第7卷 第1期　　自 动 化 学 报　　Vol. 7, No. 1
1981年1月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Jan., 1981

人口系统的稳定性理论和临界妇女生育率

宋 健　　于景元

摘　要

本文对人口发展过程的李雅普诺夫稳定性进行了研究，证明了无论是用偏微分方程或差分方程组去描述人口系统，都存在稳定性问题．文章从理论上证明了存在一个临界妇女生育率，使人口系统处于稳定的边缘；找到了临界生育率的明显表达式，从而结束了人口学家们多年的猜测．临界生育率由死亡率函数、育龄妇女生育模式和社会人口的性比例函数三者一意决定．中国现阶段的临界生育率为2.17．本文得到的结果可供某些国家制定本国人口政策或联合国制定世界人口政策参考．

人口发展过程是一个动态过程，人口系统是一个动态系统，这一事实不仅已为大多数人口学家们所承认，而且已为科学实践所证明．对于一个比较安定的社会（国家、省市或地区），人口发展过程可以用一个带有相应边界条件的偏微分方程式来描述，或者用一离散的差分方程组来描述．用我国过去几年的人口抽样调查数据来检验这些模型时发现，只要初始条件、按龄分布的死亡率函数确定的准确，两种形式的人口发展方程都能以千分之几的精度复现过去人口发展的情况，这与人口普查精度基本上是一致的．

本文的第一节将简略叙述人口发展过程的两种数学模型，它是讨论人口系统稳定性的基础．第二节中我们研究人口系统的稳定性问题，给出育龄妇女临界生育率的解析表达式，这一节是本文的重点．第三节讨论双线性离散发展方程的稳定性和临界生育率，并和第二节连续方程式得到的结果相比较．最后一节中，应用我国1975和1978年近一亿城乡人口抽样统计数据，求出了保持我国人口系统稳定的临界生育率．

按李雅普诺夫稳定性定义，一个线性系统的稳定性与外界扰动（即移民扰动）无关．所以这里得到的结果同样可用到移民多的国家．特别当把整个世界看成一个封闭系统时，我们就能得到世界人口系统的临界生育率．这对很多国家以至联合国制定世界人口政策，可以提供科学的理论参考．

一、人口系统的完全描述

一个国家或地区的人口发展过程是一个动态过程，描述这个过程的数学模型有两种[4,5]，一种是连续模型，它是一个边界控制的偏微分方程；另一种是离散模型，它是一双线性控制的差分方程组．我们先叙述连续模型．令 $F(r, t)$ 表示 t 时刻社会中一切年龄小于 r 的人口数，称为人口函数．当社会人口足够多时，可以认为 F 是足够光滑的函数．

本文于1980年5月25日收到．

依其物理意义可推知

$$p(r,t)=\frac{\partial F(r,t)}{\partial r}\tag{1.1}$$

为社会人口年龄分布密度. 用 $\mu(r,t)$ 表示社会死亡率函数，$p_0(r)$ 为 $t=t_0$ 时刻的初始人口年龄分布，$\varphi(t)$ 是 t 时刻社会婴儿绝对出生率，即单位时间内出生的婴儿数. 那么该社会中人口发展过程可以用非齐次一阶线性偏微分方程去描述:

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial r}=-\mu(r,t)p+f(r,t),\quad t\geqslant t_0\geqslant 0,\quad 0\leqslant r\leqslant r_m,$$

$$p(r,t_0)=p_0(r),$$

$$p(0,t)=\varphi(t).\tag{1.2}$$

上式中 r_m 是社会人口中所能活的最大年龄，$f(r,t)$ 是移民年龄密度. 显然，如果给定了 $\mu(r,t)$, $p_0(r)$, $\varphi(t)$ 和 $f(r,t)$ 后，我们可以求解方程 (1.2)，得到 $t\geqslant t_0$ 以后的长期或短期人口预报.

但是，系统 (1.2) 是一个开环系统. 为了完全描述社会人口的发展过程，必须建立反馈方程式.

定义函数 $k(r,t)$ 为 t 时刻社会人口中 r 岁妇女人数与同龄人口总数的比例；$h(r,t)$ 为育龄妇女生育模式，并且要求

$$\int_{r_1}^{r_2}h(r,t)dr=1,\tag{1.3}$$

式内 $[r_1,r_2]$ 为妇女育龄区间，再记 $\beta(t)$ 为社会上平均每个育龄妇女生育率，也称为比生育率. 于是，t 时刻社会婴儿绝对出生率 $\varphi(t)$ 可以表达为

$$\varphi(t)=\beta(t)\int_{r_1}^{r_2}h(r,t)k(r,t)p(r,t)dr.\tag{1.4}$$

不难证明，在条件 (1.3) 的限制下，$\beta(t)$ 的含义是该社会中在 t 时刻每个育龄妇女一生中的平均生育胎数.

