减少，便于应用．因为观测器问题对偶于一个极点配置问题，该算法自然也简化了观测器的设计。

一、单输入系统

我们先考虑单输入系统

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{b}$ 是 n 维列向量．假设 $(A, \boldsymbol{b})$ 完全能控，那么 $U = (\boldsymbol{b}, A\boldsymbol{b}, \cdots A^{n-1}\boldsymbol{b})$ 的秩为 n．应用如下定理可将 (4) 化为能控标准型[4]．

定理 1. 如果 $(A, \boldsymbol{b})$ 完全能控，那么经变换

本文于1980年4月29日收到．

$$\boldsymbol{x}' = T\boldsymbol{x} \tag{5}$$

可将 (4) 化为能控标准型

$$\frac{d\boldsymbol{x}'}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\ \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & & & & \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix} \boldsymbol{x}' + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{u} \tag{6}$$

变换 T 为

$$T = \begin{pmatrix} a \\ aA \\ \vdots \\ aA^{n-1} \end{pmatrix} \tag{7}$$

其中

$$a = (0, \cdots 0, 1) U^{-1} = \frac{1}{\det U} (U_{1n}, U_{2n}, \cdots, U_{nn}), \tag{8}$$

U_{in} 是 U 的第 i 行第 n 列的代数余子式.

我们知道，对标准型 (6) 可以求 $K' = (K'_1, K'_2, \cdots, K'_n)$ 使 (6) 中 $\boldsymbol{u} = K'\boldsymbol{x}$ 时闭环系统的极点集为 Λ。如果记

$$\prod_{i=1}^{n} (s - \lambda_i) = s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0, \tag{9}$$

则有

$$K' = (a_0 - \alpha_0,\ a_1 - \alpha_1,\ \cdots,\ a_{n-1} - \alpha_{n-1}) \tag{10}$$

返回原坐标系有

$$T \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = (A' + \boldsymbol{b}'K') T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}'\boldsymbol{v} \tag{11}$$

其中

$$A' = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\ \cdots & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & & & & \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots\cdots\cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}' = T\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

由 (11) 式有

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = (A + \boldsymbol{b}K'T)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{v},$$

因而

$$\tilde{K} = K'T \tag{12}$$

当用反馈 $\boldsymbol{u} = \tilde{K}\boldsymbol{x}$ 时，$A + \boldsymbol{b}\tilde{K}$ 的特征值集为 Λ。

二、多输入系统

现考虑一般多输入系统 (1)，引文 [3, 4] 中的作法是先求反馈矩阵 $\hat{K}$，使反馈

$$\boldsymbol{u} = \hat{K}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \tag{13}$$

闭环系统

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = (A + B\hat{K})\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{v}$$

对单输入 $\boldsymbol{v}_1$ ($\boldsymbol{v}$ 的第一个分量)是完全能控的，即

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = (A + B\hat{K})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{v}_1 \tag{14}$$

完全能控. (用 b_i 表示 B 的第 i 列.)

假设 (A, B) 完全能控，那么 $(B, AB, \cdots, A^{n-1}B)$ 秩为 n，化为单输入能控的作法是：先将能控性矩阵的列重新排列为 $(\boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{b}_1, \cdots, A^{n-1}\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, A\boldsymbol{b}_2, \cdots, A^{n-1}\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m, A\boldsymbol{b}_m, \cdots, A^{n-1}\boldsymbol{b}_m)$，然后求出上述矩阵的列的最大线性无关组.

$$Q = (\boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{b}_1, \cdots, A^{\mu_1-1}\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, A\boldsymbol{b}_2, \cdots, A^{\mu_2-1}\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m, A\boldsymbol{b}_m, \cdots, A^{\mu_m-1}b_m) \tag{15}$$

如果 Q 中某个 $\boldsymbol{b}_i$ 不出现则认为 $\mu_i = \boldsymbol{0}$. 由于 (A, B) 是完全能控的，所以 $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m = n$. 再令

$$S = (0, \cdots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第 } \mu_1 \text{ 列}}}{\boldsymbol{e}_2}, 0, \cdots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第 } \mu_1 + \mu_2 \text{ 列}}}{\boldsymbol{e}_3}, \cdots, 0, \cdots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第 } \mu_1 + \cdots + \mu_{m-1} \text{ 列}}}{\boldsymbol{e}_m}, 0, \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第 } n \text{ 列}}}{0}) \tag{16}$$

