第 7 卷 第 1 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 7, No. 1
1981 年 1 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Jan., 1981

线性控制系统的"能抗干性"

韩 京 清
(中国科学院系统科学研究所)

摘　　要

本文把系统排除"外部干扰"的能力概括为系统的"能抗干性"，给出了"能抗干性"的严格定义，证明了系统为"能抗干"的充分必要条件及系统达到"输出调节"的充分必要条件，提出了检验"能抗干性"的具体算法. 最后，讨论了多项式阵系统的"能抗干性"条件及实现"能抗干性"的补偿器结构.

一、引　　言

在实际控制系统中，除控制者能随意改变的输入外，通常还有控制者不能改变的其它输入，如调节系统中的外部干扰、伺服系统中的参考输入等. 这些输入都从系统的外部作用于系统，因此统称"外部输入". 设计控制系统一般要求系统的某些输出，如被调量，跟踪误差等，尽可能不受外部输入的影响. 从这种意义上，"外部输入"都可以看做对系统的"干扰"，而系统排除"外部输入"影响的能力叫做系统的"能抗干性".

通常可以假定"外部输入"是由一定"模型"产生. 一大类常见的外部输入可假定它们满足一组线性微分方程

$$\dot{\boldsymbol{f}} = A_0 \boldsymbol{f} \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{R}^q$ 是外部输入，A_0 是 $q \times q$ 常阵. 阶跃函数、谐波函数、多项式、指数函数及它们的线性组合都是满足这类方程的.

今有受外部干扰作用的系统

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{y} = c\boldsymbol{x} + E\boldsymbol{f} \end{cases} \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^p$. 本文要讨论，在什么情况下 $\boldsymbol{y}(t)$ 尽可能不受 $\boldsymbol{f}(t)$ 的影响? 这个问题在 [2] 中叫做"干扰解耦问题" (DDP)，是用线性空间的"几何方法"讨论的. 本文先提出"能抗干性"的概念，并用简单的"代数方法"给出 "能抗干性" 的充分必要条件. 进一步证明，当 A_0 的特征根均 $\geqslant 0$ 时，系统达到"输出调节"[2]的充分必要条件是系统的能观部分稳定且系统对 $\boldsymbol{f}$ 能抗干. 然后，用 [4] 中提出的算法给出判断能抗干性的办法. 最后，用多项式矩阵的性质讨论多项式阵系统的"能抗干性"条件及实现"能抗干性"的动态补偿器结构特点.

本文于 1980 年 2 月 29 日收到. 修改稿于 1980 年 7 月 16 日收到.

二、状态空间中的“能抗干性”

1. 能抗干性定义

定义 1. 设 $\mathscr{F}$ 是一类外输入 $\boldsymbol{f}(t)$ 所构成的线性空间. 如果对给定的 $\boldsymbol{f}(t)\in\mathscr{F}$ 存在系统 (2) 的一个解 $\boldsymbol{x}(t)$ 满足

$$\boldsymbol{y}(t)=C\boldsymbol{x}(t)+E\boldsymbol{f}(t)\equiv 0 \tag{3}$$

则说系统 Σ 对 $\boldsymbol{f}(t)$ “能抗干”,记做

$$\Sigma \longleftarrow\!\!\dashv \boldsymbol{f}(t)$$

进一步, 如果系统 Σ 对任意给定的 $\boldsymbol{f}(t)\in\mathscr{F}$ 都是“能抗干”的, 则说系统 Σ “对 $\mathscr{F}$ 能抗干”,记做

$$\Sigma \mid\!\!\longleftarrow \mathscr{F}$$

根据 Σ 的线性性质,易证

命题 1. 如果 $\Sigma \mid\!\!\longleftarrow\!\!\dashv \boldsymbol{f}_1(t)$, $\Sigma \mid\!\!\longleftarrow\!\!\dashv \boldsymbol{f}_2(t)$,那么对任意实数 α,β, 就有 $\Sigma \mid\!\!\longleftarrow\!\!\dashv \alpha\boldsymbol{f}_1(t)+\beta\boldsymbol{f}_2(t)$, 进一步,如果 $\Sigma \mid\!\!\longleftarrow \mathscr{F}$, 则对任意 $\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}$ 都有 $\Sigma \mid\!\!\longleftarrow \mathscr{F}_1$.

定义 2. 设 $\mathscr{F}_0$ 是方程 (1) 的解空间. 如果 $\Sigma \mid\!\!\longleftarrow \mathscr{F}_0$, 则说 Σ 对 (1) “能抗干”.

由于,方程 (1) 的解 $\boldsymbol{f}(t)$ 是由其初值 $\boldsymbol{f}(0)$ 所唯一决定, 而当 $\boldsymbol{f}(t)$ 给定时, 系统 Σ 的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 也是由其初值 $\boldsymbol{x}(0)$ 所唯一决定,因此可在状态空间中“翻译”定义 2.

用 F, X 分别表示系统 (1), (2) 的状态空间,它们分别是 q 维、n 维线性空间.

