第 7 卷 第 2 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 7, No. 2
1981 年 4 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　April, 1981

闭环系统的极点配置*

许可康　韩京清
（中国科学院系统科学研究所）

摘　要

本文利用文献 [1, 2] 给出的完全能控系统的控制结构相伴标准形的特点，以及它与多项式矩阵的直接联系，给出了在状态反馈下，任意配置闭环系统极点的两种方法．状态反馈阵 K 是容易确定的．进一步，还给出了具有已给定结构形式的，并有指定的不变因子的多项式方阵的配置算法．上述这些方法，都便于在计算机上实现．

众所周知，对于完全能控系统，可以通过状态反馈，达到任意配置闭环系统极点的目的．

现设系统：

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \tag{1}$$

完全能控．其中，$\tilde{x} \in R^n$，$u \in R^m$．不失一般性，可设 Rank $\tilde{B} = m$．则可以把它化成控制结构相伴标准形[1,2]．同时，可给出状态变量的坐标变换阵 T 及其逆阵 T^{-1}．即经过：

$$\tilde{x} = Tx$$

系统 (1) 化为：

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2}$$

其中：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & (I_\nu 0) & & & \\ & 0 & (I_{\nu-1} 0) & & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & (I_2 0) \\ -A_\nu & -A_{\nu-1} & \cdots\cdots & & -A_1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ B_1 \end{bmatrix}$$

I_i 为 $n_i \times n_i$ 阶单位阵，A_i 为 $m \times n_i$ 阶阵．$i = 1, 2, \cdots, \nu$．B_1 为 $m \times m$ 阶非异阵．即该系统的控制结构指数为：

$$\{\nu;\ n_1, n_2, \cdots, n_\nu;\ 0\}$$

它们满足：

$$m = n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_\nu \geqslant 1$$
$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_\nu.$$

若对系统 (2)，找到了状态反馈阵 K，经变换后，

* 本文于 1980 年 7 月 1 日收到．

$$u = -Kx + v \tag{3}$$

使 $(A-BK)$ 具有任意预先给定的 n 个共轭双出现的特征值，则原系统(1)所需的反馈阵 $\tilde{K}$，可由下式：

$$\tilde{K} = KT^{-1} \tag{4}$$

得到. 因此，我们可以直接讨论具有控制结构相伴标准形的系统(2).

设预先给定的(共轭双)闭环极点集为

$$E = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} \tag{5}$$

其中

$$\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm \beta_1\sqrt{-1}, \quad \lambda_{3,4} = \alpha_2 \pm \beta_2\sqrt{-1}, \cdots, \quad \lambda_{2k-1,2k} = \alpha_k \pm \beta_k\sqrt{-1},$$
$$\lambda_{2k+1} = r_{2k+1}, \cdots, \lambda_n = r_n\alpha_i.$$

这里，α_i, $\beta_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 及 $r_j (j = 2k+1, \cdots, n)$ 均为实数，且 $\beta_i \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, k)$.

方法 1：对集(5)，我们可以构造 $n \times n$ 阶拟对角阵 A_λ，它的对角块是 2×2 阶的或 1×1 阶的. 它们分别为 $\begin{bmatrix} \alpha_i & 1 \\ -\beta_i^2 & \alpha_i \end{bmatrix}$ 或 $[r_j]$. 同时引入：

$$J = \begin{bmatrix} 0 & (I_\nu 0) & & & \\ & 0 & (I_{\nu-1} 0) & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & (I_2 0) \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

我们构造：

$$\bar{A} = A_\lambda \dotplus J \tag{7}$$

这里我们定义：$(\alpha_{ij}) \dotplus (\beta_{ij}) = (\alpha_{ij} \dotplus \beta_{ij})$. 而定义两个数之间的"$\dotplus$"运算为

$$\begin{cases} a \dotplus 0 = a \\ a \dotplus 1 = 1 \end{cases} \tag{8}$$

(因为这里阵 J 中的元素只有 0 与 1).

对系统：

$$\dot{y} = \bar{A}y + Bw \tag{9}$$

我们显然有：

引理：系统(9)的控制结构指数与系统(2)相同，即为：$\{\nu: n_1, n_2, \cdots, n_\nu; 0\}$，且(9)的极点集为(5).