为了研究人口系统的稳定性，我们略去 (1.2) 式中的移民项 $f(r,t)$，将式 (1.2) 和 (1.4) 联立起来，就得到一个完整的人口发展方程(令 $t_0=0$)

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial r}=-\mu(r,t)p(r,t)$$

$$p(r,0)=p_0(r)$$

$$p(0,t)=\varphi(t)$$

$$\varphi(t)=\beta(t)\int_{r_1}^{r_2}h(r,t)k(r,t)p(r,t)dr.\tag{1.5}$$

不难看出，由式 (1.4) 决定的 $\varphi(t)$ 是对人口系统的正反馈控制，而且是加在边界条件上，所以应称为偏微分方程的正反馈边界控制.

为了完全确定 (1.5) 式的解，必须给出 $\mu(r,t)$, $k(r,t)$, $h(r,t)$ 各函数. 这些函数都可从人口统计数据中得到. 死亡率函数 $\mu(r,t)$ 是标准人口统计资料，$k(r,t)$ 和 $h(r,t)$ 也可以用数值表的方法去定义. 由于本文的目的是研究稳定性问题，将假定对于所要研究的社会，这些函数都是给定的. 在 [4] 中，采用离散化的方法，从连续模型可推出人

口发展过程的离散模型，

$$
\begin{aligned}
&x_{i+1}(t+1)=(1-\mu_i(t))x_i(t)+f_i(t), \quad i=0,1,\cdots,m-1,\\
&x_0(t)=(1-\mu_{00}(t))\phi(t),\\
&\phi(t)=\beta(t)\sum_{i=r_1}^{r_2}k_i(t)h_i(t)x_i(t),
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

其中，$x_i(t)$ 是 t 年代满 i 周岁但不足 $i+1$ 周岁的人口总数，$x_0(t)$ 是 t 年代(标准统计时刻)存留的不满周岁的婴儿总数．$\phi(t)$ 是 t 年代(标准统计时刻)以前一年内出生的婴儿总数．$\mu_{00}(t)$ 是婴儿死亡率，$\mu_i(t)$ 为前向按龄死亡率；$k_i(t)$ 是性比例函数；$h_i(t)$ 是妇女生育模式，它满足规格化条件

$$\sum_{i=r_1}^{r_2}h_i(t)=1.$$

$\beta(t)$ 和连续模型中一样，仍然是妇女平均生育率，即平均每个妇女一生所生孩子数．

引进向量和矩阵符号，可将上述方程组写成向量形式．记

$$\boldsymbol{x}(t)=\{x_1(t),x_2(t),\cdots,x_m(t)\},\ \boldsymbol{f}(t)=\{f_0(t),f_1(t),\cdots,f_{m-1}(t)\},$$

$$H(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots\cdots & 0\\ 1-\mu_1(t) & 0 & \cdots\cdots & 0\\ & 1-\mu_2(t) & & \vdots\\ & & \ddots & \vdots\\ & & 1-\mu_{m-1}(t) & 0\end{pmatrix},$$

$$B(t)=\begin{pmatrix} b_1(t)\,b_2(t)\cdots\cdots b_m(t)\\ 0\end{pmatrix}$$

其中

$$b_i(t)=(1-\mu_0(t))(1-\mu_{00}(t))k_i(t)h_i(t), \quad i=1,2,\cdots,m. \tag{1.7}$$

于是方程组 (1.6) 变为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t+1)&=H(t)\boldsymbol{x}(t)+\beta(t)B(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{f}(t),\\
\boldsymbol{x}(0)&=\boldsymbol{x}_0.
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

这是一个离散的双线性控制系统．

二、人口系统的稳定性

如果不考虑移民对社会人口状态的影响，一个封闭社会人口发展过程就是由方程组 (1.5) 决定的解．死亡率函数 $\mu(r,t)$，性比例函数 $k(r,t)$ 和生育模式函数 $h(r,t)$ 以及妇女比生育率 $\beta(t)$，这四个函数可以完全确定 (1.5) 式所描述的人口发展过程．一般来说，这些函数都是年龄 r 和时间 t 的函数，因此式 (1.5) 为变系数方程．但是，在一个比较安定的社会中，这些函数随时间 t 的变化很缓慢．所以，作为一次近似，我们首先研究常系数情况．为此将 (1.5) 式改写为

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial r}=-\mu(r)p, \quad r,t\in\Omega,$$

$$p(r,0)=p_0(r),\quad p(0,t)=\varphi(t),$$

$$\varphi(t)=\beta(t)\int_{r_1}^{r_2}k(r)h(r)p(r,t)dr. \tag{2.1}$$

式内 $\Omega=\{0<r<r_m;\ 0<t<\infty\}$.

我们将在 $\mathscr{L}^2(\Omega)$ 中讨论 (2.1) 的解. 依迹定理[11], 为了使 $p(r,t)$ 能在边界上留下属于 $\mathscr{L}^2(\partial\Omega)$ 中的函数 $p_0(r)$ 和 $\varphi(t)$, 要求 $p(r,t)$ 属于 $H^{3/2}(\Omega)$, 即属于 3/2 阶索波列夫空间. 我们将讨论下列稳定性问题.