定义 3. 设 $\boldsymbol{f}(0)\in F$, $\boldsymbol{f}(t)$ 是由 $\boldsymbol{f}(0)$ 决定的 (1) 的解, $\boldsymbol{x}(0)\in X$. 如果 $\boldsymbol{f}(t)$ 和 $\boldsymbol{x}(0)$ 决定的系统 (2) 的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 与 $\boldsymbol{f}(t)$ 一起满足 (3) 式, 则说 $\boldsymbol{x}(0)$ 为 “对 $\boldsymbol{f}(0)$ 能抗干的状态”,记做

$$\boldsymbol{x}(0) \mid\!\!\longleftarrow\!\!\dashv \boldsymbol{f}(0) \quad 或 \quad \boldsymbol{f}(0) \vdash\!\!\longrightarrow\!\!\mid \boldsymbol{x}(0),$$

进一步,如果对任意 $\boldsymbol{f}(0)\in F$, 都有 $\boldsymbol{x}(0)\in X$, 使得 $\boldsymbol{x}(0) \mid\!\!\longleftarrow\!\!\dashv \boldsymbol{f}(0)$, 则说系统 Σ “对(1)能抗干”,记做

$$X \mid\!\!\longleftarrow F \quad 或 \quad F \longrightarrow\!\!\mid X.$$

显然有

命题 2. 如果 $\boldsymbol{x}_1(0) \mid\!\!\longleftarrow\!\!\dashv \boldsymbol{f}_1(0)$, $\boldsymbol{x}_2(0) \mid\!\!\longleftarrow\!\!\dashv \boldsymbol{f}_2(0)$, 则对任意实数 α,β 有 $\alpha\boldsymbol{x}_1(0)+\beta\boldsymbol{x}_2(0) \mid\!\!\longleftarrow\!\!\dashv \alpha\boldsymbol{f}_1(0)+\beta\boldsymbol{f}_2(0)$.

命题 3. 设 $\boldsymbol{x}_1(0), \boldsymbol{x}_2(0)\in X$. 这时, $\boldsymbol{x}_1(0) \mid\!\!\longleftarrow\!\!\dashv \boldsymbol{f}(0)$ 且 $\boldsymbol{x}_2(0) \mid\!\!\longleftarrow\!\!\dashv \boldsymbol{f}(0)$ 的充分必要条件为

$$\Delta\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_1(0)-\boldsymbol{x}_2(0)\in X_{\bar{G}},$$

这里 $X_{\bar{G}}$ 表示系统 (2) 的不能观子空间.

事实上,用 $\boldsymbol{x}_1(t)$, $\boldsymbol{x}_2(t)$ 表示以 $\boldsymbol{f}(t)=e^{A_0t}\boldsymbol{f}(0)$ 为输入, 分别以 $\boldsymbol{x}_1(0)$, $\boldsymbol{x}_2(0)$ 为初值的系统 (2) 的解,这时, $\Delta\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{x}_2(t)$ 将满足

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\Delta\boldsymbol{x}(t), \quad C\Delta\boldsymbol{x}(t)\equiv 0,$$

故 $\Delta\boldsymbol{x}(0)\in X_{\bar{G}}$.

今设 $X \mid\!\!\longleftarrow F$. 用 $\{\boldsymbol{x}^+_{f(0)}\}$ 表示对 $\boldsymbol{f}(0)$ “能抗干”的状态全体, X^+_F 表示当 $\boldsymbol{f}(0)$ 跑遍 F

时所有属于 $\{\boldsymbol{x}^+_{\boldsymbol{f}(0)}\}$ 的状态全体，即

$$X^+_F = \bigcup_{\boldsymbol{f}(0)\in F} \{\boldsymbol{x}^+_{\boldsymbol{f}(0)}\}.$$

显然有

命题 4. 设 $X|\!\!\longleftarrow F$，则 X^+_F 是 X 的子空间，且有

$$\{\boldsymbol{x}^+_0\} = X^-_G \subset X^+_F \subset X$$

今做商空间 X^+_F/X^-_G，则其元就是 $\{\boldsymbol{x}^+_{\boldsymbol{f}(0)}\}$，且对应关系

$$\boldsymbol{f}(0) \longmapsto \{\boldsymbol{x}^+_{\boldsymbol{f}(0)}\}$$

将定出由空间 F 到 X^+_F/X^-_G 上的线性映象．如果把 X^+_F 分解成

$$X^+_F = X^*_F \oplus X^-_G$$

并把 X^*_F 的元记做 $\boldsymbol{x}^*(0)$，那么 $\boldsymbol{x}^*(0) \in X$ 可以作为 X^+_F/X^-_G 的某一元 $\{\boldsymbol{x}^+_{\boldsymbol{f}(0)}\}$ 的“代表”．于是 $\{\boldsymbol{x}^+_{\boldsymbol{f}(0)}\}$ 中的每个状态均可表示成

$$\boldsymbol{x}^*(0) + \Delta\boldsymbol{x}(0), \quad \Delta\boldsymbol{x}(0) \in X^-_G.$$

而对应关系

$$\boldsymbol{f}(0) \longmapsto \boldsymbol{x}^*(0)$$

定出由 F 到 $X^*_F \subset X$ 的线性映象．于是必存在 $n\times q$ 常阵 L，使得 $\{\boldsymbol{x}^+_{\boldsymbol{f}(0)}\}$ 的状态可表示成

$$L\boldsymbol{f}(0) + \Delta\boldsymbol{x}(0), \quad \Delta\boldsymbol{x}(0) \in X^-_G$$

这就证明了

定理 1. 设 $X|\!\!\longleftarrow F$，则必存在 $n\times q$ 常阵 L，使得对 $\boldsymbol{f}(0)\in F$ “能抗干”的状态 $\boldsymbol{x}(0)$ 均可表示成

$$\boldsymbol{x}(0) = L\boldsymbol{f}(0) + \Delta\boldsymbol{x}(0), \quad \Delta\boldsymbol{x}(0) \in X^-_G \tag{4}$$

2. “能抗干性”的充分必要条件

设 $\mathscr{F}$ 是包含所有无穷次可微的 $\boldsymbol{f}(t)$ 的一个输入类．又设 $\Sigma|\!\!\longleftarrow \mathscr{F}$，这时，对任意 $\boldsymbol{f}(t)\in\mathscr{F}$ 都相应地存在 $\boldsymbol{x}(0)\in X$，满足

$$\boldsymbol{y}(t) = Ce^{At}\boldsymbol{x}(0) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}D\boldsymbol{f}(\tau)d\tau + E\boldsymbol{f}(t) \equiv 0 \tag{5}$$

