第 6 卷 第 4 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 6, No. 4
1980 年 10 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Oct., 1980

单变量系统"内模原理"的频域方法*

王 恩 平
(中国科学院系统科学研究所控制理论研究室)

摘　　要

本文用频率法讨论了单输入-单输出结构无静差系统的性质，说明了内模原理的频率表现，给出了存在结构无静差补偿器的充要条件，提供了设计结构无静差补偿器的频率方法.

一、问题的叙述

W. M. Wonham 等人用状态空间方法研究了定常线性系统的结构无静差性质，提出了多变量系统的内模原理[1-4]，与此同时，E. J. Davison 等人用分析方法讨论了"Robust"调节器[4]. 其实，内模原理和"Robust"调节器理论本质上是一回事，都是为设计对干扰实现结构无静差的补偿器而提出的一种设计原则. 清华大学钱唯德比较了"Robust"调节器理论和完全不变性原理之间的一些关系[5]，说明了它们的一致性. 系统科学研究所韩京清给出了一种设计"Robust"调节器的频域方法，并提供了系统设计的计算方法[6]. 这些工作对我们从频域观点了解内模原理很有启发和帮助. 本文为了说明内模原理的频域表现，详细地研究了单输入-单输出系统的结构无静差性质，所得到的一般原则完全可以推广到多变量系统中去.

已知单输入-单输出定常线性系统 Σ_0，如图 1 所示，其开环传递函数为

$$W_0(s)=\frac{m_0(s)}{n_0(s)}$$

其中 $m_0(s)$、$n_0(s)$ 分别是 S 的多项式，并且 $n_0(s)$ 的首项系数为1. 假设 $\partial(n_0(s))=\alpha$、$\partial(m_0(s))=\beta$，$\alpha\geqslant\beta$，$\partial(\cdot)$ 表示多项式的次数. $u(s)$ 表示系统的控制输入，$f(s)$ 表示系统的干扰输入，$y_0(s)$ 表示给定的外部参考输入信号. 不失一般性，不妨假设 f 和 y_0 都满足下列微分方程

$$k(D)\,x(t)=0 \tag{1}$$

这里 D 表示微分算子，$k(D)$ 是 D 的首项系数为 1 的 k 次多项式，方程(1)的特征多项式为 $k(s)$，它的零点都在复平面的右半闭平面内，这说明外部干扰和参考输入信号的振型都是不稳定的.

我们的目的是希望设计一个如图 2 所示的闭环系统 Σ_c，其中

---

* 本文修改稿于 1980 年 5 月 29 日收到.