于是，把(9)化成控制结构相伴标准形，其中，$\bar{A}$ 化为：

$$\bar{A}' = \begin{bmatrix} 0 & (I_\nu 0) & & & \\ & 0 & (I_{\nu-1} 0) & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & (I_2 0) \\ -\bar{A}_\nu & -\bar{A}_{\nu-1} & \cdots & \cdots & -\bar{A}_1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

则我们有：

定理 1. 对系统 (2)，$m \times n$ 阶阵

$$K = B_1^{-1}[\bar{A}_\nu - A_\nu \quad \bar{A}_{\nu-1} - A_{\nu-1} \cdots\cdots \bar{A}_1 - A_1] \tag{11}$$

是使闭环以 (5) 为极点集的状态反馈阵(证明见附录).

这里，由于 A_λ 的构造，我们易知反馈阵 K 不是唯一的．因此在保证极点配置的前提下，可以借助计算机选取某一反馈阵．使闭环具有比较满意的性能.

方法 2: 同样对集 (5)，我们可以把这 n 个数分成 m 个组 D_1、D_2、$\cdots$、D_m. 每个组 D_i 的个数为 d_i. 这里：

$$E_i = \{n_1 - i + 1,\ n_2 - i + 1,\ \cdots,\ n_\nu - i + 1\}$$

d_i 为集 E_i 中正整数的个数 $(i = 1, 2, \cdots, m)$，显然，有关系式：

$$\nu = d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_m \geqslant 1$$

$$n = d_1 + d_2 + \cdots + d_m.$$

为方便起见，尽可能把成对的共轭复数放在同一个组内．于是每一组 D_i，或者自己是共轭双的；或者与另一个 D_j 一起是成共轭双的.

对于同一组内的成对共轭复数及实数 λ_i，我们作它们一次因式 $(s - \lambda_i)$ 的乘积，分别得到首系数为 1 的多项式 $f_1(s)$、$f_2(s)$、$\cdots$、$f_m(s)$. 而

$$\partial(f_i(s)) = \begin{cases} d_i \\ d_i - 1 \end{cases}$$

若有某个 j，$\partial(f_j(s)) = d_j - 1$，则必有一个 k 存在，$\partial(f_k(s)) = d_k - 1$，且 D_j 与 D_k 的元合在一起是共轭双的．设 $\alpha + \beta\sqrt{-1} \in D_j$，$\alpha - \beta\sqrt{-1} \in D_k$.

下面，我们来构作 $m \times m$ 阶多项式矩阵 $P(s)$：$\partial(f_i(s)) = d_i$ 时，$P(s)$ 的第 i 列的对角线上置 $f_i(s)$，该列的其余元置零．而对上述情形的 j、k，则在第 j 列的对角线上置 $f_j(s) \cdot (s - \alpha)$，在第 k 列的对角线上置 $f_k(s) \cdot (s - \alpha)$，在第 j 行第 k 列上置 $f_k(s)$，在第 k 行第 j 列上置 $-\beta^2 f_j(s)$，而在该两列的其余元上置零.

对于这样构作的 $P(s)$，显然它是非异多项式阵：

$$\det P(s) = \prod_{l=1}^{n} (s - \lambda_l)$$

且 $P(s)$ 是列首一多项式阵[2]，它可表为：

$$P(s) = I \cdot \begin{pmatrix} s^{d_1} & & 0 \\ & s^{d_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & s^{d_m} \end{pmatrix} + \bar{\bar{A}}_1 \begin{pmatrix} s^{d_1-1} & & 0 \\ & s^{d_2-1} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & s^{d_{n_1}-1} \end{pmatrix} + \bar{\bar{A}}_2 \begin{pmatrix} s^{d_1-2} & & 0 & \\ & s^{d_2-2} & & \\ 0 & & \ddots & 0 \\ & & & s^{d_{n_2}-2} \end{pmatrix}$$

$$+ \cdots + \bar{\bar{A}}_{\nu-1} \begin{pmatrix} s^{d_1-\nu+1} & & \\ & \ddots \quad 0 & 0 \\ 0 & s^{d_{n_{\nu-1}}-\nu+1} & \end{pmatrix} + \bar{\bar{A}}_\nu (I_{n_\nu} 0) \tag{12}$$

即 $P(s)$ 的列首一系数阵为：

$$[\bar{\bar{A}}_\nu\ \bar{\bar{A}}_{\nu-1} \cdots\cdots \bar{\bar{A}}_1\ I]$$

于是，我们由系统的传递函数阵的结构特性[2]，有：

定理 2. 对具有控制结构指数 $\{\nu: n_1, n_2, \cdots, n_\nu; 0\}$ 的系统(2),

$$K = B_1^{-1}[\bar{\bar{A}}_\nu - A_\nu, \bar{\bar{A}}_{\nu-1} - A_{\nu-1}, \cdots \bar{\bar{A}}_1 - A_1] \tag{13}$$

是使闭环以集 E 的元为极点的状态反馈阵.