今设 $\boldsymbol{f}(t)$ 是任意无穷次可微的输入．这时，对 (5) 式微分 k 次，然后令 $t=0$，得如下关系式：

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^k \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(0) = -\begin{bmatrix} E & & & & 0 \\ CD & E & & & \\ CAD & CD & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \cdots & CAD & CD & & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}(0) \\ \dot{\boldsymbol{f}}(0) \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}^{(k)}(0) \end{bmatrix} \tag{6}$$

就是说，对任意 k 及任意 $\boldsymbol{f}(0), \dot{\boldsymbol{f}}(0), \cdots, \boldsymbol{f}^{(k)}(0)$，从上面方程组都能解出 $\boldsymbol{x}(0)$．但是，这只是

$$E = CD = CAD = \cdots = CA^{k-1}D = 0$$

时才有可能．反过来，如果上述条件对 $k \geqslant n$ 成立，那么只要取 $\boldsymbol{x}(0)$ 为 X^-_G 的状态，则由

Cayley-Hamilton 定理，对任意 $f(t) \in \mathscr{F}$ (5) 式均成立．因此有

定理 2. 设 $\mathscr{F}$ 是包含所有无穷次可微的 $f(t)$ 的输入类．这时，$\Sigma \leftarrow\!\!- \mathscr{F}$ 的充分必要条件为

i, $E = 0$;

ii, D 的每个列向量都属于 $X_{\bar{G}}$.

下面，讨论 $X \leftarrow\!\!- F$ 的充分必要条件．由于 $f^{(i)}(0) = A_0^i f^{(0)}$，而当 $x(0) \leftarrow\!\!\dashv f(0)$ 时，$x(0)$ 表示成 (4) 的形式，因此由 (6) 式可得如下关系式：

$CL = -E$;

$CAL = -CD - EA_0 = -CD + CLA_0$;

$CA^2L = -CAD - CDA_0 - EA_0^2 = -CAD + (-CD - EA_0)A_0$

$\qquad = -CAD + CALA_0$;

……

$CA^kL = -CA^{k-1}D + CA^{k-1}LA_0$

于是得

$$CL = -E, \quad \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} (AL - LA_0 + D) = 0. \tag{7}$$

反之，设存在矩阵 L 满足 (7) 式．这时，对任意 $f(0) \in F$，只要取 $x(0) = Lf(0) + \Delta x(0)$，$\Delta x(0) \in X_{\bar{G}}$，则 $f(t) = e^{A_0 t} f(0)$ 和 $x(0)$ 决定的输出为

$$\begin{aligned} y(t) &= C\left[e^{At}L - Le^{A_0 t} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} D e^{A_0 \tau} d\tau\right] f(0) + Ce^{At}\Delta x(0) \\ &= C\left[e^{At}L - Le^{A_0 t} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} D e^{A_0 \tau} d\tau\right] f(0), \end{aligned}$$

由于

$$C\left[e^{At}L - Le^{A_0 t} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} D e^{A_0 \tau} d\tau\right] \tag{8}$$

对 t 解析，而根据关系式 (7)，它对 t 的各阶导数 $t = 0$ 时均为 0，因此 (8) 式必恒等于 0．故 $X \leftarrow\!\!- F$．这就证明了

定理 3. $X \leftarrow\!\!- F$ 的充分必要条件为，存在 $n \times q$ 常阵 L，满足

i, $E = -CL$;

ii, $\bar{D} = AL - LA_0 + D$ 的每个列 $\in X_{\bar{G}}$.

当系统为完全能观时，$X_{\bar{G}} = \{0\}$，因此有

系 1. 如果系统 Σ 为完全能观，则 $X \leftarrow\!\!- F$ 的充分必要条件为，存在 $n \times q$ 阵 L 满足

i, $E = -CL$;

ii, $\bar{D} = AL - LA_0 + D = 0$.

定理 2 实际上是定理 3 的 $L = 0$ 的情形．

3. 输出调节的充分必要条件

定义 4. 设 $\mathscr{F}$ 是一个给定的外输入类. 如果任意 $\boldsymbol{f}(t)\in\mathscr{F}$ 及任意 $\boldsymbol{x}(0)\in X$ 决定的 Σ 的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 都满足

$$\boldsymbol{y}(t)=C\boldsymbol{x}(t)+E\boldsymbol{f}(t)\to 0,\quad (t\to\infty). \tag{9}$$

则说系统 Σ"对 $\mathscr{F}$ 输出调节"[2].

定理 4. 设 $\mathscr{F}$ 是定理 2 中给定的输入类，或当 A_0 的振型都不稳定时的方程 (1) 的解空间. 这时，系统 Σ"对 $\mathscr{F}$ 输出调节"的充分必要条件为：

i) Σ 的能观部分稳定；

ii) $\Sigma|\!\longleftarrow\mathscr{F}$.

证明. 充分性. 设 Σ 已满足定理条件. 根据条件 $\Sigma|\!\longleftarrow F$，对任意 $\boldsymbol{f}(t)\in\mathscr{F}$，必存在以 $\boldsymbol{f}(t)$ 为输入的系统 Σ 的解 $\boldsymbol{x}_f(t)$，满足

$$C\boldsymbol{x}_f(t)+E\boldsymbol{f}(t)=0.$$

今设 $\boldsymbol{x}(t)$ 是以 $\boldsymbol{f}(t)$ 为输入的 Σ 的任意解，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(t)=C\boldsymbol{x}(t)+E\boldsymbol{f}(t)&=C(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_f(t))\\&=Ce^{At}(\boldsymbol{x}(0)-\boldsymbol{x}_f(0))\end{aligned}$$

但是，由条件 i) 上式必趋于 0. 因此，Σ 对 $\mathscr{F}$ 输出调节.