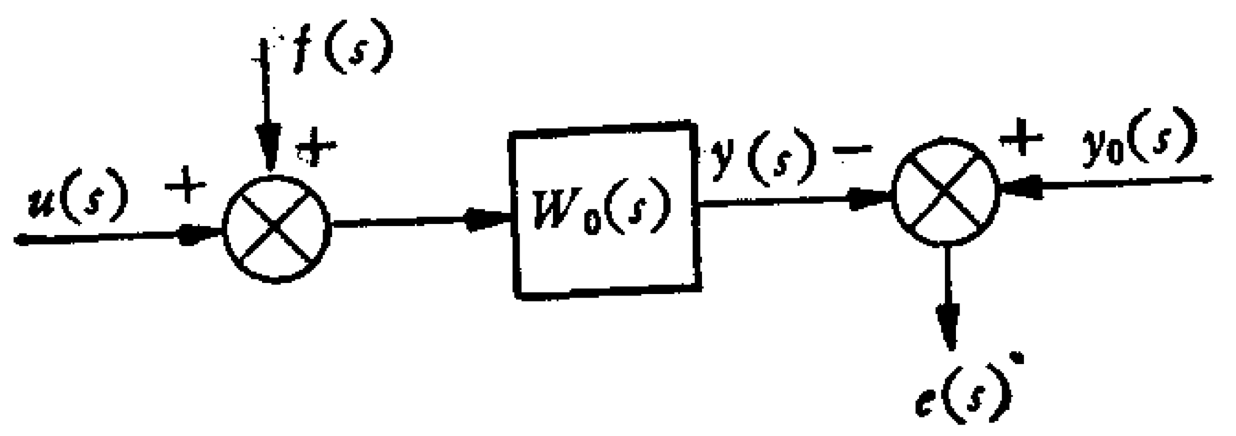

图 1 开环系统 Σ_0 的方块图

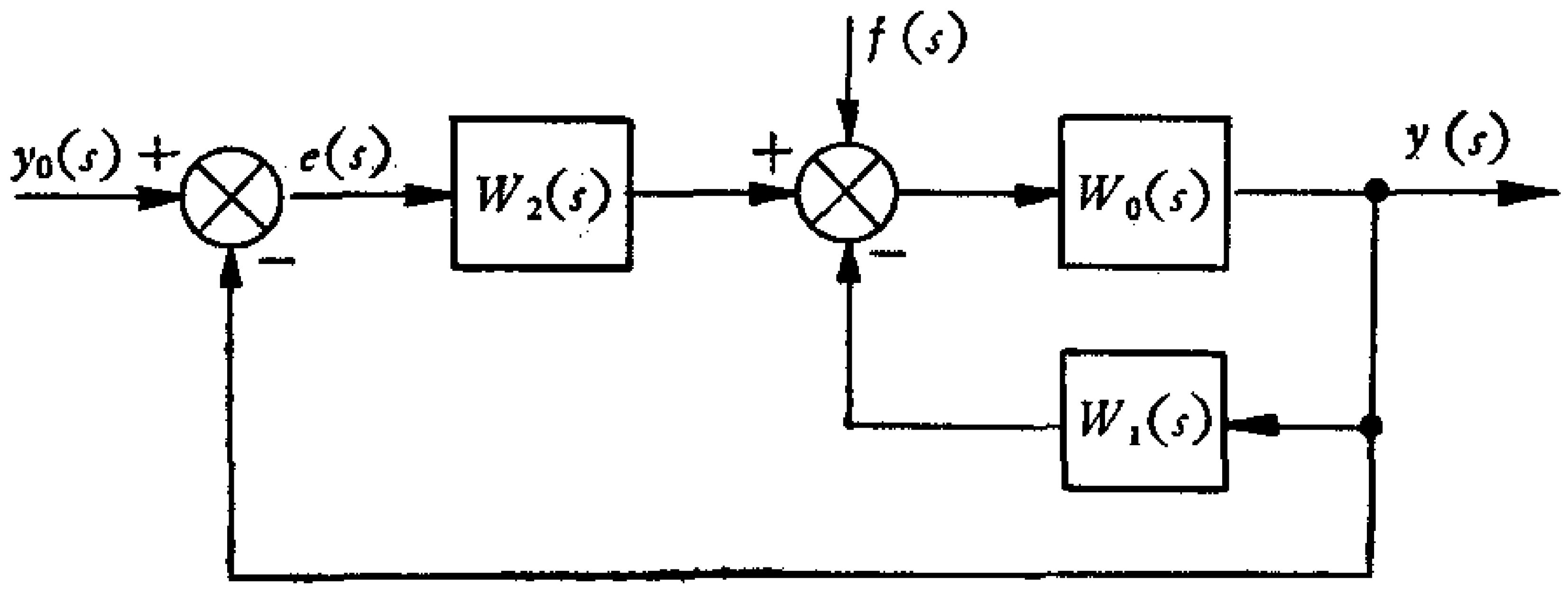

图 2 带有动态补偿器的闭环系统 Σ_c 的方块图

$$W_1(s)=\frac{m_1(s)}{n_1(s)}\qquad W_2(s)=\frac{m_2(s)}{n_2(s)}$$

是补偿器的传递函数，$n_1(s)$，$n_2(s)$，$m_1(s)$ 和$m_2(s)$ 都是 s 的多项式，$\partial(n_1(s))\geqslant\partial(m_1(s))$，$\partial(n_2(s))\geqslant\partial(m_2(s))$，使得

1）Σ_c 稳定，

2）对所有满足方程(1)的外部干扰 f 和参考输入信号 y_0 都有：

$$\lim_{t\to\infty} e(t)=0 \quad 这里，e(t)=y_0(t)-y(t).$$

通常，我们把使得闭环系统 Σ_c 具有上述两条性质的动态补偿器

$$u(s)=-W_1(s)\,y(s)+W_2(s)\,e(s) \tag{2}$$

叫做系统 Σ_0 的一个无静差补偿器.