方法 2 实际上是配置一个列首一的 $m \times m$ 阶多项式阵 $P(s)$, 使

$$\partial_{l_j}(P(s)) = d_j \qquad j = 1, 2, \cdots, m$$

这里, $\partial_{l_j}(P(s))$ 表示 $P(s)$ 的第 i 列的列次[3]. 而

$$\det P(s) = \prod_{l=1}^{n}(s - \lambda_l).$$

实际上, 这一方法还可进一步推广: 设有 m 个首系数为 1 的多项式 $\phi_1(s)$、$\phi_2(s)$、$\cdots$、$\phi_m(s)$. 满足:

1) $\phi_m(s)|\phi_{m-1}(s)|\cdots|\phi_2(s)|\phi_1(s)$

2) $\sum_{j=i}^{m} k_j \leqslant \sum_{j=i}^{m} d_j \quad i = 2, 3, \cdots, m$

$$\sum_{j=1}^{m} k_j = \sum_{j=1}^{m} d_j$$

其中: $$k_j = \partial(\phi_j(s)) \quad j = 1, 2, \cdots, m$$

则我们有[4,5]:

定理 3. 可配置一个列首一的 $m \times m$ 阶多项式阵 $P(s)$, 使

$$\partial_{l_j}(P(s)) = d_j \quad j = 1, 2, \cdots, m$$

且 $P(s)$ 以 $\phi_m(s)$、$\phi_{m-1}(s)$、$\cdots$、$\phi_2(s)$、$\phi_1(s)$ 为其不变因子.

下面,我们给出具体配置的方法.

设: $$P(s) = (P_{ij}(s))$$

(1) 置: $P(s) = \mathrm{diag}\{\phi_1(s), \phi_2(s), \cdots, \phi_m(s)\}$; $l_i := k_i$, $i = 1, 2, \cdots, m$; $j := m$;

(2) 若: $j = 0$, 则转(10);

(3) 计算 $t = l_j - d_j$. 若 $t = 0$, 则 $j := j - 1$, 转(2);

(4) 置: $i := j - 1$;

(5) 计算 $w = l_i - d_i$. 若 $w \leqslant 0$, 则 $i := i - 1$, 转回(5);

(6) 置: $p_{ir}(s) := p_{ir}(s) + s \cdot p_{jr}(s)$, $r = i, i + 1, \cdots, m$. 这时, 设 $p_{ii}(s)$ 的 s^{l_i} 的系数为 β;

(7) 置: $p_{ri}(s) := p_{ri}(s) - \beta s^{l_i - l_j - 1} \cdot p_{rj}(s)$, $r = i, i + 1, \cdots, m$;

(8) 记:

$$\bar{P}_i(s) = \begin{bmatrix} p_{ii}(s) \cdots\cdots p_{im}(s) \\ p_{i+1i}(s) \cdots\cdots p_{i+1m}(s) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{mi}(s) \cdots\cdots p_{mm}(s) \end{bmatrix}$$

$$D = \Gamma_l(\bar{P}_i(s))$$

这里, $\Gamma_l(\bar{P}_i(s))$ 是 $\bar{P}_i(s)$ 的列次系数阵[3]. 置

$$P_i(s) := D^{-1} \cdot \bar{P}_i(s);$$

(9) 置 $l_j := l_j + 1$, $l_i := l_i - 1$, 转(3);

(10) 停止. 这时得到的 $P_i(s)$ 即为所求的多项式矩阵.

注意，这里第(6)、(7)中所乘的 s 及 $s^{l_i - l_j - 1}$，可以用首系数为1的 s 的一次及 $(l_i - l_j - 1)$ 次多项式代替，结论仍是正确的.

对于方法 1、2，我们举例如下.

例. 设有一完全能控系统

$$A = \left[\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ -A_3 & -A_2 & -A_1 \end{array}\right]$$

$$B = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & B_1 & & \end{array}\right], \ |B_1| \neq 0$$

即 $n = 8$, $m = n_1 = 4$, $n_2 = n_3 = 2$. 因此, $\nu = d_1 = d_2 = 3$, $d_3 = d_4 = 1$.

