第7卷 第3期 自动化学报 Vol. 7, No. 3
1981年7月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1981

线性控制系统最经济结构综合的代数方法

陈兆宽 张荣祥
（山东大学） （山东工学院）

摘 要

本文用代数方法给出了文[1]所提出的线性控制系统最经济结构综合问题的一般解法和计算实例．从理论上讨论了最经济结构综合解的各种存在性问题和解的结构．并对控制向量个数限定的情形给出了一般解法．对于实际工程中的最经济结构综合用本文所提出的方法求解较为简便．

一、问题的提法

文[1]提出了线性控制系统最经济结构综合问题．本文试图在一般情况下给出这个问题的代数解法．文[1]最经济结构综合问题的提法如下：

设线性定常系统的状态方程和量测方程为

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} \tag{1.2}$$

式中：

$\boldsymbol{x}$——n 维状态矢量；　$\boldsymbol{u}$——r 维输入矢量；

$\boldsymbol{y}$——m 维输出矢量；　A——$n \times n$ 状态矩阵；

B——$n \times r$ 控制矩阵；　C——$m \times n$ 测量矩阵．

设给定状态矩阵 A，要求综合出控制矩阵 B，量测矩阵 C，在保证系统(1.1)，(1.2)完全能控与完全能观的条件下，使矩阵 B（或 C）中不为零的元素的数目为最少．

以下仅讨论控制机构的最经济结构综合问题．因为由对偶性原理可以类似地得到量测装置的最经济结构综合问题的解(以下简称综合解)，故不赘述．

二、综合解的存在性问题及其结构

综合解的存在性是显然的，因为当 $B=I_n$ 时(这里 I_n 是 $n \times n$ 单位矩阵)，则 $[A, I_n]$ 构成完全能控对，I_n 的非零元的个数为 n．如果把非零元个数相等且与 A 构成完全能控对的矩阵 B 的全体组成一类，于是非零元个数小于 n 的类只有有限多个．在这有限多个类中一定存在这样一个类，即其非零元为最少，它的每一成员都是综合解．

本文于1980年7月31日收到．

为了进一步讨论综合解的结构,我们引进所谓"每列单非零元的矩阵 B 的概念",即矩阵 B 的每个列向量只有一个非零元且无相同的列.

系统(1.1)在保证完全能控条件下的最少输入向量数等于矩阵 A 的循环指数,设其为 α_1,又设综合解的最少非零元个数为 t_1,那么当输入的列数 r 等于 α_1 与 t_1 之间的任一整数时,是否存在综合解呢?回答是肯定的. 有如下的几个引理和定理.

引理 2.1. 设矩阵 B 是综合解,则 B 的每一个行向量上最多只能有一个非零元.

限于篇幅,证明从略.

定理 2.1. 在每列单非零元的矩阵 B 的全体中,至少存在一个综合解.

证明: 设矩阵

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots b_{1r} \\ b_{21} & b_{22}\cdots b_{2r} \\ \cdots & \cdots\ \cdots \\ b_{n1} & b_{n2}\cdots b_{nr} \end{bmatrix}$$

为综合解,则由引理 2.1 可知,B 的每一个行向量上最多只能有一个非零元. 令:

$$b_1'=[b_{11},0,\cdots;0]^T,\cdots,\quad b_1^{(n)}=[0,\cdots,b_{n1}]^T;$$
$$b_2'=[b_{12},0,\cdots,0]^T,\cdots,\quad b_2^{(n)}=[0,\cdots,b_{n2}]^T;$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$b_r'=[b_{1r};0,\cdots,0]^T,\cdots,\quad b_r^{(n)}=[0,\cdots,b_{nr}]^T.$$

若引入矩阵

$$B'=[b_1',b_1'',\cdots,b_1^{(n)};\cdots;b_r',b_r'',\cdots,b_r^{(n)}],$$

则可以证明:

$$\operatorname{rank}[B\vdots AB\vdots\cdots\vdots A^{n-1}B]\leqslant\operatorname{rank}[B'\vdots AB'\vdots\cdots\vdots A^{n-1}B'],$$