设 $p(r,t)$ 是取值于 $\mathscr{L}^2(0,r_m)$ 中的时间 t 的函数, 在每一时刻 t, 它的范数为

$$\|p(r,t)\|=\left(\int_0^{r_m}p^2(r,t)dr\right)^{1/2}.$$

再令 $\beta(t)=\beta=$ 常数, 求 β 的临界值 β_c 使 (2.1) 在李雅普诺夫意义下是稳定的, 即对一切 $\beta\leqslant\beta_c$, 无论对人口状态在 $t=0$ 时刻有何种扰动(移民, 死亡, 战争或其它因素), $p(r,t)$ 都不发散. 由于式 (2.1) 是线性方程, 所以只须研究它的任一不恒为零的特解稳定性就够了.

假设 $\dfrac{\partial p}{\partial t}$ 和 $\dfrac{\partial p}{\partial r}$ 都是 $\mathscr{L}^2(\Omega)$ 中的函数, 可对 (2.1) 中各式作拉普拉斯变换[12]:

$$P(r,\lambda)=\int_0^\infty p(r,t)e^{-\lambda t}dt, \tag{2.2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial p}{\partial t}e^{-\lambda t}dt=\lambda P(r,\lambda)-p(r,0)=\lambda P(r,\lambda)-p_0(r), \tag{2.3}$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial p}{\partial r}e^{-\lambda t}dt=\frac{d}{dr}P(r,\lambda). \tag{2.4}$$

于是有

$$\frac{dP}{dr}+(\lambda+\mu(r))P=p_0(r),$$

$$P(0,\lambda)=\phi(\lambda)=\beta\langle k(r)h(r),P(r,\lambda)\rangle. \tag{2.5}$$

这样, 便得到一个含有参量 λ 的常微分方程及其初始条件. 根据常微分方程理论, (2.5) 式的通解为,

$$P(r,\lambda)=e^{-\lambda r-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}\left[c_1+\int_0^r p_0(s)e^{\lambda s+\int_0^s\mu(\rho)d\rho}ds\right],$$

$$c_1=P(0,\lambda)=\beta\langle k(r)h(r),P(r,\lambda)\rangle. \tag{2.6}$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $\mathscr{L}^2(0,r_m)$ 中的内积. 将 c_1 代入 (2.6) 中第一式, 然后两边对 $k(r)h(r)$ 求内积, 不难解出

$$\langle k(r)h(r),P(r,\lambda)\rangle=\frac{\left\langle k(r)h(r),e^{-\lambda r-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}\int_0^r p_0(s)e^{\lambda s+\int_0^s\mu(\rho)d\rho}ds\right\rangle}{1-\beta\langle k(r)h(r),e^{-\lambda r-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}\rangle}.$$

于是

$$P(r,\lambda)=e^{-\lambda r-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}\left[\frac{\beta\left\langle k(r)h(r),e^{-\lambda r-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}\int_0^r P_0(s)\,e^{\lambda s+\int_0^s\mu(\rho)d\rho}ds\right\rangle}{1-\beta\langle k(r)h(r),e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho-\lambda r}\rangle}+\int_0^r p_0(s)e^{\lambda s+\int_0^s\mu(\rho)d\rho}ds\right]\tag{2.7}$$

按照拉普拉斯反变换公式

$$p(r,t)=\frac{1}{2\pi\iota}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}P(r,\lambda)e^{\lambda t}d\lambda,\tag{2.8}$$

式内 σ 是绝对收敛横标，不难证明，$\sigma<\infty$.

从 (2.7) 式中可以看出，对任何初始人口状态扰动 $p_0(r)$，当 $t\to\infty$时，为了使 $p(r,t)$ 不会趋于无穷大，只须特征方程式

$$1-\beta\langle k(r)h(r),e^{-\lambda r-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}\rangle=0\tag{2.9}$$

的一切零点都具有负实部或者具有零实部的单重零点．这是由于在 (2.7) 中，除分母外其它函数都是 λ 的整函数，除无穷远点外再没有零点和极点．将上式写成积分形式

$$1-\beta\int_0^\infty e^{-\lambda r-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}k(r)h(r)dr=0,\tag{2.10}$$

再定义

$$\beta_{cr}=\frac{1}{\int_0^\infty e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}k(r)h(r)dr}\tag{2.11}$$

称为临界生育率．证明下列基本定理．

定理 2.1. 为了使特征方程 (2.10) 的所有根具有负实部必须且只须 $\beta<\beta_{cr}$. 进一步，为了人口发展方程 (2.1) 对任何初始人口扰动是稳定的，必须且只须 $\beta\leqslant\beta_{cr}$.