其中 e_i 是 m 阶单位矩阵的第 i 列 $(i = 2, 3, \cdots, m)$. 如取

$$\hat{K} = SQ^{-1} \tag{17}$$

则单输入系统 (14) 是完全能控的[3,4]. 这样就可以用上节的方法配置极点. 即可按(12)式求 $\tilde{K}$ 使 $(A + B\hat{K}) + \boldsymbol{b}_1\tilde{K}$ 有要求的特征值集 Λ. 由直接计算知:

$$K = \hat{K} + \begin{pmatrix} \tilde{K} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

使 $A + BK$ 也有要求的特征值集 Λ.

为了使算法简化先证明如下定理.

定理 2. 设 (A, B) 完全能控，在 (14) 中记 $\bar{A} = A + B\hat{K}$，记 $\bar{U} = (\boldsymbol{b}_1, \bar{A}\boldsymbol{b}_1, \cdots, \bar{A}^{n-1}\boldsymbol{b}_1)$ 则有

1) $\det \bar{U} = \det Q$;

2) $\bar{U}_{in} = Q_{in}$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

其中 $\bar{U}_{in}$, $Q_{in} (i = 1, 2, \cdots, n)$ 分别是矩阵 $\bar{U}$ 和 Q 的第 i 行第 n 列的代数余子式.

证明　由式 (17) 有 $\hat{K}Q = S$，从而直接得出

$\hat{K}\boldsymbol{b}_1 = 0$,　$\hat{K}A\boldsymbol{b}_1 = 0$,　$\hat{K}A^{\mu_1-2}\boldsymbol{b}_1 = 0$,

$\hat{K}A^{\mu_1-1}\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_2$;

$\cdots\cdots$

$\hat{K}\boldsymbol{b}_{m-1} = 0$,　$\hat{K}A\boldsymbol{b}_{m-1} = 0, \cdots, \hat{K}A^{\mu_{m-1}-2}\boldsymbol{b}_{m-1} = 0$,

$\hat{K}A^{\mu_{m-1}-1}\boldsymbol{b}_{m-1} = \boldsymbol{e}_m$;

$$\hat{K}\boldsymbol{b}_m=0,\quad \hat{K}A\boldsymbol{b}_m=0,\cdots,\hat{K}A^{\mu_m-1}\boldsymbol{b}_m=0$$

应用上面的关系式经直接计算知

$$\begin{cases}\bar{A}\boldsymbol{b}_1=A\boldsymbol{b}_1\\ \bar{A}^2\boldsymbol{b}_1=A^2\boldsymbol{b}_1\\ \quad\vdots\\ \bar{A}^{\mu_1-1}\boldsymbol{b}_1=A^{\mu_1-1}\boldsymbol{b}_1\\ \bar{A}^{\mu_1}\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{b}_2+\tilde{\boldsymbol{b}}_2\\ \bar{A}^{\mu_1+1}\boldsymbol{b}_1=A\boldsymbol{b}_2+\widetilde{A\boldsymbol{b}_2}\\ \quad\vdots\\ \bar{A}^{\mu_1+\mu_2}\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{b}_3+\tilde{\boldsymbol{b}}_3\\ \quad\vdots\\ \bar{A}^{\mu_1+\cdots+\mu_{m-1}}\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{b}_m+\tilde{\boldsymbol{b}}_m\\ \bar{A}^{\mu_1+\cdots+\mu_{m-1}+1}\boldsymbol{b}_1=A\boldsymbol{b}_m+\widetilde{A\boldsymbol{b}_m}\\ \quad\vdots\\ \bar{A}^{n-1}\boldsymbol{b}_1=A^{\mu_m-1}\boldsymbol{b}_m+\widetilde{A^{\mu_m-1}\boldsymbol{b}_m}\end{cases}\tag{19}$$

($\tilde{\boldsymbol{b}}_2$ 表示 Q 中 $\boldsymbol{b}_2$ 左边的列向量的某个线性组合，下同)