但是 $$\operatorname{rank}[B\vdots AB\vdots\cdots\vdots A^{n-1}B]=n.$$

所以, $$\operatorname{rank}[B'\vdots AB'\vdots\cdots\vdots A^{n-1}B']=n.$$

因而矩阵对 $[A,B']$ 也构成完全能控对. 注意:矩阵 B' 中有些向量是零向量. 若将矩阵 B' 中的所有零向量去掉,而把非零向量保留下来,令这个矩阵为 B'',则矩阵对 $[A,B'']$ 也构成完全能控对. 从上面的作法可知,矩阵 B'' 的每一个列向量都是单非零元向量. 由引理 2.1 知,这些列向量都是不同的列向量,所以矩阵 B'' 是每列单非零元的矩阵,它的非零元个数与矩阵 B 的一样多,从而它也是综合解. 定理 2.1 证毕.

引理 2.2. 设 B 是综合解,则 B 的每一个列向量乘以不同的非零实数所得的矩阵,仍是综合解.

这是显然的,故证明从略.

由于引理 2.2,在每列单非零元的综合解中,我们最感兴趣的是非零元均为 1 的综合解.

设方程 (1.1) 中的矩阵 A 经满秩相似变换 T 化成如下的 Jordan 标准形:

$$\left.\begin{aligned} T^{-1}AT&=J=\operatorname{diag}\{J_1,J_2,\cdots J_\sigma\}_{n\times n}\\ T^{-1}B&=\widetilde{B}=[\widetilde{B}_1^T\vdots\widetilde{B}_2^T\vdots\cdots\vdots\widetilde{B}_\sigma^T]_{n\times r}^T \end{aligned}\right\},\tag{2.1}$$

$$\left.\begin{array}{l} J_j = \mathrm{diag}\{J_{j1}, J_{j2}, \cdots, J_{j\alpha_j}\}_{m_j\times m_j} \\ \widetilde{B}_j = [\widetilde{B}_{j1}^T \vdots \widetilde{B}_{j2}^T \vdots \cdots \vdots \widetilde{B}_{j\alpha_j}^T]_{m_j\times r}^T \end{array}\right\}. \tag{2.2}$$

J_{jk} 是相应于同一特征值 λ_j 的小子块.

令 $\widetilde{B}_{jk}$ 的最下行为 β_{jk}，则由文献[3]知,线性定常系统完全能控的充要条件是:

$$\mathrm{rank}[\beta_{j1}^T \vdots \beta_{j2}^T \vdots \cdots \vdots \beta_{j\alpha_j}^T]^T = \alpha_j, \qquad j = 1, 2, \cdots \sigma, \tag{2.3}$$

若将(2.3)式的矩阵展开,得如下的矩阵组:

$$\begin{bmatrix} t_{j1,1}b_{11} + \cdots + t_{j1,n}b_{n1}; & \cdots; & t_{j1,1}b_{1r} + \cdots + t_{j1,n}b_{nr} \\ t_{j2,1}b_{11} + \cdots + t_{j2,n}b_{n1}; & \cdots; & t_{j2,1}b_{1r} + \cdots + t_{j2,n}b_{nr} \\ \cdots\quad\cdots & \cdots & \cdots\quad\cdots \\ t_{j\alpha_j,1}b_{11} + \cdots + t_{j\alpha_j,n}b_{n1}; & \cdots; & t_{j\alpha_j,1}b_{1r} + \cdots + t_{j\alpha_j,n}b_{nr} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

其中:　　$j = 1, 2, \cdots, \sigma.$

则这个矩阵的秩为 $\alpha_j(j = 1, 2, \cdots, \sigma)$.

注 2.1：在 Jordan 块的排列中,取:

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_\sigma. \tag{2.5}$$

其中 α_1 为矩阵 A 的循环指数.