证．先证明充分性．设 $\beta<\beta_{cr}$ 且 λ_0 是 (2.10) 的任一根，即

$$1-\beta\int_0^\infty e^{-\lambda_0 r}e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}k(r)h(r)dr=0,\tag{2.12}$$

或

$$\beta=\frac{1}{\int_0^\infty e^{-\lambda_0 r}e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}k(r)h(r)dr}.\tag{2.13}$$

设 $\beta<\beta_{cr}$，故有

$$\int_0^\infty e^{-\lambda_0 r}e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}k(r)h(r)dr>\int_0^\infty e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}k(r)h(r)dr.$$

令

$$F(r)=e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}k(r)h(r),$$

$F(r)$ 是非负函数．注意到 β 是非负实数，

$$\int_0^\infty e^{-\lambda_0 r}F(r)dr = \left|\int_0^\infty e^{-\lambda_0 r}F(r)dr\right| \leqslant \int_0^\infty |e^{-\lambda_0 r}|F(r)dr$$
$$= \int_0^\infty e^{-rRe\lambda_0}F(r)dr,$$

比较上面两个不等式可得

$$\int_0^\infty (1 - e^{-rRe\lambda_0})F(r)dr < 0,$$

由此推得 $R_e\lambda_0 < 0$, 即 λ_0 必须具有负实部.

再证必要性. 设 λ_0 是 (2.10) 的根,且具有负实部,那么下列不等式成立

$$0 = 1 - \beta\int_0^\infty e^{-\lambda_0 r}F(r)dr < 1 - \beta\beta_{cr}^{-1},$$

由此得到 $\beta < \beta_{cr}$.

最后, 我们来证明 $\beta = \beta_{cr}$ 时, $\lambda = 0$ 是 (2.10) 式的单重根. 而且在虚轴上除 $\lambda = 0$ 外,不再有其它的根. 事实上,由于

$$\frac{d}{d\lambda}\left(1 - \beta_{cr}\int_0^\infty e^{-\lambda r}F(r)dr\right)\Big|_{\lambda=0} \neq 0,$$

说明 $\lambda = 0$ 只是单重零点.

其次,当 $\beta = \beta_{cr}$ 时,设 $\lambda = i\omega$ 是 (2.10) 的根,则有

$$1 - \beta_{cr}\int_0^\infty e^{-i\omega r}e^{-\int_0^r \mu(\rho)d\rho}k(r)h(r)dr = 0,$$

或者等价地有

$$1 - \beta_{cr}\int_0^\infty \cos\omega r\, e^{-\int_0^r \mu(\rho)d\rho}k(r)h(r)dr - i\beta_{cr}\int_0^\infty \sin\omega r\, e^{-\int_0^r \mu(\rho)d\rho}$$
$$\times k(r)h(r)dr = 0.$$

因而有

$$1 - \beta_{cr}\int_0^\infty \cos\omega r\, e^{-\int_0^r \mu(\rho)d\rho}k(r)h(r)dr = 0.$$

但依 β_{cr} 的定义,应有

$$1 - \beta_{cr}\int_0^\infty e^{-\int_0^r \mu(\rho)d\rho}k(r)h(r)dr = 0.$$

两式相减后,得到

$$\int_0^\infty (1 - \cos\omega r)e^{-\int_0^r \mu(\rho)d\rho}k(r)h(r)dr = 0.$$

由于被积函数是非负函数,上式成立的必要充分条件是 $1 - \cos\omega r = 0$, 但这只有当 $\omega = 0$ 时才有可能. 因此当 $\beta = \beta_{cr}$ 时,在虚轴上只有 $\lambda = 0$ 这一个根. 而且是一重的,除此外再没有别的根. 综合起来,当 $\beta \leqslant \beta_{cr}$ 时,(2.10)的根都在左半复平面,在虚轴上只有 $\lambda = 0$ 点. 由复变函数论中的留数定理, 知道由 (2.8) 式决定的 $p(r, t)$ 对任何初始扰动 $p_0(r)$ 都是一致有界函数,故系统是稳定的. 证完

这个定理说明, 如果实际社会的妇女比生育率 β 大于临界生育率 β_{cr}, 则特征方程

(2.9) 或 (2.10) 式，必然要出现一个具有正实部的根 λ_0，即 $R_e\lambda_0 > 0$，从而使系统不稳定．这一事实几乎是显然的，记

$$f(\lambda) = 1 - \beta\int_0^\infty e^{-\lambda r} e^{-\int_0^r \mu(\rho)d\rho} k(r)h(r)dr. \tag{2.14}$$

若 $\beta > \beta_{cr}$，令 $\lambda = 0$，有

$$f(0) = 1 - \beta\beta_{cr}^{-1} < 0,$$

再取 $\lambda = a$ 为足够大的整数，由于函数 $h(r)$ 只在育龄区间 $[r_1, r_2]$ 内取非负值，而在这个区间外恒等于零，所以只要 a 足够大，下列不等式成立，

$$f(a) = 1 - \beta\int_0^\infty e^{-ar} e^{-\int_0^r \mu(\rho)d\rho} k(r)h(r)dr > 1 - \beta\int_0^\infty e^{-ar_1} e^{-\int_0^r \mu(\rho)d\rho} k(r)h(r)dr$$
$$= 1 - e^{-ar_1}\beta\beta_{cr}^{-1} > 0,$$