必要性. 设 Σ 对 $\mathscr{F}$ 输出调节. 这时，对 $\boldsymbol{f}(t)\equiv 0$ 及任意 $\boldsymbol{x}(0)\in X$，必有

$$\boldsymbol{y}(t)=C\boldsymbol{x}(t)=Ce^{At}\boldsymbol{x}(0)\to 0\qquad (t\to\infty).$$

这说明，Σ 的能观部分为稳定. 条件 i) 成立.

下面证条件 ii) 为简单起见，假定 Σ 为完全能观. 这时，A 为稳定阵.

先考察 $\mathscr{F}$ 为 (1) 的解空间的情形. 这时，对任意 $\boldsymbol{f}(0)\in F$ 及 $\boldsymbol{x}(0)\in X$，均有

$$\boldsymbol{y}(t)=Ce^{At}\boldsymbol{x}(0)+\left(C\int_0^t e^{A(t-\tau)}De^{A_0\tau}d\tau+Ee^{A_0t}\right)\boldsymbol{f}(0)\to 0.$$

但由 A 的稳定性 $Ce^{At}\boldsymbol{x}(0)\to 0$，而 $\boldsymbol{f}(0)$ 是任意的，故必有

$$C\int_0^t e^{A(t-\tau)}De^{A_0\tau}d\tau+Ee^{A_0t}\to 0$$

由于 A_0 的振型均不稳定，故必有

$$C\int_0^t e^{A(t-\tau)}De^{-A_0(t-\tau)}d\tau+E\to 0 \tag{10}$$

今记

$$Z(t)=\int_0^t e^{A(t-\tau)}De^{-A_0(t-\tau)}d\tau,$$

则有

$$\dot{Z}(t)=AZ(t)-Z(t)A_0+D. \tag{11}$$

由于，A稳定而 A_0 的振型均不稳定，故 $Z(t)$ 必收敛于某一常阵. 记

$$\lim_{t\to\infty}Z(t)=L$$

则由 (10)，(11) 式就得

$$\begin{cases}CL+E=0\\AL-LA_0+D=0.\end{cases}$$

于是由系 1 有 $\Sigma|\!\longleftarrow F$.

其次考察 $\mathscr{F}$ 为包含所有无穷次可微的 $\boldsymbol{f}(t)$ 的输入类的情形．显然，对任意 $q\times q$ 阵 A_0，方程 (1) 的解空间都是 $\mathscr{F}$ 的子集．今取 A_0 为如下特殊形式：

$$A_0 = sI, \quad s \text{ 为大于零的任意实数.}$$

这时，由 (10) 式得

$$C\int_0^t e^{-(sI-A)(t-\tau)}Dd\tau + E \to 0$$

由于，$-(sI-A)$ 为稳定阵，故有

$$C\int_0^t e^{-(sI-A)(t-\tau)}Dd\tau \to C(sI-A)^{-1}D.$$

于是，有

$$C(sI-A)^{-1}D + E = 0 \tag{12}$$

但这式对任意 $s>0$ 都成立，因此必有

$$E=0, \quad CD = CAD = \cdots = CA^{n-1}D = 0.$$

故由定理 2，$\Sigma \leftarrow\!\!\!\!| \; \mathscr{F}$.

如果 Σ 不完全能观，那么 Σ 可分解成

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_1 = A_1\boldsymbol{x}_1 + A_{12}\boldsymbol{x}_2 + D_1\boldsymbol{f}, \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 = A_2\boldsymbol{x}_2 + D_2\boldsymbol{f}, \\ \boldsymbol{y} = C_2\boldsymbol{x}_2 + E\boldsymbol{f}, \end{cases}$$

其中 A_2 为系统的能观部分．对此系统做与上面同样推理，可得定理的结论．　　证毕．

4. 能抗干性的判断方法

当 A, D, C, E, A_0 给定时，怎样判断“能抗干性”条件？给出如下算法．

系统 (1)，(2) 串联时的系统阵为

$$\left[\begin{array}{c:c} A & D \\ 0 & A_0 \\ \hdashline C & E \end{array}\right] \tag{13}$$

设 C 满秩．对此阵实行初等坐标变换，按 A，C 可把它化成如下形式[4]

$$\left[\begin{array}{cccccc:c} A_{00} & 0 & & & & -A_{\mu+1} & D_{\mu+1} \\ 0 & 0 & & 0 & & -A_\mu & D_\mu \\ & \begin{bmatrix} I_\mu \\ 0 \end{bmatrix} & 0 & \cdots & & \vdots & \vdots \\ & & \begin{bmatrix} I_{\mu-1} \\ 0 \end{bmatrix} & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & 0 & -A_2 & D_2 \\ & & & & \begin{bmatrix} I_2 \\ 0 \end{bmatrix} & -A_1 & D_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & A_0 \\ \hdashline 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & C_1 & E \end{array}\right] \tag{14}$$

其中，I_i 是 n_i 阶单位阵，$p = n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_\mu$，$A_i$，$D_i$ 分别是 $n_i\times p$，$n_i\times q$ 阵，C_1

为 $p\times p$ 非异阵．如果把 $n\times q$ 阵 L 分块成

$$L=-\begin{bmatrix}L_{\mu+1}\\ L_\mu\\ \vdots\\ L_1\end{bmatrix},\qquad L_i: n_i\times q,\ i=1,2,\cdots,\mu.$$