首先考察矩阵组(2.4)的结构,它们的每一行的元素都是由 T^{-1} 阵的某一行（它与 J_{jk} 的最后一行的标号相应）分别乘控制矩阵 B 的诸列向量后得到的. 因此为了求每列单非零元的综合解,应考察如下的矩阵组:

$$\begin{bmatrix} t_{j1,1}, t_{j1,2}, \cdots, t_{j1,n} \\ t_{j2,1}, t_{j2,2}, \cdots, t_{j2,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_{j\alpha_j,1}, t_{j\alpha_j,2}, \cdots, t_{j\alpha_j,n} \end{bmatrix}, \qquad j = 1, 2, \cdots, \sigma, \tag{2.6}$$

并且对于每一个 j，矩阵组(2.6)中至少存在一个 α_j 阶非零行列式 ($j = 1, 2, \cdots, \sigma$)，为此有如下的定理.

定理 2.2. 设 B 是每列单非零元的矩阵,为了使得 B 是综合解，必要且充分的条件是在矩阵组 (2.6) 中能找出满足如下条件的最少列,使得在矩阵组(2.6) 中分别能找出 α_j 阶非零行列式,这个最少列数正好等于矩阵 B 的非零元的个数,而且列的位置与矩阵 B 的非零元所在行相对应.

充分性的证明：设定理中所述的最少列数为 $\alpha_1 + k_1$，α_1 为矩阵 A 的循环指数，k_1 满足:

$$0 \leqslant k_1 \leqslant \sum_{j=2}^{\sigma} \alpha_j, \tag{2.7}$$

并设所占列的编号为：$i_1, i_2, \cdots, i_{\alpha_1+k_1}$.

令矩阵 B 为:

$$B=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} b_1 & \cdots & b_j & \cdots & b_{\alpha_1+k_1}\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccc}
0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0\\
\vdots & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot\\
\vdots & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot\\
\vdots & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot\\
\vdots & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot\\
1 & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot\\
\vdots & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot & \cdot & 1\\
\vdots & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot & \cdot & 0\\
\vdots & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots\\
0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0
\end{array}\right]\end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i_j \text{ 行}\\ \text{第 } i_1 \text{ 行}\\ \\ \\ \\ \text{第 } i_{\alpha_1+k_1} \text{ 行}\\ \\ \\ \\ \end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{array}}\right\} n, \tag{2.8}$$

将(2.8)式的诸列向量代入矩阵组 (2.4)中，于是正好得到在定理中所述的矩阵组 (2.6) 的最少列：$i_1, i_2, \cdots, i_{\alpha_1+k_1}$. 由定理的假设知，在这些列中，矩阵组(2.6)对 $j=1, 2, \cdots\sigma$ 都各有一个 α_j 阶非零行列式，因此对于(2.8)的矩阵 B，(2.3) 式满足，即它与 A 组成完全能控对. 我们再证明不存在小于 α_1+k_1 列的最经济的每列单非零元的矩阵 B. 否则，则将这个矩阵的诸列向量分别代入矩阵组(2.4)中，就得到小于 α_1+k_1 个列. 由完全能控性知，在它们中矩阵组 (2.6) 分别能找出 α_j 阶非零行列式 ($j=1, 2, \cdots\sigma$)，这与定理的假设相矛盾. 充分性证毕.

必要性的证明：设矩阵 (2.8) 是综合解，下面证明第 i_1 列，第 i_2 列，……，第 $i_{\alpha_1+k_1}$ 列即为满足定理要求的最少列. 否则，存在列数比 α_1+k_1 少的 r 个列向量为满足定理条件的最少列. 与充分性的证明过程相类似，可以构造一个新的每列单非零元矩阵 B'，它与 A 构成完全能控对，其非零元的个数为 r，r 小于 α_1+k_1，这与 B 是综合解的假设相矛盾. 必要性证毕. 定理 2.2 证毕.

例 2.1　设线性系统(1.1)中的状态矩阵 A 为：

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{2.9}$$

试求其每列单非零元的综合解矩阵 B.