$f(\lambda)$ 是 λ 的连续函数，由上边两个不等式，它必然在区间 $(0, a)$ 中有一零点 λ_0，$\lambda_0 > 0$，由于 λ_0 具有正实部，按照拉普拉斯反演公式 (2.8)，可推知，当 $t\to\infty$ 时，$\|p(r,t)\|\to\infty$．这一事实充分说明了，临界妇女生育率对人口发展过程的重要意义．由上所述，对任意给定的比生育率 β，当 $\beta > \beta_{cr}$ 时，系统是不稳定的，当 $\beta \leqslant \beta_{cr}$ 时，系统是稳定的．也就是说，β_{cr} 是使人口系统稳定的最大比生育率．

由 (2.11) 式可以看出，临界生育率 β_{cr} 由死亡函数 $\mu(r)$、性比例函数 $k(r)$ 和生育模式 $h(r)$ 这三个函数所唯一确定．这三个函数的不同组合，给出了不同的临界生育率．

在人口统计学中，所得到的往往不是连续函数 $\mu(r)$，$k(r)$，$h(r)$，而是它们的年平均值 μ_i，k_i，h_i，根据这些值，可给出 (2.11) 式的离散化形式，

$$\beta_{cr} = \left[\sum_{i=r_1}^{r_2} k_i h_i e^{-(\mu_{00}+\sum_{\alpha=0}^{i}\mu_\alpha)}\right]^{-1}. \tag{2.15}$$

三、离散人口方程的稳定性和临界生育率

现在我们再讨论一下离散人口发展方程 (1.6) 的稳定性问题．令 $f_i = 0$，$i = 0, 1, \cdots, m-1$，则 $\boldsymbol{f}(t) = 0$，于是向量方程 (1.8) 变为

$$\boldsymbol{x}(t+1) = H\boldsymbol{x}(t) + \beta B\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{3.1}$$

式内 H 和 B 均为 $m\times m$ 阶方阵，

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ 1-\mu_1 & 0 & & \mathbf{0} & \\ & 1-\mu_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 1-\mu_{m-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 b_2 \cdots\cdots b_m \\ \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

$b_i = (1-\mu_{00})(1-\mu_0)k_i h_i$，$i = 1, 2, \cdots m$，$k_i$，$h_i$，$\mu_i$ 均为不依赖于 t 的常数．

直接计算可求得系统 (3.1) 的特征方程为

$$f(\lambda) = \det(\lambda - H - \beta B) = \lambda^m - \beta\Big[b_1\lambda^{m-1}$$

$$+ b_2(1-\mu_1)\lambda^{m-2} + \cdots + b_m \prod_{i=1}^{m-1}(1-\mu_i)\Big]. \tag{3.3}$$

定义函数

$$\beta(\lambda) = \frac{\lambda^m}{b_1\lambda^{m-1} + b_2(1-\mu_1)\lambda^{m-2} + \cdots + b_m \prod_{i=1}^{m-1}(1-\mu_i)}. \tag{3.4}$$

当然，由于生育模式 h_i 只在 $i \in [r_1, r_2]$ 中时不为零，所以，当 i 不在区间 $[r_1, r_2]$ 中时，$h_i = 0$，因而 $b_i = 0$，但是这里我们仍讨论一般情况．再记

$$\beta(1) = \beta_1 = \frac{1}{b_1 + b_2(1-\mu_1) + \cdots + b_m \prod_{i=1}^{m-1}(1-\mu_i)}. \tag{3.5}$$

从线性常系数差分方程理论中知道，为了方程组 (3.1) 在李雅普诺夫意义下是稳定的，必须且只须特征方程

$$f(\lambda) = \det(\lambda - H - \beta B) = 0 \tag{3.6}$$

的一切根均位于复平面上的单位圆内或圆周上，而后者必须是单重的． 如果在单位圆外有根，或者在单位圆周上有多重根，则系统一定是不稳定的． 根据这个事实，我们可以证明与定理 2.1 完全类似的稳定性定理．

定理 3.1. 为使由差分方程组(3.1)描述的人口发展过程是稳定的，必须且只须$\beta \leqslant \beta_1$，这里 β_1 是由 (3.5) 式定义的临界生育率．

证．先证充分性，即当 $0<\beta\leqslant\beta_1$ 时，(3.6) 的一切特征根 λ 都要在单位圆内，$|\lambda|\leqslant 1$. 现反证，假设 (3.6) 式有一特征根 λ_0，且 $|\lambda_0| > 1$，由 (3.3) 式得

$$\begin{aligned}
0 = f(\lambda_0) &= \left|\lambda_0^m - \beta\left[b_1\lambda_0^{m-1} + \cdots + b_m \prod_{i=1}^{m-1}(1-\mu_i)\right]\right| \\
&\geqslant |\lambda_0|^m \left\{1 - \beta\left|b_1\lambda_0^{-1} + \cdots + b_m \prod_{i=1}^{m-1}(1-\mu_i)\lambda_0^{-m}\right|\right\} \\
&\geqslant |\lambda_0|^m \left\{1 - \beta\left[b_1|\lambda_0|^{-1} + \cdots + b_m \prod_{i=1}^{m-1}(1-\mu_i)|\lambda_0|^{-m}\right]\right\} \\
&\geqslant |\lambda_0|^m\{1 - \beta\beta_1^{-1}\}.
\end{aligned}$$