那么，“能抗干性”条件变成如下等式：

$$\begin{cases}-C_1L_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + E=0\\ -\begin{bmatrix}I_2\\ 0\end{bmatrix}L_2+A_1L_1+L_1A_0+D_1=0\\ \qquad\qquad\vdots\\ -\begin{bmatrix}I_\mu\\ 0\end{bmatrix}L_\mu+A_{\mu-1}L_1+L_{\mu-1}A_0+D_{\mu-1}=0\\ \qquad\qquad A_\mu L_1+L_\mu A_0+D_\mu=0\\ -A_{00}L_{\mu+1}+A_{\mu+1}L_1+L_{\mu+1}A_0+D_{\mu+1}=\text{任意}.\end{cases}$$

由于 C_1 为非异阵，故 $L_1=C_1^{-1}E$．今记

$$\bar{D}_i=A_iC_1^{-1}E+D_i,\quad i=1,2,\cdots,\mu,\mu+1,$$

则上述方程组变成

$$\begin{cases}I_1L_1=C_1^{-1}E,\\ \begin{bmatrix}I_2\\ 0\end{bmatrix}L_2=\bar{D}_1+L_1A_0,\\ \qquad\vdots\\ \begin{bmatrix}I_\mu\\ 0\end{bmatrix}L_\mu=\bar{D}_{\mu-1}+L_{\mu-1}A_0\\ 0=\bar{D}_\mu+L_\mu A_0\\ -A_{00}L_{\mu+1}+\bar{D}_{\mu+1}+L_{\mu+1}A_0=\text{任意}\end{cases}$$

显然，以 L_i, $i=1,2,\cdots,\mu+1$, 为未知阵的上述方程组有解的充分必要条件为，依次满足

$$\begin{cases}L_1=C_1^{-1}E,\\ [0\tilde{I}_1](\bar{D}_1+L_1A_0)=0\\ \qquad\vdots\\ [0\tilde{I}_{\mu-1}](\bar{D}_{\mu-1}+L_{\mu-1}A_0)=0\\ (\bar{D}_\mu+L_\mu A_0)=0\end{cases}\tag{15}$$

其中，$\tilde{I}_i$ 为 n_i-n_{i+1} 阶单位阵，$i=1,2,\cdots,\mu-1$.

对系统阵 (14) 实行初等坐标变换，容易验证条件 (15) 是否成立．其具体办法如下：

先用 C_1 消去 E，并实行相应行变换．这时，$D_1, D_2,\cdots,D_\mu$ 分别变成 $\bar{D}_1+L_1A_0$, $\bar{D}_2,\cdots,\bar{D}_\mu$;

如果 (15) 的第二式成立，那么可用 $\begin{bmatrix}I_2\\ 0\end{bmatrix}$ 消去 $\bar{D}_1+L_1A_0$，然后实行相应行变换．这时，$\bar{D}_2,\bar{D}_3,\cdots,\bar{D}_\mu$ 分别变成 $\bar{D}_2+L_2A_0,\bar{D}_3,\cdots,\bar{D}_\mu$;

$\cdots$

最后,如果 (15) 的倒数第二式成立,那么可用 $\begin{bmatrix} I_\mu \\ 0 \end{bmatrix}$ 消去 $\bar{D}_{\mu-1} + L_{\mu-1}A_0$, 然后实行相应行变换. 这时,$\bar{D}_\mu$ 变成 $\bar{D}_\mu + L_\mu A_0$.

如果上述过程中哪一步消去不能完成,或消去可实行到最后, 但 $\bar{D}_\mu + L_\mu A_0 \neq 0$, 则系统 Σ 对 F 不能抗干. 如果上述消去可进行到最后,并且 $\bar{D}_\mu + L_\mu A_0 = 0$, 则有 $\Sigma \mid\!\!\longleftarrow F$. 另外,当 $\Sigma \mid\!\!\longleftarrow F$ 时,按上述方法可实际构造出 L.

三、多项式阵系统的"能抗干性"

设有多项式阵系统

$$\Sigma: \begin{cases} P(D)\boldsymbol{z} - D(D)\boldsymbol{f} = 0 \\ R(D)\boldsymbol{z} + E(D)\boldsymbol{f} = \boldsymbol{y} \end{cases} \tag{16}$$

其中, $D = \frac{d}{dt}$, $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^r$ 是 Σ 的分状态, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^p$ 是输出, $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{R}^q$ 是外输入. $P(D)$, $D(D)$, $R(D)$, $E(D)$ 分别是关于 D 的 $r \times r$, $r \times q$, $p \times r$, $p \times q$ 多项式阵.

设 $\mathscr{F}$ 是一个给定的外输入类.

定义 5. 设 $\boldsymbol{f}(t)$ 是一个给定输入. 如果存在以 $\boldsymbol{f}(t)$ 为输入的系统 Σ 的解 $\boldsymbol{z}_f(t)$,满足

$$\boldsymbol{y}(t) = R(D)\boldsymbol{z}_f(t) + E(D)\boldsymbol{f}(t) \equiv 0 \tag{17}$$

则说 $\boldsymbol{z}_f(t)$ 是"对 $\boldsymbol{f}(t)$ 能抗干的解",记做

$$\boldsymbol{z}_f(t) \mid\!\!\longleftarrow\!\!\dashv \boldsymbol{f}(t),$$

于是, $\Sigma \mid\!\!\longleftarrow \mathscr{F}$ 的意义也就清楚了.

