第 7 卷　第 1 期
1981 年 1 月

自　动　化　学　报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 7, No. 1
Jan., 1981

研究简报

# 解非串并联系统可靠性最优化问题的一个简捷算法

廖　炯　生
（北京控制工程研究所）

**摘　　要**

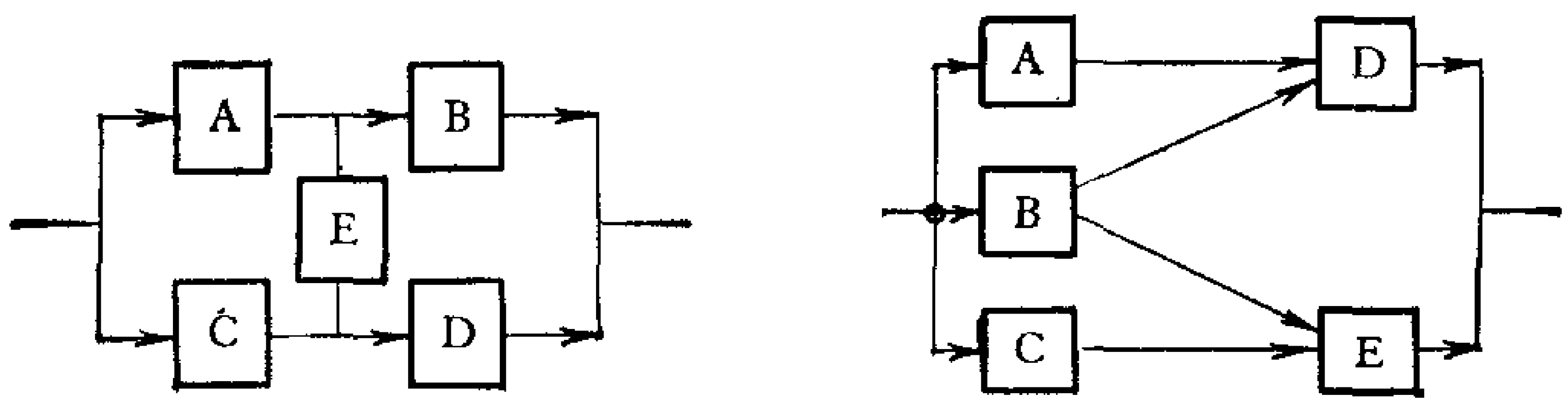
本文分析了非串并联的桥式网络和混联网络在最佳冗余分配方面的特点，提出了以桥式和混联网络作为典型环节的复杂系统可靠性最优化问题的简化原则，并推广应用文献[1]的简捷算法来解复杂系统可靠性最优化问题.

在非串并联的复杂系统可靠性最优化问题中，鉴于严格解法和一些近似解法计算都很繁复，因而人们寻求比较简单的解法. 例如 K. K. Aggarwal 和 F. A. Tillman 等人各自提出了解复杂系统可靠性最优化问题的直接寻查法.

本文建议：对于复杂系统，在采用路径枚举法[2]求得最小路径集和系统可靠性表达式的基础上，考虑其结构特点，对其最佳冗余问题引入某些简化，并推广应用文献[1]的简捷算法来求解. 这比现有的方法更简单.

## 一、桥式网络和混联网络最佳冗余的特点

复杂系统的典型环节是图 1 所示的桥式网络和混联网络.




(a)　　(b)

图　1

桥式网络的最小路径集包含：$AB$, $CD$, $AED$, $CEB$. 其系统可靠性表达式为（$p$ 为单元可靠性）：

---

本文曾在中国电子学会电子产品可靠性与质量管理专业学会 1980 年可靠性数学讨论会上宣读. 修改稿于 1980 年 4 月 3 日收到.

$$R_S = p_Ap_B + p_Cp_D + p_Ap_Dp_E + p_Bp_Cp_E - p_Ap_Bp_Cp_D - p_Ap_Bp_Dp_E - p_Ap_Cp_Dp_E - p_Ap_Bp_Cp_E - p_Bp_Cp_Dp_E + 2p_Ap_Bp_Cp_Dp_E \tag{1}$$