由此推知 $1-\beta\beta_1^{-1} \leqslant 0$，即 $\beta_1 \leqslant \beta$，这与假设矛盾，故当 $\beta \leqslant \beta_1$ 时，不可能有 $|\lambda_0| > 1$ 的根出现．

再证必要性，设对某一 $\beta > 0$，特征方程 (3.6) 的一切根 λ 均位于闭单位圆内，证明此时必 $\beta \leqslant \beta_1$，现反证，假设 $\beta > \beta_1$，在 (3.3) 式中令 $\lambda = 1$，按 (3.5) 式的定义，知

$$f(1) = 1 - \beta\beta_1^{-1} < 0.$$

另一方面，取 $\lambda = a$，a 为足够大的正实数，

$$\begin{aligned}
f(a) &= a^m - \beta\left[b_1a^{m-1} + \cdots + b_m \prod_{i=1}^{m-1}(1-\mu_i)\right] \\
&\geqslant a^m\left[1 - \beta D\left(\frac{1}{a} + \cdots + \frac{1}{a^m}\right)\right] = a^m\left[1 - \frac{\beta D}{a}\left(1 + \cdots\right.\right.
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{a^{m-1}}\Big)\Big]=a^m\left[1-\frac{\beta D(1-a^{1-m})}{a(a-1)}\right],$$

式内 $D=\max\left\{b_1, b_2(1-\mu_1),\cdots, b_m\prod_{i=1}^{m-1}(1-\mu_i)\right\}$. 显然，当 a 足够大时，$f(a)>0$ 总成立．由于 $f(\lambda)$ 是 λ 的连续函数，因此，在区间 $(1, a)$ 内必有 $f(\lambda)$ 的零点 λ_0 为方程 (3.3) 的特征根，但 $|\lambda_0|>1$，与假设矛盾．必要性得证．

当 $\beta=\beta_{cr}$ 时，$\lambda=1$ 是方程 (3.6) 的特征根．现在证明它的重数是一．

假设 $\lambda=1$ 是 $f(\lambda)=0$ 的二重根，必有下列二等式同时成立：

$$f(1)=1-\beta_1\left[b_1+b_2(1-\mu_1)+\cdots+b_m\prod_{i=1}^{m-1}(1-\mu_i)\right]=0$$

$$f'(1)=m-\beta_1\left[(m-1)b_1+\cdots+b_{m-1}\prod_{i=1}^{m-2}(1-\mu_i)\right]=0,$$

由此可推出

$$\begin{aligned}m&\leqslant\beta_1 m\left[b_1+b_2(1-\mu_1)+\cdots+b_m\prod_{i=1}^{m-1}(1-\mu_i)\right]\\&\quad-\beta_1\left[b_1+2b_2(1-\mu_1)+\cdots+(m-1)b_{m-1}\prod_{i=1}^{m-2}(1-\mu_i)\right.\\&\quad\left.+mb_m\prod_{i=1}^{m-1}(1-\mu_i)\right]=m-\beta_1\left[b_1+2b_2(1-\mu_1)+\cdots\right.\\&\quad\left.+(m-1)b_{m-1}\prod_{i=1}^{m-2}(1-\mu_i)+mb_m\prod_{i=1}^{m-1}(1-\mu_i)\right],\end{aligned}$$

这样便得到

$$\beta_1\left[b_1+2b_2(1-\mu_1)+\cdots+mb_m\prod_{i=1}^{m-1}(1-\mu_i)\right]\leqslant 0,$$

但这是不可能的，因为不等式左端各数皆为整数，因此它们的和也是整数．这样，证明了 $\lambda=1$ 是 (3.6) 式的单重根．用类似于定理 3.1 的证明方法，可以证明，在单位圆周上除 $\lambda=1$ 这个单重根外不再有 (3.6) 的其它根，其它根都在单位圆内．这样，就证明了系统 (3.1) 稳定的必要充分条件是 $\beta\leqslant\beta_1$.　　证完．

这个定理说明，当妇女平均生育率 β 大于临界生育率时，人口发展过程对任何初始扰动都是不稳定的．

比较连续人口发展方程的临界生育率 β_{cr} 和离散人口方程对应的临界生育率 β_1,

$$\beta_{cr}=\left(\int_0^\infty e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}k(r)h(r)dr\right)^{-1}\simeq\left(\sum_{i=r_1}^{r_2}k_ih_ie^{-\left(\mu_{00}+\sum_{\alpha=0}^{i}\mu_\alpha\right)}\right)^{-1},$$

$$\beta_1=\left(\sum_{i=r_1}^{r_2}(1-\mu_{00})(1-\mu_0)\cdots(1-\mu_{i-1})k_ih_i\right)^{-1}, \tag{3.7}$$