显然,如果 $\boldsymbol{z}_f(t) \mid\!\!\longleftarrow\!\!\dashv \boldsymbol{f}(t)$, 则有

$$\begin{cases} P(D)\boldsymbol{z}_f(t) - D(D)\boldsymbol{f}(t) \equiv 0, \\ R(D)\boldsymbol{z}_f(t) + E(D)\boldsymbol{f}(t) \equiv 0 \end{cases} \tag{18}$$

记 $G(D)$ 为 $P(D)$, $R(D)$ 的最大右公因子,即

$$P(D) = \bar{P}(D)G(D), \quad R(D) = \bar{R}(D)G(D)$$

则存在两个多项式阵 $X_1(D)$, $Y_1(D)$, 满足

$$X_1(D)P(D) + Y_1(D)R(D) = G(D)$$

如果记

$$H(D) = X_1(D)D(D) - Y_1(D)E(D),$$

则从 (18) 式可知 $\boldsymbol{z}_f(t)$ 与 $\boldsymbol{f}(t)$ 之间有如下关系:

$$G(D)\boldsymbol{z}_f(t) - H(D)\boldsymbol{f}(t) \equiv 0 \tag{19}$$

于是把它代到 (18) 式,得

$$\begin{bmatrix} (\bar{P}(D)H(D) - D(D)) \\ (\bar{R}(D)H(D) + E(D)) \end{bmatrix} \boldsymbol{f}(t) \equiv 0 \tag{20}$$

下面,设 $\mathscr{F}_0$ 是方程

$$P_0(D)\boldsymbol{f} = 0 \tag{21}$$

的解空间,而 $\mathscr{F}$ 是定理 2 中给定的那种输入类. 我们要讨论 $\Sigma \mid\!\!\longleftarrow \mathscr{F}_0$ 及 $\Sigma \mid\!\!\longleftarrow \mathscr{F}$ 的充分必要条件.

为此，先证如下引理

引理．设 $M(D)$ 是 $l \times q$ 多项式阵．这时，对任意 $\boldsymbol{f}(t) \in \mathscr{F}_0$ 都有恒等式

$$M(D)\boldsymbol{f}(t) \equiv 0$$

的充分必要条件为，$M(D)$ 以 $P_0(D)$ 为其右因子，即

$$M(D) = L(D)P_0(D)$$

证明．充分性．显然．必要性．今设 $P_1(D)$ 为 $M(D)$ 和 $P_0(D)$ 的最大右公因子．这时，

$$M(D) = \bar{M}(D)P_1(D), \quad P_0(D) = \bar{P}_0(D)P_1(D)$$

且存在两个多项式阵 $X_2(D)$, $Y_2(D)$ 满足

$$X_2(D)M(D) + Y_2(D)P_0(D) = P_1(D),$$

于是，对任意 $\boldsymbol{f}(t) \in \mathscr{F}_0$ 均有

$$P_1(D)\boldsymbol{f}(t) \equiv 0. \tag{22}$$

下面假设

$$\partial(\det \bar{P}_0(D)) > 0.$$

这时，方程 $\bar{P}_0(D)\boldsymbol{f}_1 = 0$ 必有非零解 $\boldsymbol{f}_1(t)$．显然，以 $\boldsymbol{f}_1(t)$ 为输入的方程 $P_1(D)\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_1(t)$ 的所有解 $\boldsymbol{f}(t)$ 都是方程 (21) 的解，因而 $\boldsymbol{f}(t) \in \mathscr{F}_0$．这是说，在 $\mathscr{F}_0$ 中必有不满足 (22) 式的 $\boldsymbol{f}(t)$，矛盾．这是由 $\partial(\det \bar{P}_0(D)) > 0$ 的假设引起的．因此，$\det \bar{P}_0(D)$ 必是常数，即 $\bar{P}_0(D)$ 是单位模阵．故 $P_0(D)$ 必是 $M(D)$ 的一个右因子．

今设 $\Sigma \mid\!\longleftarrow \mathscr{F}_0$．这时，对任意 $\boldsymbol{f}(t) \in \mathscr{F}_0$，等式 (20) 都成立．因此由上述引理，必存在 $L_1(D)$ 和 $L_2(D)$，满足

$$\begin{bmatrix} \bar{P}(D)H(D) - D(D) \\ \bar{R}(D)H(D) + E(D) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1(D) \\ L_2(D) \end{bmatrix} P_0(D). \tag{23}$$

反之，设 (23) 式成立．今任给 $\boldsymbol{f}(t) \in \mathscr{F}_0$，并取 $\boldsymbol{z}_f(t)$ 满足方程

$$G(D)\boldsymbol{z}_f = H(D)\boldsymbol{f}(t),$$

这时，

$$\begin{aligned} P(D)\boldsymbol{z}_f(t) - D(D)\boldsymbol{f}(t) &= \bar{P}(D)G(D)\boldsymbol{z}_f(t) - D(D)\boldsymbol{f}(t) \\ &= (\bar{P}(D)H(D) - D(D))\boldsymbol{f}(t) = L_1(D)P_0(D)\boldsymbol{f}(t) \equiv 0 \end{aligned}$$

即，$\boldsymbol{z}_f(t)$ 是以 $\boldsymbol{f}(t)$ 为输入的 Σ 的解．另一方面，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}(t) = R(D)\boldsymbol{z}_f(t) + E(D)\boldsymbol{f}(t) &= \bar{R}(D)G(D)\boldsymbol{z}_f(t) + E(D)\boldsymbol{f}(t) \\ &= (\bar{R}(D)H(D) + E(D))\boldsymbol{f}(t) = L_2(D)P_0(D)\boldsymbol{f}(t) \equiv 0. \end{aligned}$$

故由定义 5，有 $\Sigma \mid\!\longleftarrow \mathscr{F}_0$．这就证明了

定理 5．$\Sigma \mid\!\longleftarrow \mathscr{F}_0$ 的充分必要条件为，存在多项式阵 $H(D)$, $L_1(D)$, $L_2(D)$ 满足

$$\begin{bmatrix} \bar{P}(D)H(D) - D(D) \\ \bar{R}(D)H(D) + E(D) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1(D) \\ L_2(D) \end{bmatrix} P_0(D).$$

其中，$\bar{P}(D) = P(D)G^{-1}(D)$, $\bar{R}(D) = R(D)G^{-1}(D)$, $G(D)$ 为 $P(D)$, $R(D)$ 的最大右公因子．