R. B. Misra 等人在"桥式网络最佳冗余的特点"一文中指出[3]，由于 $\partial R_S/\partial p_A$，$\partial R_S/\partial p_B$，$\partial R_S/\partial p_C$，$\partial R_S/\partial p_D$ 中都有起主要作用的一阶项，而 $\partial R_S/\partial p_E$ 中没有一阶项；一般来说，$p_B$，$p_C$ 等一阶项大于 $p_Ap_D$ 等二阶项，故 $\partial R_S/\partial p_E$ 最小．因而在桥式网络最佳冗余分配中，单元 $E$ 的作用可以忽略．

文献[3]所举理由还是比较肤浅的．如在 $p_Ap_D > p_B$，$p_C$，$p_E$ 的特殊情况下，又如何？设 $p_A = p_D = 0.9$，$p_B = p_C = 0.8$，$p_E = 0.6$，由(1)式取偏导数算出，$\partial R_S/\partial p_E$ 仍然远远小于其它四个偏导数．这个结果和直观概念认为 $p_E$ 最小应当冗余效果最大的想法是相反的．

所以，桥式网络的结构特点决定：冗余元件只应加在"最低阶"的最小路径各单元 $A$，$B$，$C$，$D$ 处，使系统可靠性的改进为最大．处于"高阶"最小路径上的单元 $E$ 可以不顾．

对于图 1，$b$ 混联网络，其可靠性表达式为：

$$R_S = p_Ap_D + p_Bp_D + p_Bp_E + p_Cp_E - p_Ap_Bp_D - p_Bp_Dp_E - p_Bp_Cp_E - p_Ap_Cp_Dp_E + p_Ap_Bp_Cp_Dp_E \tag{2}$$

其最小路径集为：$AD$，$BD$，$BE$，$CE$，都是二阶的．但我们指出，其中单元 $B$，$D$，$E$ 出现次数最多，冗余元件只加于 $B$，$D$，$E$，则 $R_S$ 改进最大．

(2) 式取偏导数可见，$\partial R_S/\partial p_B$，$\partial R_S/\partial p_D$，$\partial R_S/\partial p_E$ 中各有二个一阶项，而 $\partial R_S/\partial p_A$，$\partial R_S/\partial p_C$ 中仅有一个一阶项．一般来说 $p_A + p_B$，$p_C + p_B$，$p_D + p_E > p_D$，$p_E > p_Bp_E, \cdots$；所以 $\partial R_S/\partial p_A$，$\partial R_S/\partial p_C$ 较小，即单元 $A$，$C$ 加冗余的效果较小．

在 $p_D$，$p_E \geqslant p_A + p_B$，$p_C + p_B$ 的特殊情况下，设 $p_D = p_E = 0.9$，$p_B = 0.6$，$p_A = p_C = 0.3$（实际 $p < 0.5$ 极少用）；进行计算得出，$\partial R_S/\partial p_B$ 远远大于其它各个偏导数．如在单元 $B$ 加适当冗余，将引起各偏导数改变，其中 $\partial R_S/\partial p_A$，$\partial R_S/\partial p_C$ 为最小．

所以，混联网络的结构特点决定：把冗余元件只加在阶次最低的诸最小路径中出现次数最多的单元 $B$，$D$，$E$ 是适当的．

我们把上述二点最佳冗余的简化原则推广应用于以桥式和混联网络为典型环节的非串并联复杂系统．

## 二、复杂系统可靠性最优化问题的解法

**问题**：非串并联的复杂系统可靠性为

$$R_S = f(R_1, R_2, \cdots, R_k) \tag{3}$$

其中第 $i$ 个单元的可靠性为 $R_i$，不可靠性为 $Q_i$，

$$Q_i = 1 - R_i = q_i^{n_i} \tag{4}$$

即此单元采用 $n_i$ 个统计独立的、不可靠性同为 $q_i$ 的元件作并联冗余．现要求选择 $n = \{n_1, n_2, \cdots, n_k\}$，在约束条件(5)之下使 $R_S$ 取最大值．

$$\sum_{i=1}^{k} g_{ij} \leqslant G_j,\ j = 1, 2, \cdots, r \tag{5}$$

**解法：**

第一部分，用路径枚举法求出复杂系统的最小路径集及其系统可靠性表达式。并应用上述最佳冗余的简化原则，只考虑阶次最低的诸最小路径中重复出现次数最多的各单元加冗余，使整个系统可靠性的改进为最大。