可以看出，β_1 只是 β_{cr} 的一阶线性近似，在 β_1 中用因子 $(1-\mu_i)$ 代替了 β_{cr} 中的 $e^{-\mu_i}$，而且括弧内的和式中的项数也略有差别．所以用差分方程描述人口发展方程的精度可能稍差些．

四、七十年代末期中国社会条件决定的妇女临界生育率

由上节所述，无论 β_{cr} 和 β_1，都由死亡率函数 μ，性比例函数 k 和生育模式 h 所唯一确定. 由 (2.11) 和 (3.7) 二个表达式来看，临界生育率随着死亡率的降低和性比例函数的增大而降低. 对于规格化了的生育模式 $h(r)$，其峰值前移将使 β_{cr} 或 β_1 下降，反之，若 $h(r)$ 的峰值后移，将使 β_{cr} 和 β_1 增大. 这意味着实行晚婚和晚生育将有利于保持人口发展过程的稳定性；相反，早婚和早生育不利于人口系统的稳定性. 从这个意义上说，提倡晚婚晚生育的方针是正确的.

下面，我们利用我国 1975 年和 1978 年关于上述三个函数的抽样调查数据，按 (2.11) 和(3.7)式，推算我国七十年代末期社会条件下的临界妇女生育率. 表 1 列出了我国 1975年和 1978 年近一亿 40 岁以下城乡人口，按龄死亡率 η_i，μ_i 及性比例 k_i 的统计数据.

生育模式函数 $h(r)$ 也要根据统计数据来确定. 实际数据表明，它与社会的物质条件和生活水平，民族的风俗习惯，人们的思想方法都有密切的关系. 我国城市妇女和乡村妇女的平均生育模式也有很大差别. 根据我国江苏省如东县妇女生育情况的统计和天津市的相应统计数据，并参考七十年代日本及朝鲜的有关数据[15]，可以发现，规格化了的生育模式函数可以相当准确地用统计学中的 χ^2 分布来逼近. 各不同地区，不同国家的生育模式之间，其差别可以用两个参数来加以区别，一个是最低生育年龄，另一个是生育峰值年龄，即函数 $h(r)$ 取极大值所对应的年龄. 只要这两个参数确定后就能决定该社会妇女的平均生育模式.

由上所述，用下列函数去逼近

$$h(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}(r-r_1)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{r-r_1}{2}}, & r\geqslant r_1\\[2ex] 0, & r\leqslant r_1,\end{cases}\tag{4.1}$$

这是统计学中的 χ^2 分布密度函数，因而它是规格化的，

$$\int_{r_1}^{r_2}h(r)dr\simeq\int_0^{\infty}h(r)dr=1.\tag{4.2}$$

不难检查，函数 $h(r)$ 在 r_0 处取极大值，

$$r_0=r_1+n-2.\tag{4.3}$$

按照我国农村的习惯，妇女平均最低生育年龄为 18 岁，即 $r_1=18$. 在城市中最低生育年龄约为 20 岁. 如东县的调查数据表明，妇女生育峰值为 24 岁左右，而天津市为 29 岁. 实行晚婚、晚生育的人口政策以后，城乡生育峰值都有后推的趋势. 为了计算我国七十年代后期社会条件下的临界妇女生育率，我们取 $r_1=18$ 岁，生育峰值 $r_0=26$，即相当于 (4.1)式中 $n=10$. 将 (4.1) 式离散化后代人 (2.11) 和 (3.7) 式，再根据附表中的数据，计算出 1975 年和 1978 年我国妇女临界生育率，列在表 2 中.

从表中所列数据可以看出，用离散人口发展方程算出的临界生育率 β_1 比用连续人口发展方程算出的 β_{cr} 要大，这是因为 (3.7) 式是对 (2.11) 式的一阶近似. 因此，我们有理由认为，用 (2.11) 式算出的 β_{cr} 能比较准确地描述我国社会现阶段的人口发展状况.