解：根据定理 2.2 的证明中所指出的方法，其求解程序可分如下几步.

1). 先求变 A 为 Jordan 标准形的满秩相似矩阵 T 和 T^{-1}，经计算得：

$$T=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{2.10}$$

$$J=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix} \tag{2.11}$$

由 J 的表达式不难看出 A 的循环指数为 2.

2).根据(2.6)式,抽出 T^{-1} 阵中相应的行组成如下的矩阵组(由第二行和第三行组成一个矩阵,由第四行和第五行组成一个矩阵):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

3).寻求定理 2.2 中的最少列数. 为此分别计算矩阵(2.12)和(2.13)的相应阶非零行列式:

在矩阵(2.12)中:

$$\begin{array}{cc} \text{第 2,5 列} & \text{第 3,5 列} \\ \det\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, & \det\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \end{array} \tag{2.14}$$

在矩阵(2.13)中:

$$\begin{array}{c} \text{第 1,3 列} \\ \det\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \end{array} \tag{2.15}$$

由(2.14)和(2.15)式中相应列的组合,就可求得定理 2.2 中的最少列应由第 1,3,5 列组成. 于是,

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

即为每列单非零元的综合解,除此没有别种形式的每列单非零元的综合解(这里不计不同的排列). 例 2.1 解毕.

注意: 定理 2.2 只是给出了求每列单非零元的综合解的方法. 其它结构形式的综合解可以根据每列单非零元综合解来产生.

定理 2.3. 设矩阵 A 的循环指数为 α_1, 又设综合解的非零元个数为 t_1, 则当输入列数固定为 α_1 与 t_1 之间的任一整数 r 时,都有综合解存在.

证明: 由定理 2.2 可以找到由 t_1 个列向量组成的每列单非零元综合解矩阵 B, 并且在矩阵组(2.6)中可以找出 t_1 个列,列的标号与矩阵 B 中非零元的行的标号一致, 使得在 t_1 列中,矩阵组(2.6)分别能找出 α_i 阶非零行列式.

下面根据矩阵 B 按如下方式来构造由 r 个列向量组成的矩阵 B_1, 使其非零元的个数与 B 一样多,而且它与 A 构成完全能控对. 首先,当 $i=1$ 时, 在矩阵组(2.6)的上述 t_1 列中选取 r 列, 使其中矩阵组(2.6)中的第一个矩阵有一个 α_1 阶非零行列式,然后根据 r 列的标号,在矩阵 B_1 的相应标号的行中设置一个非零的"b_{ij}", 且 r 个非零元应分别位于不同的列中. 当 $i=2$ 时,上述 t_1 列中可以选出 α_2 列,使在其中矩阵组(2.6)的第二个矩阵相应列的 α_2 阶行列式非零,然后根据 α_2 个列的每一个标号按如下规则来设置 B_1 中的非零元:

i) 若与上述标号相应的矩阵 B_1 的行中已有了非零元,就不再设置非零元;

ii) 若与上述标号相应的矩阵 B_1 的行中尚未有非零元,则在这一行中应设置非零元;

iii) 这些非零元应分别设置在不同的列上(注: 而且不应设置在情形 i) 中具有相同标号的已有非零元的列中).

当 $j=3, 4, 5, \cdots \sigma$ 时, 可以重复如 $j=2$ 的步骤, 最后构造出矩阵 B_1 由 r 个非零列向量组成,共有 t_1 个非零元,设矩阵 B_1 为:

$$B_1=\left[\begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & b_{i_{(t_1-s_r+1)},r} \\ \vdots & \cdots & 0 \\ b_{i_1,1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & b_{i_{t_1},r} \\ b_{s_1,1} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \vdots \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{第 } i_{(t_1-s_r+1)} \text{ 行} \\ i_1 \\ i_{t_1} \\ i_{s_1} \\ \\ \\ \\ \end{array}, \tag{2.17}$$