因而

$$\begin{aligned}\bar{U}=(\boldsymbol{b}_1,\bar{A}\boldsymbol{b}_1,\cdots,\bar{A}^{n-1}\boldsymbol{b}_1)=(&\boldsymbol{b}_1,A\boldsymbol{b}_1,\cdots,A^{\mu_1-1}\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\\ &+\tilde{\boldsymbol{b}}_2,A\boldsymbol{b}_2+\widetilde{A\boldsymbol{b}_2},\cdots,A^{\mu_2-1}\boldsymbol{b}_2+\widetilde{A^{\mu_2-1}\boldsymbol{b}_2},\cdots,\boldsymbol{b}_m\\ &+\tilde{\boldsymbol{b}}_m,A\boldsymbol{b}_m+\widetilde{A\boldsymbol{b}_m},\cdots,A^{\mu_m-1}\boldsymbol{b}_m+\widetilde{A^{\mu_m-1}\boldsymbol{b}_m}).\end{aligned}\tag{20}$$

这说明 Q 可经有限次第三类列初等变换（Q 的某一列乘以常数加到其后的另一列）化为 $\bar{U}$，因此

$$\bar{U}=Q\begin{array}{c}\text{第 } j_1 \text{ 列}\\ \downarrow\\ \begin{pmatrix}1 & k_1\leftarrow\\ & \ddots\\ & & 1\end{pmatrix}\end{array}\text{—第 } i_1 \text{ 行}\cdots\begin{array}{c}\text{第 } j_l \text{ 列}\\ \downarrow\\ \begin{pmatrix}1 & k_l\leftarrow\\ & \ddots\\ & & 1\end{pmatrix}\end{array}\text{—第 } i_l \text{ 行}\tag{21}$$

由此立即得出

$$\det\bar{U}=\det Q$$

由于 $\bar{U}$ 满秩(这是式(20)的直接结果)有

$$\bar{U}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & k_l\\ & \ddots\\ & & 1\end{pmatrix}^{-1}\cdots\begin{pmatrix}1 & k_1\\ & \ddots\\ & & 1\end{pmatrix}^{-1}Q^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -k_l\\ & \ddots\\ & & 1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}1 & -k_1\\ & \ddots\\ & & 1\end{pmatrix}Q^{-1}\tag{22}$$

由于

$$Q^{-1}=\frac{1}{\det Q}\begin{pmatrix} & * & \\ Q_{1n} & Q_{2n}\cdots & Q_{nn}\end{pmatrix}$$

因而

$$\begin{pmatrix}1 & -k_1\\ & \ddots\\ & & 1\end{pmatrix}Q^{-1}=\frac{1}{\det Q}\begin{pmatrix} & *_1 & \\ Q_{1n} & Q_{2n}\cdots & Q_{nn}\end{pmatrix}$$

依次类推得到

$$\bar{U}^{-1}=\frac{1}{\det\bar{U}}\begin{pmatrix} *_2 \\ \bar{U}_{1n}\bar{U}_{2n}\cdots\bar{U}_{nn}\end{pmatrix}=\frac{1}{\det Q}\begin{pmatrix} *_3 \\ Q_{1n}Q_{2n}\cdots Q_{nn}\end{pmatrix}.$$

由于已证明 $\det\bar{U}=\det Q$，由上式得到

$$\bar{U}_{in}=Q_{in},\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

定理证完.

应用定理 2，(9) 式化为

$$\begin{aligned} a&=\frac{1}{\det\bar{U}}(\bar{U}_{1n}\bar{U}_{2n}\cdots\bar{U}_{nn})=\frac{1}{\det Q}(Q_{1n},Q_{2n},\cdots,Q_{nn}) \\ &=(q_{n1},q_{n2},\cdots,q_{nn}) \end{aligned} \tag{23}$$

$(q_{n1},q_{n2},\cdots,q_{nn})$ 是 Q^{-1} 的最后一行.