如果我们把多项式 $m_0(s)$ 和 $n_0(s)$ 的系数按一定次序排成一个 $2+\partial(m_0(s))+\partial(n_0(s))$ 维矢量，记做 $p\{m_0\,n_0\}$，则称这个矢量为系统 Σ_0 的一个标称参数点. 当 $m_0(s)$ 和 $n_0(s)$ 的系数有微小摄动时，标称参数点 $p\{m_0\,n_0\}$ 也将发生微小变化. 如果在标称参数点 $p\{m_0\,n_0\}$ 处的某个邻域内的每个参数点上，动态补偿器(2)都是系统 Σ_0 的无静差补偿器，那么我们就把这个补偿器叫做系统 Σ_0 在标称参数点 $p\{m_0\,n_0\}$ 处的结构无静差补偿器，带有结构无静差补偿器的闭环系统 Σ_c 叫做结构无静差系统.

本文主要讨论如下三个问题：

1. 系统 Σ_0 在标称参数点 $p\{m_0\,n_0\}$ 处的结构无静差补偿器应该具有哪些结构特征；

2. 动态补偿器(2)具有哪些结构特征可以成为系统 Σ_0 在标称参数点 $p\{m_0\,n_0\}$ 处的结构无静差补偿器；

3. 开环系统 Σ_0 在标称参数点 $p\{m_0\,n_0\}$ 处存在结构无静差补偿器的充分必要条件.

二、内 模 原 理

在这一节我们回答前二个问题，从而得到内模原理的频率表现. 在频率域里讨论内模原理主要表现在下面的两个定理，在证明下述两个定理之前，我们先引进一些基本概念.

定义 1. 设 $m(s)$ 和 $n(s)$ 是两个多项式，并且 $\partial(n(s))\geqslant\partial(m(s))$，则

$$W(s)=\frac{m(s)}{n(s)}$$

表示一个物理能实现的传递函数. 如果 $m(s)$ 和 $n(s)$ 最多包含一个稳定的多项式公因

子，那么我们就说 $W(s)$ 没有不稳定相消，或者说 $m(s)$ 和 $n(s)$ 拟互质．所谓稳定的多项式是指其零点都在复平面的左半开平面内的多项式．

例如，$m(s)=(s+1)(s^2+s+1)$ $n(s)=(s+1)^2(s^3+2s+1)$ 那么它们的公因子为 $s+1$，这是一个稳定的多项式，所以依定义知

$$W(s)=\frac{(s+1)(s^2+s+1)}{(s+1)^2(s^3+2s+1)}$$

没有不稳定相消，或者说 $(s+1)(s^2+s+1)$ 与 $(s+1)^2(s^3+2s+1)$ 拟互质．

定义 2. 计算闭环系统 Σ_c 的特征多项式可以得出

$$n(s)=n_0(s)\,n_1(s)\,n_2(s)+m_0(s)\,m_2(s)\,n_1(s)+m_0(s)\,m_1(s)\,n_2(s)$$

如果 $\partial(n(s))=\sum_{i=0}^{2}\partial(n_i(s))$，那么我们就说闭环系统 Σ_c 是非退化的．

对于非退化的闭环系统 Σ_c 而言，如果它是稳定的，即 $n(s)$ 是稳定的多项式，那么在标称参数点 $p\{m_0\,n_0\}$ 处总存在某个邻域，使得闭环系统在这个邻域内的每个参数点上都是稳定的，但是这个邻域的大小不易得到定量的描述．

定理 1. (内模原理的必要条件)如果动态补偿器(2)是系统 Σ_0 在标称参数点 $p\{m_0\,n_0\}$ 处的一个结构无静差补偿器，那么 $k(s)$ 必是 $n_2(s)$ 的一个因子，并且 $W_0(s)$，$W_1(s)$ 和 $W_2(s)$ 没有不稳定相消．

证明： 从闭环系统 Σ_c 的方块图 2 可以得出

$$e(s)=\frac{n_0(s)n_1(s)+m_0(s)m_1(s)}{n(s)}n_2(s)y_0(s)-\frac{n_1(s)m_0(s)}{n(s)}n_2(s)\,f(s) \tag{3}$$

由于闭环系统稳定，因此 $n(s)$ 是稳定多项式．于是，$W_0(s)$、$W_1(s)$ 和 $W_2(s)$ 没有不稳定相消，否则与 $n(s)$ 是稳定多项式矛盾．