将 B_1 代入(2.4)中,则得:

$$\left[\begin{array}{l} t_{j1,i_1}b_{i_1,1}+\cdots+t_{j_1,i_{s_1}}b_{i_{s_1},1};\ \cdots;\ t_{j1,\ i(t_1-s_r+1)}b_{i(t_1-s_r+1),r}+\cdots \\ \qquad +t_{j1,it_1}b_{i_{t_1},r} \\ t_{j2,i_1}b_{i_1,1}+\cdots+t_{j2,i_{s_1}}b_{i_{s_1},1};\ \cdots;\ t_{j2,\ i_{(t_1-s_r+1)}}b_{i_{(t_1-s_r+1)},r}+\cdots \\ \qquad +t_{j2,i_{t_1}}b_{it_1,r} \\ \cdots\quad \cdots\quad \cdots\quad \cdots\quad \cdots\quad \cdots\quad \cdots \\ t_{j\alpha_j,i_1}b_{i_1,1}+\cdots+t_{j\alpha_j,i_{s_1}}b_{i_{s_1},1};\ \cdots;\ t_{j\alpha_j,\ i_{(t_1-s_r+1)}}b_{i(t_1-s_r+1),r}+\cdots \\ \qquad +t_{j\alpha_j,i_{t_1}}b_{i_{t_1},r} \end{array}\right] \tag{2.18}$$

其中: $j=1, 2, \cdots, \sigma$,

在矩阵组(2.18)中, 第 1 列的各元素为 s_1 项的和,第 2 列的各元素为 s_2 项的和, ……, 第 r 列的各元素为 s_r 项的和. 现在分别来计算(2.18)中一些列构成的行列式, 在这些列中包含有矩阵组(2.6)中原非零行列式的列. 例如,当 $j=1$ 时, α_1 阶行列式为

$$f_1(b_{i_1,1}, b_{i_2,1}, \cdots, b_{i_{s_1},1}; \cdots; b_{i_{(t_1-s_r+1)},r}, \cdots, b_{i_{t_1},r}),$$

可以证明 f_1 是不恒为零的 α_1 次齐次多项式(注意: 在 α_1 次齐次多项式中, 不包含所选的 α_1 列以外的 "b_{ij}" 的齐次项). 同样, 当 $j=2, 3, \cdots \sigma$ 时, 分别可得这样的 α_j 阶行列式为:

$$f_j(b_{i_1,1}, b_{i_2,1}, \cdots, b_{i_{s_1},1}; \cdots; b_{i_{(t_1-s_r+1)},r}, \cdots, b_{i_{t_1},r}),$$

f_j 也是不恒为零的 α_j 次齐次多项式(注意: α_j 次齐次多项式中不包含所选的 α_j 列以外的 "b_{ij}" 的齐次项). 这样就得到 σ 个不恒为零的齐次多项式 $f_1, f_2, \cdots, f_\sigma$. 由代数函数论知,一定存在一组全非零的实数组:

$$\{b^*_{i_1,1}, b^*_{i_2,1}, \cdots, b^*_{i_{s_1},1}; \cdots; b^*_{i_{(t_1-s_r+1)},r}, \cdots, b_{i_{t_1},r}\} \tag{2.19}$$

使诸 f_j 全不为零. 若将(2.19)式的参数值代入 (2.17) 式的矩阵 B_1 中, 由于诸 f_j 全非零, 则由(2.18)及(2.3)式可知, 矩阵对 $[A, B_1]$ 构成完全能控对,但矩阵 B_1 的列向量个数正

好是 r，其非零元的个数正好是 t_1，因此这样构成的 B_1 实际上是一个综合解.定理 2.3 证毕.

注意：定理 2.3 不但证明了固定列数的综合解的存在性，而且在其证明中还给出了求其它结构形式综合解的方法.

例 2.2　试对例 2.1 中的状态矩阵 A,求出其一切综合解(这里不计不同的列的排列).