多输入系统极点配置的计算步骤:

第一步　按本文所述方法构造 Q 和 S，计算 Q^{-1}，并记 Q^{-1} 的第 n 行为

$$a=(q_{n1}q_{n2}\cdots q_{nn})$$

计算

$$\hat{K}=SQ^{-1}$$

第二步　计算特征多项式

$$|sI-\bar{A}|=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0$$

和

$$\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1s+\alpha_0$$

计算

$$K'=(a_0-\alpha_0,a_1-\alpha_1,\cdots,a_{n-1}-\alpha_{n-1})$$

第三步　计算

$$T=\begin{pmatrix} a \\ a\bar{A} \\ \vdots \\ a\bar{A}^{n-1}\end{pmatrix} \text{和}\ \tilde{K}=K'T$$

第四步

$$K=\hat{K}+\begin{pmatrix}\tilde{K}\\0\end{pmatrix}\ \text{即所求.}$$

由于证明了定理 2，使我们较 [3, 4] 中的算法少了一次矩阵求逆的运算和一些其他运算，因而使运算简化.

例　设系统的状态方程为

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&2&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}1&2\\1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{u}$$

已给 $\Lambda=\{-1,-1,-2,-2\}$

第一步

$$Q=(\boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, A\boldsymbol{b}_2)=\begin{pmatrix}1&2&2&2\\1&2&0&0\\0&1&0&2\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0&-2\\0&0&0&1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad a=\left(0,0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$S=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad \hat{K}=SQ^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

第二步

$$\bar{A}=A+B\hat{K}=\begin{pmatrix}1&1&0&2\\0&2&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$|sI-\bar{A}|=s^4-3s^3+2s^2,$$

$$(s+1)^2(s+2)^2=s^4+6s^3+13s^2+12s+4,$$

$$K'=(-4,-12,-11,-9)$$

第三步 构造

$$T=\begin{pmatrix}a\\a\bar{A}\\\vdots\\a\bar{A}^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&1\end{pmatrix},$$

$$\tilde{K}=K'T=(-16,7,-2,-18)$$

第四步 计算

$$K=\hat{K}+\begin{pmatrix}\tilde{K}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-16&7&-2&-18\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-16&7&-2&-18\\0&0&0&1\end{pmatrix}\text{即所求}$$

用引文[3,4]中的算法可得到同样的结果，但[3,4]中的算法多一次 n 阶矩阵求逆.

三、计算的进一步简化

我们注意到 S 的第 1 行全为 0，第 2 行除第 μ_1 个元素为 1 外其他全为 0，…，最后一行除第 $\mu_1 + \cdots + \mu_{m-1}$ 个元素为 1 外其他元素全为零，因此如果记

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \ (q_i \text{是行向量}), \text{则} \hat{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ q_{\mu_1} \\ q_{\mu_1+\mu_2} \\ \vdots \\ q_{\mu_1+\cdots+\mu_{m-1}} \end{pmatrix} \tag{24}$$

因而可只计算 Q^{-1} 的第 μ_1 行，…，第 $\mu_1 + \cdots + \mu_{m-1}$ 行和第 n 行(第 n 行第三步运算需要)，而不必计算和存储 Q^{-1} 的所有元素.

由(24)式

$$K = \begin{pmatrix} \tilde{K} \\ q_{\mu_1} \\ \vdots \\ q_{\mu_1+\cdots+\mu_{m-1}} \end{pmatrix}, \ \text{即所求.}$$

参　考　文　献

[1] 黄琳，郑应平，张迪，李雅普诺夫第二方法与最优控制器分析设计问题. 自动化学报，第 2 卷 (1964)，第 4 期 202 页.

[2] W. M. Wonham, On Pole Assignment in Multi-input Controllable Linear Systems, *IEEE. Trans. Auto. Control*, AC-12(1967), 660—665.

[3] C. T. Chen, Introduction to Linear Systems Theory, Holt, Rinehart and Winston. Inc. (1970), 260—280.

[4] T. E. Fortmann and K. L. Hitz, An Introduction to Linear Control Systems, (Control and Systems Theory V. 5) Marcel Dekker Inc., (1977).

A MODIFICATION OF ALGORITHM TO SOLVE THE PROBLEM OF POLE-ASSIGNMENT

WANG YI

(*Nankai University*)

ABSTRACT

In this paper, a modification of algorithm to solve the problem of pole-assignment in a linear time-invariant multivariable system is presented. This new algorithm is based upon the THEOREM 2. The amount of computations has been reduced by using this algorithm. As the design of observer can be reduced to a problem of pole-assignment, the algorithm presented here also simplifies the procedure of observer design of course.