又因为 (2) 是系统 Σ_0 在标称参数点 $p\{m_0\,n_0\}$ 处的结构无静差补偿器，所以存在 $p\{m_0n_0\}$ 的某个邻域，使得在这个邻域内的每个参数点上闭环系统都是稳定的，并且对任意满足(1)的 f，y_0 都有 $\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=0$．在这个标称参数点的邻域内，我们选一组参数点 $p\{m_0'\,n_0'\}$，使得 $n_0'(s)\,n_1(s)+m_0'(s)m_1(s)$ 与 $k(s)$ 互质，这样的参数点总可以找到，因为使 $n_0'(s)n_1(s)+m_0'(s)m_1(s)$ 与 $k(s)$ 有公因子的参数点只有有限个．于是从等式(3)可以推知，对任意满足方程(2)的 y_0 都有

$$\lim_{t\to\infty}(n_0'(D)\,n_1(D)+m_0'(D)\,m_1(D))\,n_2(D)\,y_0(t)=0$$

从而 $k(s)$ 必是 $n_2(s)$ 的一个因子，这就证明了我们所要的结论．

附注1：定理 1 说明，如果(2)是开环系统 Σ_0 在标称参数点 $p\{m_0\,n_0\}$ 处的一个结构无静差补偿器，在 $W_2(s)$ 的分母多项式 $n_2(s)$ 中包含 $k(s)$ 的因子，即在补偿器的结构中包含了外部输入信号的全部振型，这就是所谓的内模原理．

附注 2：从定理 1 的证明可以看出，带有结构无静差补偿器的闭环系统零点包含了外部输入信号的全部极点．这说明，结构无静差系统是通过闭环系统的零点与外部输入信号的极点的零极相消作用实现抵消外部干扰和跟踪参考输入信号的．

附注 3：分析结构无静差补偿器 (2) 发现，它包含两个补偿器，一个是由传递函数

$W_1(s)$ 给出补偿器，另一个是由传递函数 $W_2(s)$ 决定的补偿器. 在 $W_2(s)$ 的分母多项式中包含了外部输入信号的全部振型，其作用是通过它来抵消外部干扰并跟踪参考输入信号，因此我们把这个补偿器叫伺服补偿器. 补偿器 $W_1(s)$ 的作用主要是使整个闭环系统稳定，我们把它叫镇定补偿器.

附注4：如果 f 和 y_0 分别满足方程

$$k_1(D)f(t)=0,\ k_2(D)y_0(t)=0$$

那么定理1的结论可改做 $n_2(s)$ 包含 $k_2(s)$ 因子，$n_1(s)n_2(s)$ 包含 $k_1(s)$ 的因子. 但是由于闭环系统稳定性的要求，$n_1(s)$ 与 $n_2(s)$ 没有公因子是 $k_1(s)$ 的因子.如果 $n_1(s)$ 与 $k_1(s)$ 互质，则 $n_2(s)$ 将以 $k_1(s)$ 和 $k_2(s)$ 的最低公倍式做为它的一个因子.

定理2（内模的充分条件）　假设在闭环系统 Σ_c 中，$n_2(s)$ 包含 $k(s)$ 的因子，则只要闭环系统稳定且非退化，补偿器（2）一定是系统 Σ_0 在标称参数点 $p\{m_0\,n_0\}$ 处的结构无静差补偿器.

证明：不失一般性，不妨假设 $y_0(s)=0$. 由于 f 满足方程(1)，因此必有常数 α 和多项式 $\beta(s)$ 使得

$$f(s)=\frac{\alpha\beta(s)}{k(s)}$$

这里 $\partial(k(s))>\partial(\beta(s))$. 由闭环系统方程(3)得出

$$e(s)=-\frac{n_1(s)\,n_2(s)\,m_0(s)}{n(s)}\cdot\frac{\alpha\beta(s)}{k(s)}$$

由于 $n_2(s)$ 包含 $k(s)$ 因子，因此存在多项式 $\bar{n}_2(s)$，使得 $n_2(s)=\bar{n}_2(s)k(s)$，于是

$$e(s)=-\frac{n_1(s)\bar{n}_2(s)m_0(s)\beta(s)}{n(s)}\cdot\alpha$$

再由 $n(s)$ 是稳定的多项式，故由终值定理知

$$\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}se(s)=0 \tag{4}$$

而这对任意常数 α 和 $\beta(s)$ 都对，这说明等式(4)对任意满足方程(2)的 f 都成立.