下面考察 $\Sigma \mid\!\longleftarrow \mathscr{F}$ 的条件．由于，对任意 $q \times q$ 多项式阵 $P_0(D)$，相应的 (1) 的解空间 $\mathscr{F}_0$ 都是 $\mathscr{F}$ 的部分，因此由命题 1，(23) 式对任意 $P_0(D)$ 都要成立．但是，这只是

$L_1(D)=0$, $L_2(D)=0$ 时才成立. 因此就得

定理 6. $\Sigma \leftarrow\!\!-\!\!-\, \mathscr{F}$ 的充分必要条件为,存在多项式阵 $H(D)$ 满足

$$\begin{bmatrix} \bar{P}(D)H(D)-D(D) \\ \bar{R}(D)H(D)+E(D) \end{bmatrix}=0.$$

如果 $P(D)$, $R(D)$ 右互质,则由上两定理得

系 2. 设 Σ 为完全能观. 这时, $\Sigma \leftarrow\!\!-\!\!-\, \mathscr{F}_0$, $\Sigma \leftarrow\!\!-\!\!-\, \mathscr{F}$ 的充分必要条件为, 存在多项式阵 $H(D)$ 和 $L(D)$ 分别满足

$$\begin{bmatrix} P(D) & -D(D) \\ R(D) & E(D) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H(D) \\ I \end{bmatrix}=L(D)P_0(D), \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} P(D) & -D(D) \\ R(D) & E(D) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H(D) \\ I \end{bmatrix}=0. \tag{25}$$

例. 做为能抗干性条件 (24) 的一个应用例,考察如图 1 所示伺服系统补偿器结构.

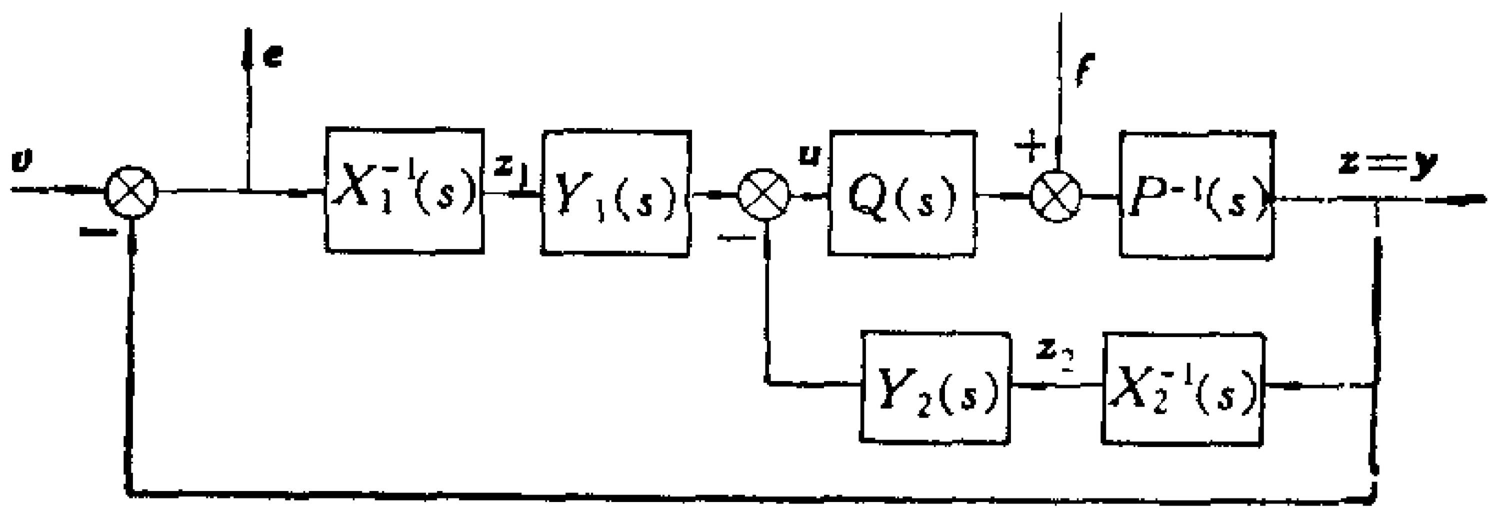

图 1

其中, $P^{-1}(s)Q(s)$ 是对像传递阵, $Y_1(s)X_1^{-1}(s)$, $Y_2(s)X_2^{-1}(s)$ 是补偿器传递阵, $\boldsymbol{v}$ 是被跟踪参考输入, $\boldsymbol{f}$ 是外部干扰, $\boldsymbol{e}$ 是跟踪误差.

要讨论的是,为使跟踪误差尽可能不受 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 的影响,补偿器应具有什么样的特点?

设 $k_1(D)$, $k_2(D)$ 是两个多项式,记

$K_1(D)=k_1(D)I$, $K_2(D)=k_2(D)I$, $I:p$ 阶单位阵. 假定 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 分别满足方程

$$K_1(D)\boldsymbol{v}=0, \quad K_2(D)\boldsymbol{f}=0.$$

上述闭环系统的系统方程为

$$\left[\begin{array}{ccc:cc} P(D) & -Q(D)Y_1(D) & Q(D)Y_2(D) & 0 & -I \\ I & X_1(D) & 0 & -I & 0 \\ -I & 0 & X_2(D) & 0 & 0 \\ \hdashline -I & 0 & 0 & I & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{z}_2 \\ \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{f} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline \boldsymbol{e} \end{bmatrix}.$$