表 1　死亡率和女性比例表

年龄	后向死亡率 η_i		前向死亡率 μ_i		性比例 $k_i(\%)$	
	1975	1978	1975	1978	1975	1978
0	0.0165	0.0166	0.0162	0.0162	48.39	48.43
1	0.0104	0.0121	0.0103	0.0120	48.68	48.92
2	0.0059	0.0083	0.0059	0.0082	48.83	48.51
3	0.0041	0.0057	0.0041	0.0057	48.80	48.81
4	0.0025	0.0038	0.0025	0.0038	48.89	48.89
5	0.0019	0.0028	0.0019	0.0028	48.83	48.92
6	0.0014	0.0020	0.0014	0.0020	48.86	48.92
7	0.0012	0.0015	0.0012	0.0015	48.87	49.09
8	0.0011	0.0014	0.0011	0.0014	48.77	48.83
9	0.0008	0.0011	0.0008	0.0011	48.86	48.75
10	0.0007	0.0010	0.0007	0.0010	48.91	48.71
11	0.0006	0.0008	0.0006	0.0008	48.93	48.69
12	0.0006	0.0009	0.0006	0.0009	48.95	48.72
13	0.0006	0.0007	0.0006	0.0007	48.71	48.79
14	0.0007	0.0006	0.0009	0.0006	48.76	48.80
15	0.0006	0.0007	0.0006	0.0007	48.69	49.42
16	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	48.62	49.44
17	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	48.63	48.71
18	0.0009	0.0009	0.0009	0.0009	48.55	48.95
19	0.0009	0.0010	0.0009	0.0010	48.87	48.86
20	0.0011	0.0012	0.0011	0.0012	48.92	49.22
21	0.0010	0.0011	0.0010	0.0011	49.63	48.79
22	0.0011	0.0012	0.0011	0.0012	49.67	48.60
23	0.0011	0.0013	0.0011	0.0013	49.51	49.17
24	0.0011	0.0014	0.0011	0.0014	49.44	48.83
25	0.0013	0.0014	0.0013	0.0014	48.79	48.97
26	0.0011	0.0012	0.0012	0.0012	48.01	48.52
27	0.0016	0.0016	0.0016	0.0016	47.97	48.83
28	0.0014	0.0015	0.0014	0.0015	46.40	48.12
29	0.0013	0.0014	0.0013	0.0014	47.73	47.52
30	0.0015	0.0018	0.0015	0.0018	48.13	47.65
31	0.0015	0.0014	0.0015	0.0014	48.15	47.10
32	0.0017	0.0017	0.0017	0.0017	48.07	47.68
33	0.0016	0.0015	0.0016	0.0015	48.32	47.90
34	0.0017	0.0018	0.0017	0.0018	48.48	47.61
35	0.0020	0.0021	0.0020	0.0021	48.45	47.37
36	0.0020	0.0022	0.0020	0.0022	49.04	47.11
37	0.0020	0.0019	0.0020	0.0019	48.55	46.93
38	0.0023	0.0027	0.0023	0.0027	48.07	46.64
39	0.0024	0.0022	0.0024	0.0022	47.96	47.24
40	0.0028	0.0029	0.0028	0.0029	48.05	46.41

表 2　我国妇女临界生育率

年　代	β_{cr}	β_1
1975	2.1600	2.2245
1978	2.1943	2.2639

参 考 文 献

[1] 钱学森、宋健，工程控制论，上册，(修订版)，科学出版社，(1980).
[2] 秦元勋，运动稳定性的一般问题讲义，科学出版社，(1958).
[3] 宋健、于景元，关于人口系统稳定性和妇女临界生育率的注记，科学通报，1980 年第 25 期.
[4] 宋健、于景元、李广元，人口发展过程的预测，中国科学，第 9 期，(1980).
[5] 宋 健、王浣尘、于景元、李广元，人口发展过程的控制和大系统结构，系统工程论文集，科学出版社，(1980).
[6] H. L. Langhaar, General Population Theory in the Age-Time Continuum, *J. of the Franklin Inst.*, 293(1973)3, 199—214.
[7] G. J. Olsder, & Strijbos, R. C. W., Population Plannig, Proceedings of 7th IFIP Conference, Sept. 8—14 (1975).
[8] N. Keyfitz, Introduction to the Mathematics of Population, Addion Wesley, (1968).
[9] D. R. Falkenburg. Optimal Control in Age-Dependent Population, Proceedings of J. A. C. C. (1973), 112—117.
[10] H. Kwakernaak, Application of Control Theory to Population Policy, New Trends in System Analysis, Edit. by A. Bensoussan and J. Lions, Springer-Verlarg, (1977).
[11] J. L. Lions, & E. Magenes, Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications, 1, Springer-Verlarg, (1972).
[12] E. Hill, & R. S., Phillips, Functional Analysis and Semi-groups, American Math. Soc. (1957).
[13] A. J. Coale, The Growth and Structure of Human Populations, A Mathematical Inverstigation, Princeton University Press, (1972).
[14] E. C. Pielou, Mathematical Ecology, John-Wiley (1977).
[15] Cho, Lee-jay The Own-children Approach to Fertility Estimation, An Elaboration, East-west Population Institute, Reprint No. 50, Honolulu, (1973).

ON STABILITY THEORY OF POPULATION SYSTEMS AND CRITICAL FERTILITY RATES OF WOMEN

SONG JIAN YU JINGYUAN

ABSTRACT

This paper discusses the topic on Lyapunov stability of the population evolution process. It is shown that whether population systems are described in the form of partial differential equation or difference equation, there exists a problem of stability. In the paper we have theoretically proved the existence of critical fertility rate of women, which makes population systems tending to the edge of stability. Also we have derived an explicit analytic expression for crictical fertility rates, thus concluding the conjecture and argument among populationists for decades. Critical fertility rates seem to be entirely determined by mortality functions, fertility patterns of women at their child-bearing ages and sex ratios of society population. The critical fertility at present stage in China is estimated to be 2.17. The results and conclusions provided in this paper can be used as reference for some countries and the U.N. to formulate their domestic or world population policies respectively.