因为闭环系统 Σ_c 非退化，所以在标称参数点 $p\{m_0\,n_0\}$ 处存在某个邻域，使得闭环系统在这个邻域内的每个参数点上都是稳定的，从而都有等式(4)成立. 这就说明(2)是系统 Σ_0 在标称参数点 $p\{m_0\,n_0\}$ 处的一个结构无静差补偿器. 这就完成了定理的证明.

推论：如果(2)是系统 Σ_0 在标称参数点 $p\{m_0\,n_0\}$ 处的结构无静差补偿器，那么只要 Σ_c 非退化它也是在标称参数点 $p\{m_0\,n_0\,m_1\,n_1\,m_2\}$ 处的结构无静差补偿器.

三、结构无静差补偿器的存在性

在回答系统 Σ_0 存在结构无静差补偿器的问题的同时，我们将给出设计结构无静差补偿器的方法. 这主要表现在如下的定理：

定理3.　系统 Σ_0 在标称参数点 $p\{m_0\,n_0\}$ 处存在结构无静差补偿器的充分必要条件是：

1）$m_0(s)$ 与 $k(s)$ 互质，

2）$W_0(s)$ 没有不稳定相消.

证明：必要性，由定理 1 可直接得 $W_0(s)$ 没有不稳定相消，同时 $n_2(s)$ 包含 $k(s)$ 的因子，因此必有 $m_0(s)$ 与 $k(s)$ 互质，否则将与 $n(s)$ 是稳定的多项式矛盾.

充分性，在定理充分性的证明过程中，我们采用构造性的办法，直接给出一个在标称参数点 $p\{m_0 n_0\}$ 处的结构无静差补偿器，从而也就提供了我们设计结构无静差补偿器的一种方法.

（1）设计伺服补偿器

为此，我们取 $n_2(s)=k(s)$，$m_2(s)$ 与 $n_2(s)$ 互质，并且 $\partial(k(s))>\partial(m_2(s))$. 令

$$W_2(s)=\frac{m_2(s)}{k(s)}$$

（2）设计镇定补偿器

由于 $W_0(s)$ 没有不稳定相消，不妨假设 $m_0(s)$ 与 $n_0(s)$ 互质. 再由 $k(s)$ 与 $m_2(s)$ 互质，$m_0(s)$ 与 $k(s)$ 互质，可以推出 $n_0(s)k(s)+m_0(s)m_2(s)$ 与 $m_0(s)k(s)$ 互质.

现在我们主要选取多项式 $n_1(s)$ 和 $m_1(s)$，$\partial(n_1(s))\geqslant\partial(m_1(s))$，使得：

$$n(s)=n_1(s)[n_0(s)k(s)+m_0(s)m_2(s)]+m_1(s)m_0(s)k(s) \tag{5}$$

是一稳定的多项式，并且 $\partial(n(s))=\partial(n_0(s))+\partial(n_1(s))+\partial(k(s))$. 如果这样的多项式存在，那么我们取

$$W(s)=\frac{m_1(s)}{n_1(s)}$$

于是由定理 2 可知，补偿器

$$u(s)=W_2(s)e(s)-W_1(s)y(s)$$

是系统 Σ_0 在标称参数点 $p\{m_0 n_0\}$ 处的结构无静差补偿器. 依多项式理论可知满足等式(5)的多项式 $n_1(s)$ 和 $m_1(s)$ 是存在的，并且 $\partial(n_1(s))\geqslant\partial(m_1(s))$，用文献[7]中的办法可以找到，也可以采用其它办法，这里就不再赘述了.

举　　例

已知如图 3 所给出的开环系统，其中 $0<\zeta<1$，y_0 是一个外部参考输入信号，它满足方程

$$(D^2+\omega^2)y_0(t)=0$$

ω 为常数. 我们希望设计一个闭环伺服系统，使得它是结构无静差的. 现在我们用第三部份所提供的办法来解决这个问题.