解：在例 2.1 中已经求得了每列单非零元的综合解矩阵 (2.16). 由于矩阵 A 的循环指数为 2，故除(2.16)的综合解外，还应有由两个列向量组成的综合解. 这个综合解可以按定理 2.3 的证明中所叙述的方法来构成

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \\ b_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

其构成规则是：在矩阵(2.12)中第 3、5 列组成的行列式非零，故先在第 1 个列向量第 3 个元素处设置 $b_2 \neq 0$，在第 2 个列向量中第 5 个元素处设置 $b_3 \neq 0$. 由于矩阵(2.13)中第 1，3 列组成的行列式非零，但在这两个行列式中第 3 列是相同的标号，因此按规则 i) 第 3 行中除 b_2 外就不再设置其它非零元. 在 B_1 的第 1 行中按规则 ii) 和 iii) 应设置一个非零元 b_1. 由规则 iii) 中的注解可知，b_1 不能设置在 b_3 所在的列上，故 b_1 只能设置在第 2 列上. 于是按定理 2.3 的证明可知，(2.20) 式表示的 B_1 也是一个综合解. 本例除(2.16)和(2.20)式所表示的综合解外，没有其它的综合解. 例 2.2 解毕.

三、求综合解的计算步骤

将定理 2.2、定理 2.3 和例 2.2、例 2.3 所提供的方法综合起来，可以得到如下的求综合解的计算步骤：

1) 先求把矩阵 A 变换成 Jordan 标准形(2.1)、(2.2)的满秩变换阵 T 的逆阵 T^{-1}.

2) 按 Jordan 块的子块 J_{ik} 的最后一行的标号，抽出 T^{-1} 阵中的相应标号的行组成矩阵组 (2.6)，$j = 1, 2, \cdots \sigma$.

3) 在矩阵组(2.6)中寻找这样的最少列数 t_1，从它们中分别能找出 α_j 列，使矩阵组 (2.6) 的第 j 个中相应列的行列式不为零，$j = 1, 2, \cdots \sigma$.

4) 根据 3) 找出的这些列的标号来构造由 t_1 列向量组成的每列单非零元矩阵，它的非零元所在行的标号分别与上述 t_1 列向量的列的标号相应.

5) 然后根据定理2.3的证明中所指出的方法，来构造列数介于 α_1 与 t_1 之间的其它综合解.

注意：虽然变 A 成 Jordan 标准形的满秩相似变换 T 不是唯一的，但是由于有定理 2.2 的充要条件的保证，我们可以从任一变 A 成 Jordan 标准形的满秩相似变换出发都能求出一切综合解.

四、后　　记

本文不仅给出了求最经济结构综合解的代数方法，而且在最经济控制理论方面给出

了综合解的各种存在性定理和解的结构定理.

本文第一稿于 1979 年 8 月完成，1979 年 12 月在中国自动化学会理论委员会石家庄学术会议上宣读. 第一稿作者曾用循环不变子空间的理论给出了一种求综合解的方法. 第二稿于 1980 年 2 月完成，本文在第二稿基础上写成.

作者对山东大学张学铭、陈祖浩、欧阳亮等同志在本文写作过程中所给予的帮助表示感谢.

参 考 文 献

[1] 涂序彦，可控性、可观性的实用价值与最经济结构综合问题，全国第一届控制理论及应用交流会论文集，1979 年 5 月(科学出版社即将出版).

[2] Р. Габасов, Ф. Кириллова, Качественная теория оптимальных процессов, Издательство «Наука», 1971.

[3] 须田信英等，自动控制中的矩阵理论，科学出版社，1979.

THE ALGEBRAICAL METHOD OF MOST ECONOMICAL STRUCTURE SYNTHESIS OF LINEAR CONTROL SYSTEM

Chen Zhaokuan Zhang Rongxiang

(*Shandong University*) (*Shandong Engineering Institute*)

Abstract

For MES synthesis problem of linear control system represented in paper [1] the general solution and calculating examples are given by using algebraical method. The various problems of existence and construction of MES synthesis have been discussed and the general solution in the case of limited number of control vectors is also given. It is more convenient to find MES synthesis solution in practical engineering by using the method proposed in this paper.