第二部分，推广应用文献[1]在优选法的分批试验法基础上提出的简捷算法，求阶次最低的诸最小路径中重复出现次数最多的诸单元的最佳冗余元件数。用以上解法所得结果一般是最优解。具体步骤详见文献[1]。

这里只补充指出一点：文献[1]简捷算法采用平分法分批，蕴含了一个前提，即 $q_{i\max} < 0.5$。而可靠性小于 0.5 的元件实际情况是不用的。

## 三、举　　例

**例一**、求图 1、$b$ 混联网络最佳冗余分配，条件列于表 1：

表　1

| 单元序号 $i$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 元件不可靠性 $q_i$ | 0.3 | 0.15 | 0.25 | 0.20 | 0.10 |
| 单　　价 $c_i$ | 2 | 3 | 2 | 3 | 4 |
| 约束条件 | $\sum_{i=1}^{5} n_i c_i \leqslant 30$ | | | | |

按上述办法，不考虑单元 $A, C$ 的冗余，用简捷算法求得最优解为 (1，3，1，3，2) 按(2)式算出 $R_S = 0.99971$。本题的六种冗余方案及相应 $R_S$ 值列于表 2 作比较。

表　2

| $n_A$ | $n_B$ | $n_C$ | $n_D$ | $n_E$ | $\Sigma n_i c_i$ | $R_S$ | 冗余配置 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 30 | 0.99946 | $A$、$B$、$C$、$D$、$E$ |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 30 | 0.99633 | $A$、$B$、$C$、$D$ |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 30 | 0.99971* | $B$、$D$、$E$ |
| 1 | 4 | 1 | 3 | 1 | 29 | 0.99915 | $B$、$D$ |
| 1 | 5 | 1 | 1 | 2 | 30 | 0.99877 | $B$、$E$ |
| 1 | 1 | 1 | 5 | 2 | 30 | 0.98840 | $D$、$E$ |

**例二**、求图 2 复杂系统的最佳冗余元件数。

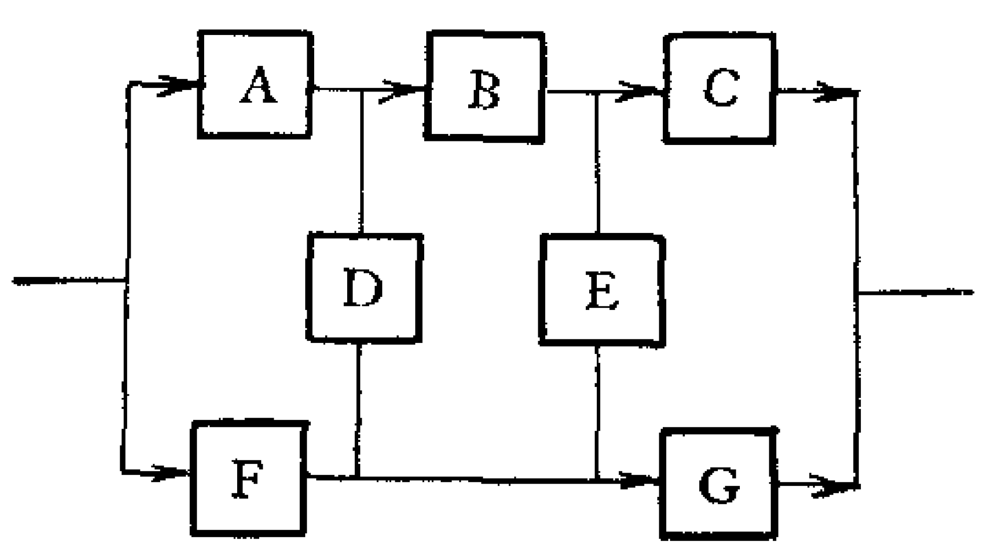



图　2

其条件列于表 3：

表 3

| 单元序号 $i$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 元件不可靠性 $q_i$ | 0.3 | 0.15 | 0.25 | 0.3 | 0.25 | 0.20 | 0.10 |
| 单　　价 $c_i$ | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 约 束 条 件 | $\sum_{i=1}^{7} n_i c_i \leqslant 30$ | | | | | | |