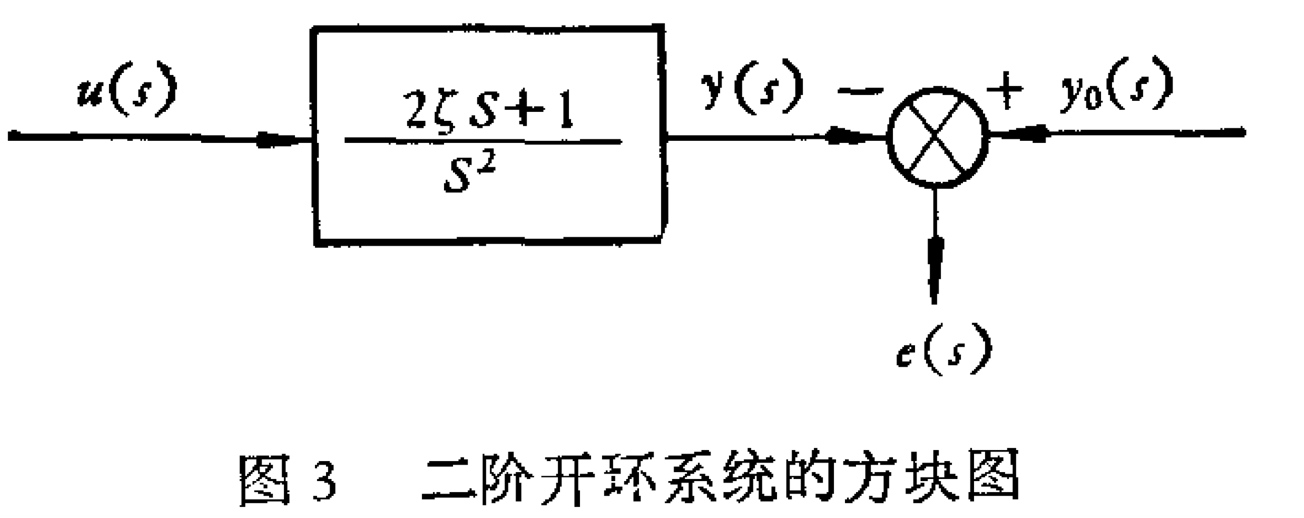

图 3　二阶开环系统的方块图

首先我们取伺服补偿器的传递函数为

$$W_2(s)=\frac{k_1 s+k_2}{s^2+\omega^2}$$

这里 k_1、k_2 都是实常数.

然后设计镇定补偿器. 显然，由图 3 可知 $m_0(s)=2\zeta s+1$，$n_0(s)=s^2$，而多项式 $n_0(s)\cdot(s^2+\omega^2)+m_0(s)(k_1 s+k_2)=s^4+(2\zeta k_1+\omega^2)s^2+(k_1+2\zeta k_2)s+k_2$ 与 $(s^2+\omega^2)m_0(s)=2\zeta s^3+s^2+2\zeta\omega^2 s+\omega^2$ 互质. 现在我们取多项式 $m_1(s)$ 和 $n_1(s)$ 满足：

① $\partial(n_1(s)) \geqslant \partial(m_1(s))$;

② 多项式

$$n(s) = n_1(s)\left[s^4 + (2\zeta k_1 + \omega^2)s^2 + (k_1 + 2\zeta k_2)s + k_2\right] + m_1(s)\left[2\zeta s^3 + s^2 + 2\zeta\omega^2 s + \omega^2\right]$$

是稳定的多项式;

③ $\partial(n(s)) = \partial(n_1(s)) + 4$.

为满足这些要求,不妨取 $n_1(s) = 1$, $m_1(s) = k$, 于是有:

$$n(s) = s^4 + 2\zeta k s^3 + (2\zeta k_1 + \omega^2 + k)s^2 + [k_1 + 2\zeta(k_2 + k\omega^2)]s + (k_2 + k\omega^2)$$