显然,当 $Q(D)Y_1(D)$ 与 $X_1(D)$, $Q(D)Y_2(D)$ 与 $X_2(D)$ 右互质时, 以 $\boldsymbol{e}$ 为输出的闭环是完全能观的. 下面,如果把多项式阵 $H(D)$, $L(D)$ 分块成

$$H(D)=\begin{bmatrix} H_{11}(D) & H_{12}(D) \\ H_{21}(D) & H_{22}(D) \\ H_{31}(D) & H_{32}(D) \end{bmatrix}, \quad L(D)=\begin{bmatrix} L_{11}(D) & L_{12}(D) \\ L_{21}(D) & L_{22}(D) \\ L_{31}(D) & L_{32}(D) \\ L_{41}(D) & L_{42}(D) \end{bmatrix}$$

则由条件 (24) 就得

$$\begin{cases} PH_{11} - QY_1H_{21} + QY_2H_{31} & = L_{11}K_1 \\ H_{11} + X_1H_{21} \quad - I & = L_{21}K_1 \\ -H_{11} + X_2H_{31} & = L_{31}K_1 \\ -H_{11} \quad + I & = L_{41}K_1 \\ PH_{12} - QY_1H_{22} + QY_2H_{32} \quad - I & = L_{12}K_2 \\ H_{12} + X_1H_{22} & = L_{22}K_2 \\ -H_{12} + X_2H_{32} & = L_{32}K_2 \\ -H_{12} & = L_{42}K_2 \end{cases} \tag{26}$$

从(26)的最后一式开始往上逐次决定出满足方程组的 H_{ij}, L_{ij}, X_i, Y_i. 如果取

$$H_{12} = 0, \quad H_{22} = 0, \quad X_2 = K_2$$

那么，$L_{42} = 0$, $H_{32} = L_{32}$, $L_{22} = 0$, 且

$$QY_2H_{32} - I = K_2L_{12}.$$

如果取 Y_2 使 K_2 与 QY_2 左互质，那么满足上式的 H_{32}, L_{12} 存在. 在适当假定下，这样的 Y_2 是可以选取的. 再往上，取 $H_{11} = I$, 则 $L_{41} = 0$. 于是，由于 $X_2 = K_2$, 第三个方程变为

$$-L_{31}K_1 + H_{31}K_2 = I.$$

下面，不妨假定 K_1, K_2 互质，那么满足上式的 L_{31}, H_{31} 也是存在. 于是第二式变成

$$X_1H_{21} = L_{21}K_1,$$

显然，只要 X_1 含有因子 K_1, 即 X_1 可写成

$$X_1 = \tilde{X}_1K_1$$

则任取 H_{21}, $L_{21} = \tilde{X}_1H_{21}$. 这样，第一式变成

$$P - QY_2H_{31} = QY_1H_{21} + K_1L_{11}$$

这里 Y_2, H_{31} 已定，而 H_{21}, L_{11} 可选. 显然，只要取 Y_1 使 QY_1, K_1 左互质，满足上式的 H_{21}, L_{11} 存在，而在一定假定下使 QY_1, K_1 左互质的 Y_1 是存在.

这样，如果取 $X_2 = K_2$, 取 Y_2 使 K_2, QY_2 左互质；并取 X_1 含有因子 K_1, 且取 Y_1 使 K_1, QY_1 左互质，那么闭环系统对 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{f}$ 是“能抗干”的. 当然，为使闭环系统正常工作并且有一定的性能，还需加一些别的限制条件. 这一点可用满足上述条件的 X_1, Y_1 的适当选取来达到[4,5].

参　考　文　献

[1] Розоноэр, Л. И., Вариационный подход к проблеме инвариантности систем автоматического управления. I, АиТ, No. 6, (1963).
[2] W. M. Wonham, Linear Multivariable Control, A Geometric Approach, Springer-Verlag, (1974).
[3] W. A. Wolovich, Linear Multivariable Systems, Springer-Verlag, (1974).
[4] 韩京清，线性控制系统结构与反馈系统计算，1979 年全国控制理论厦门会议论文集，科学出版社(待出版).
[5] 钱唯德，完全不变性和 “Robust” 调节器间的一些关系，清华大学学报，19 卷，3 期，62—71，(1979).

THE DISTURBANCE-RESISTIBILITY OF LINEAR CONTROL SYSTEMS

HAN KYENGCHENG
(*Institute of Systems Science, Academia Sinica*)

ABSTRACT

This paper generalizes the concept of disturbance-resistibility of systems from capability of a system to obviate external disturbance. Strict definition of disturbance-resistibility of systems is given. Necessary and sufficient conditions are shown for systems to be disturbance-resistible and for systems to achieve output regulation. A concrete algorithm is given which can be used to test the disturbance-resistibility condition.

Finally, this paper discusses the disturbance-resistibility of polynomial matrix systems and the structural property of compencators which can make the system a disturbance-resistible system.

自动化技术应用学术交流会在昆明举行

中国自动化学会应用委员会于 1980 年十一月一日至八日在昆明召开了全国自动化技术应用学术交流会，有来自全国 62 个单位的 122 名代表参加．兰州炼油厂、上海南市电厂分别在大会上做了国家科委自动化试点成果情况汇报，大会还安排了出国访问报告等．

会议共收论文 150 余篇，宣读了 62 篇，论文内容涉及到自动化技术应用的各个领域．与会者认为，这次年会的论文水平比 1979 年年会提高了一步；论文数量也有较大幅度增加；在各种自动化技术应用中计算机应用的比例也明显提高．这次会议反映了我国自动化应用技术的主要成就．

这次年会学术气氛浓厚，讨论热烈．同行间，跨行业间互相学习，互相观摩，对我国自动化技术的发展起了促进作用，会议开的比较成功．

会议期间召开了应用委员会会议，会上回顾了过去的工作，讨论研究了今后的活动．初步决定明年年会上将特邀一些带有方向性的综述报告及短小精悍的专题小讲座，并将组织专题讨论．