解：第一步应用路径枚举法求出最小路径集

$$ABC,\ ADG,\ ABEG,\ ADEC,\ FDBC,\ FEC,\ FG.$$

其中最小路径 $FG$ 阶次最低，按本文办法只在 $FG$ 加冗余．系统可靠性表达式为：

$$\begin{aligned}R_S = {} & p_A p_B p_C + p_A p_C p_D p_E + p_A p_D p_G + p_A p_B p_E p_G + p_C p_E p_F + p_B p_C p_D p_F + p_F p_G - p_A p_D p_F p_G \\ & - p_C p_E p_F p_G - p_A p_B p_E p_F p_G - p_A p_B p_C p_F p_G - p_A p_B p_C p_D p_G - p_A p_B p_C p_E p_G - p_A p_C p_D p_E p_G \\ & - p_B p_C p_D p_F p_G - p_A p_B p_D p_E p_G - p_A p_B p_C p_D p_F - p_A p_B p_C p_E p_F - p_A p_B p_C p_D p_E - p_B p_C p_D p_E p_F \\ & - p_A p_C p_D p_E p_F + 2 p_A p_B p_C p_D p_E p_F + 2 p_A p_B p_C p_D p_F p_G + 2 p_A p_B p_C p_E p_F p_G + 2 p_A p_B p_C p_D p_E p_G \\ & + p_A p_B p_D p_E p_F p_G + p_B p_C p_D p_E p_F p_G + p_A p_C p_D p_E p_F p_G - 3 p_A p_B p_C p_D p_E p_F p_G \end{aligned} \tag{6}$$

第二步用简捷算法求最佳冗余元件数，结果列于表 4：

表 4

| $n_A$ 至 $n_E$ | $n_F$ | $n_G$ | $Q_A$ 至 $Q_E$ | $Q_F$ | $Q_G$ | $\Sigma n_i c_i$ | $Q_i$ 界限 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 各 1 | 1 | 1 | 同表 3 $q_A$ 至 $q_E$ | 0.2 | 0.1 | 18 | $\geqslant 0.1$ |
| ↑ | 2 | 2 | ↑ | 0.04 | 0.01 | 25 | $\geqslant 0.05$ |
| | 2 | 2 | | 0.04 | 0.01 | 25 | $\geqslant 0.025$ |
| 不变 | 3 | 2 | 不变 | 0.008 | 0.01 | 28 | $\geqslant 0.0125$ |
| | 3 | 2 | | 0.008 | 0.01 | 28 | $\geqslant 0.00625$ |
| | 4 | 3 | | 0.0016 | 0.001 | 35 | $<0.00938$ |
| | 3 | 3 | | 0.008 | 0.001 | 32 | $<0.01094$ |
| ↓ | 3 | 2 | ↓ | 0.008 | 0.01 | 28 | |

最优解为 (1, 1, 1, 1, 1, 3, 2)，按 (6) 式得　$R_S = 0.994037$.

对于例二这样复杂系统，计算 $R_S$ 较繁，但用简捷算法求其最佳冗余还是简便的．

## 考 参 文 献


[1] 廖炯生：用优选法解系统可靠性最优化问题的一个简捷算法，自动化学报，第 6 卷，第一期，1980 年．

[2] K. K. Aggarwal, K. B. Misra, and J. S. Gupta, Reliability evaluation. A comparative study of different techniques, *Microelectronics and Reliability*, **14** (1975), 49—56.

[3] R. B. Misra, G. Agnihotri, Peculiarity in Optimal Redundancy for a Bridge Network, *Trans. IEEE*, V. R—**28** (1979), No. 1, 70—72.


# A SIMPLIFIED HEURISTIC ALGORITHM FOR RELIABILITY OPTIMIZATION IN NON-SERIES-PARALLEL SYSTEMS


Liao Jiongsheng

*(Beijing Institute of Control Engineering)*