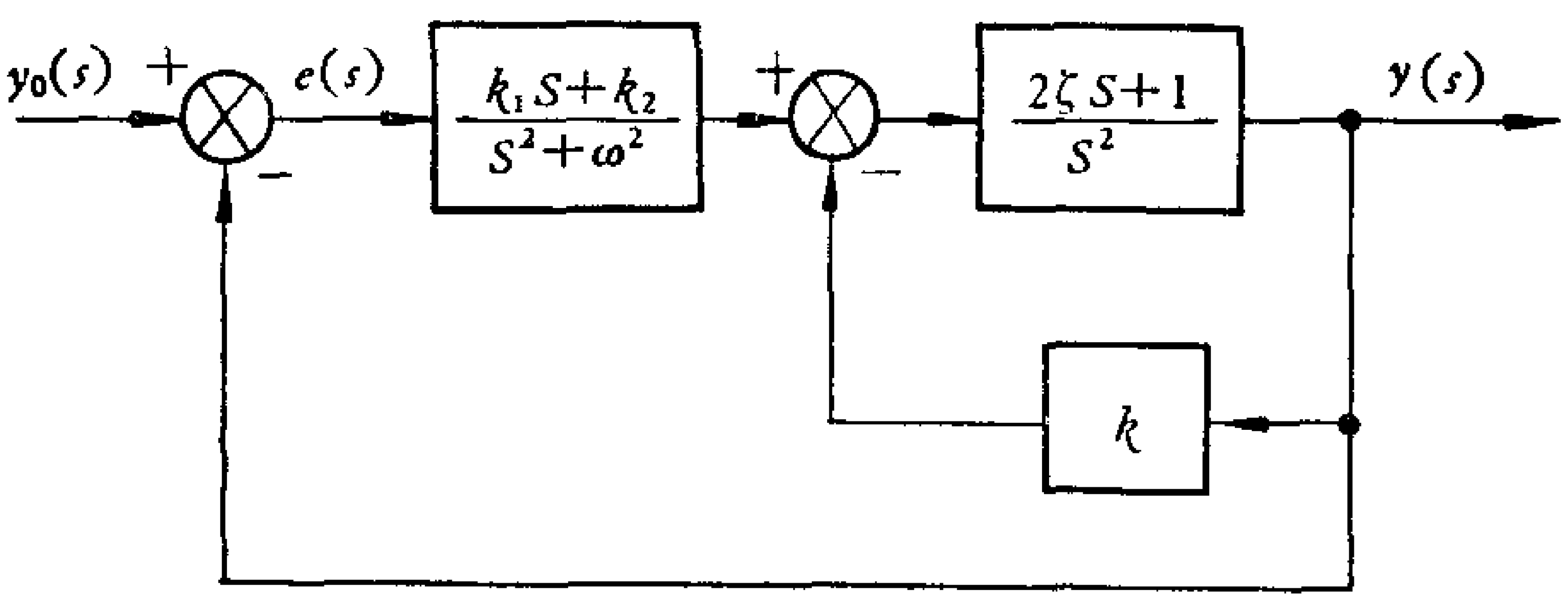

图 4 四阶闭环系统方块图

利用劳斯判据可以说明, 适当选取参数 k_1, k_2 和 k 总能保证 $n(s)$ 稳定,而 $\partial(n(s))=4$是显然的. 因此, 镇定补偿器的传递函数可取为

$$W_1(s) = k$$

这时我们设计的闭环系统方块图如图 4 所示.

参 考 文 献

[1] B. A. Francis and W. M. Wonham, The Internal Model Prinoiple of Control Theory, *Automatica*, 12(1976), 457—465.

[2] ——————, The Internal Model Principle for Linear Multivariable Regulators, *Applied Mathematics & Optimization*, 2(1975), 2, 170—194.

[3] ——————, The Role of Transmission Zeros in Linear Multivariable Regulators, *Int. J. Control*, 22(1975), 5, 657—681.

[4] E. J. Davison and A. Goldenberg, Robust Control of a General Servomechanism Priblem: The Servo Compensators, *Automatic* 11(1975), 5, 461—471.

[5] 钱唯德,完全不变性和 'Robust' 调节器间的一些关系,全国控制理论及其应用学术交流会论文集,科学出版社,待出.

[6] 韩京清,线性控制系统结构与反馈系统计算,全国控制理论及其应用学术交流会论文集,科学出版社,待出.

[7] W. A. Wolovich, Linear Multivariable Systems, Springer-Verlag, New York, (1974).

THE FREQUENCY METHODS OF "INTERNAL MODEL PRINCIPLE" OF SINGLE VARIABLE SYSTEMS

WANG EN-PING

(*Institute of Systems Science Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper, the properties of the single input-single output systems without steady structural error are discussed by frequency method. The internal model principle is given in the frequency domain and the necessary and sufficient condition for the existence of compensators without steady structural error are given. Design method of compensators without steady structural error is provided.