设:

$$E = \{1 \pm \sqrt{-1}, -1 \pm 2\sqrt{-1}, 2 \pm \sqrt{-1}, 2 \pm 2\sqrt{-1}\}$$

于是，可作任意一个 A_λ 如下:

$$A_\lambda = \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & & & & & & \\ -1 & 1 & & & & 0 & & \\ & & -1 & 1 & & & & \\ & & -4 & -1 & & & & \\ & & & & 2 & 1 & & \\ & & & & -1 & 2 & & \\ & 0 & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & & -4 & 2 \end{array}\right]$$

于是

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & & & & \\ -1 & 1 & 0 & 1 & & & 0 & \\ & & -1 & 1 & 1 & 0 & & \\ & & -4 & -1 & 0 & 1 & & \\ & & & & 2 & 1 & & \\ & & & & -1 & 2 & & \\ & 0 & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & & -4 & 2 \end{array}\right]$$

经适当相似变换后，可得:

$$\bar{A}'=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\-7&-5&7&-4&2&3&0&0\\-4&-10&13&7&-6&2&0&0\\0&0&0&0&0&0&2&1\\0&0&0&0&0&0&-4&2\end{bmatrix}$$

所以:

$$\bar{A}_1=\begin{pmatrix}-2&-3&0&0\\6&-2&0&0\\0&0&-2&-1\\0&0&4&-2\end{pmatrix}\quad \bar{A}_2=\begin{pmatrix}-7&4\\-13&-7\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\quad \bar{A}_3=\begin{pmatrix}7&5\\4&10\\0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

而对方法 2，若把 E 分为

$$D_1=\{1+\sqrt{-1},\ 1-\sqrt{-1},\ -1+2\sqrt{-1}\}\qquad D_3=\{2+2\sqrt{-1}\}$$

$$D_2=\{2+\sqrt{-1},\ 2-\sqrt{-1},\ -1-2\sqrt{-1}\}\qquad D_4=\{2-2\sqrt{-1}\}$$

则

$$f_1(s)=s^2-2s+2,\quad f_2(s)=s^2-4s+5,\quad f_3(s)=f_4(s)=1$$

而

$$P(s)=\begin{bmatrix}(s^2-2s+2)(s+1)&s^2-4s+5&0&0\\-4(s^2-2s+2)&(s^2-4s+5)(s+1)&0&0\\0&0&s-2&1\\0&0&-4&s-2\end{bmatrix}$$

所以

$$\bar{\bar{A}}_1=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\-4&-3&0&0\\0&0&-2&1\\0&0&-4&-2\end{pmatrix}\quad \bar{\bar{A}}_2=\begin{pmatrix}0&-4\\8&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\quad \bar{\bar{A}}_3=\begin{pmatrix}2&5\\-8&5\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

选(11)或(13)式，均可使闭环系统的极点，为数集 E 中的已给定的四对共轭复根.

附 录

定理 1 的证明:

经反馈后: $\boldsymbol{u}=-K\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}$

闭环系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=(A-BK)\boldsymbol{x}-B\boldsymbol{v}$$

闭环的极点为 $\det[sI-(A-BK)]=0$ 的根. 现在

$$A-BK=\bar{A}'$$

而 $\bar{A}'$ 与 $\bar{A}$ 相似，故

$$\det[sI-(A-BK)]=\det(sI-\bar{A}),$$

同时，由 $\tilde{A}$ 的构造知，它是与 A_λ 有相同对角块的拟上三角阵，故

$$\det(sI-\tilde{A})=\det(sI-A_\lambda)$$

因此

$$\det[sI-(A-BK)]=\det(sI-A_\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)$$

所以，闭环系统以式 (5) 表示的集 E 的元为极点。

参　考　文　献

[1] R. Yokoyama, E. Kinnen, Phase-variable canonical forms for multi-input, multi-output systems, *Int. J. Control*, **Vol. 17**, No. 6, pp. 1297—1312 (1973).
[2] 韩京清，线性控制系统的结构和反馈系统计算〈1979 年全国控制理论厦门会议论文集〉，科学出版社待出.
[3] W. A. Wolovich, Linear multivariable systems, Springer (1974).
[4] H. H. Rosenbrock, State-space and Multivariable Theory, Nelson (1970).

POLE ASSIGNMENT OF THE CLOSED LOOP SYSTEM

XU KEKANG　AND　HAN JINGQING
(Institute of Systems Science, Academia Sinica)

Abstract

This paper presents two methods of arbitrarily assigning the poles of the closed loop system under state feedback, using characteristics of structure companion canonical form of the complete controllable system and its direct connection with the polynomial matrix given by [1, 2]. The state feedback matrix K si easily defined. Further, the assignment algorithm of the polynomial square matrix with given structure form and indicated invariant factor is presented. These methods are easily implemented on a computer.