

空战格斗中的两个区域

张 嗣 瀛
(东北工学院)

摘 要

本文应用定性微分对策理论分析空战格斗,提出处理格斗中出现的“角色二重性”的一个方法,并进行了数字计算,对于每架飞机,得出了两个区域, G 和 R .若机 B 进入机 A 的 G 区,则可被机 A 自尾部追及,且此时机 B 的飞行方向指向 A 的正前方,这正是 A 所寻求的“战机”.若 B 进入 A 的 R 区,则 A 可被 B 在同样情况下追及.

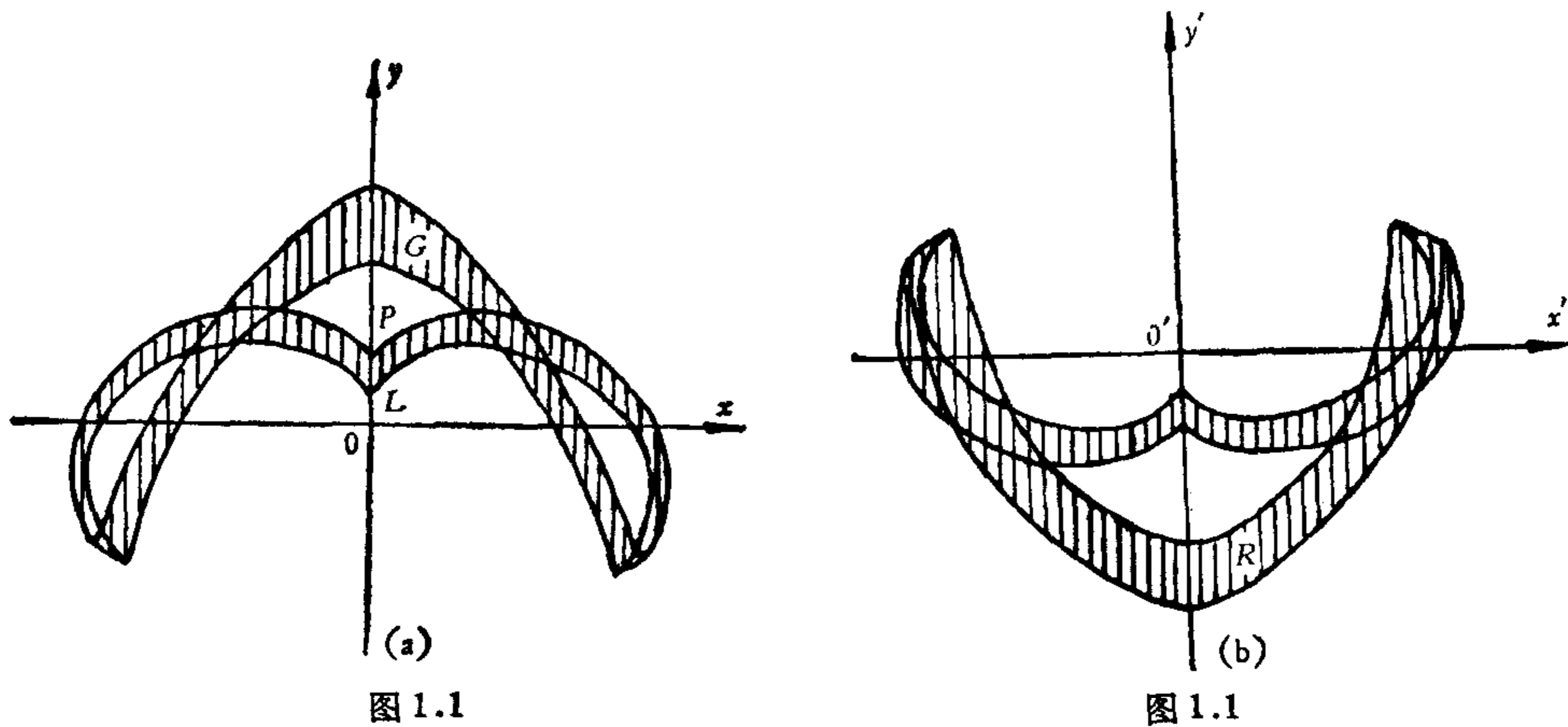
一、前言、方法

目前已有不少文献用微分对策分析空战格斗.在微分对策理论中,“追”、“躲”两方的“角色”都是固定的,而在空战中双方相互追逐,角色可以互易.针对这一情况,有些作者提出不同的处理方法.例如,文献[2]提出, A, B 两机, A 机前方和后方各有一扇形区域,并规定,若 B 进入 A 前方的扇形区,则 A 胜,若 B 进入 A 后方的扇形区,则 B 胜,然后分别解这两个问题.该方法中,用一个单方能控性问题代替双方微分对策问题,忽略了一方的机动性和对抗,是其缺点.

本文提出另一种方法.考虑 B 对 A 的相对运动,以 A 的速度方向为 y 轴.双方对抗,今将 y 轴取为目标集,并分析自右半平面某一位置出发,能否将 B 控制到 y 轴的线段 PL 上(见图1.1(a)),且此时 B 相对于 A 的速度也在 y 轴方向.这里, PL 表示 A 的武器射程.

针对这一要求,可自 P 点出发,在满足此要求的边界条件下,倒转时间,求最优轨线.同样再从 L 出发,求其最优轨线.自 PL 上各点出发的最优轨线族,形成一条带形区域.虚线部分表示轨线族的包络,以使此区域封闭.在右半平面,类似地也有这样一条对称的带形区域.称此区域为“ G (绿)区”(见图1.1(a)),这个区域还不是定性微分对策理论中的“捕捉区”^[1].于是, G 区内满足一定边界条件的最优轨线族,将能够到达 PL .亦即 B 若在 G 区内,在一定条件下 A 将追及 B ,且 A, B 间的状态将达到如上要求.另一方面,再考虑 A 对 B 的相对运动,坐标轴为 $x'o'y'$,并应用坐标变换,画出上述运动中 A 点在 $x'o'y'$ 平面上的轨线,也形成一个区域,称为“ R (红)区”(见图1.1(b)).亦即如果 A 在 R 区内,则在一定条件下 B 将被追及.

事实上,不论对于 A 或 B ,均有这样两个区域.即对每一方来说, G 区都是希望对方



进入的, R 区都是避免对方进入的. 因此, 不论是处于追方或躲方, 明了这两个区域的位置, 就可作为空战时决策的参考.

二、问题、解

1. 模型和问题

取[1]中的“二车对策” (§9.2) 作为 A, B 两方在平面上的相对运动模型.

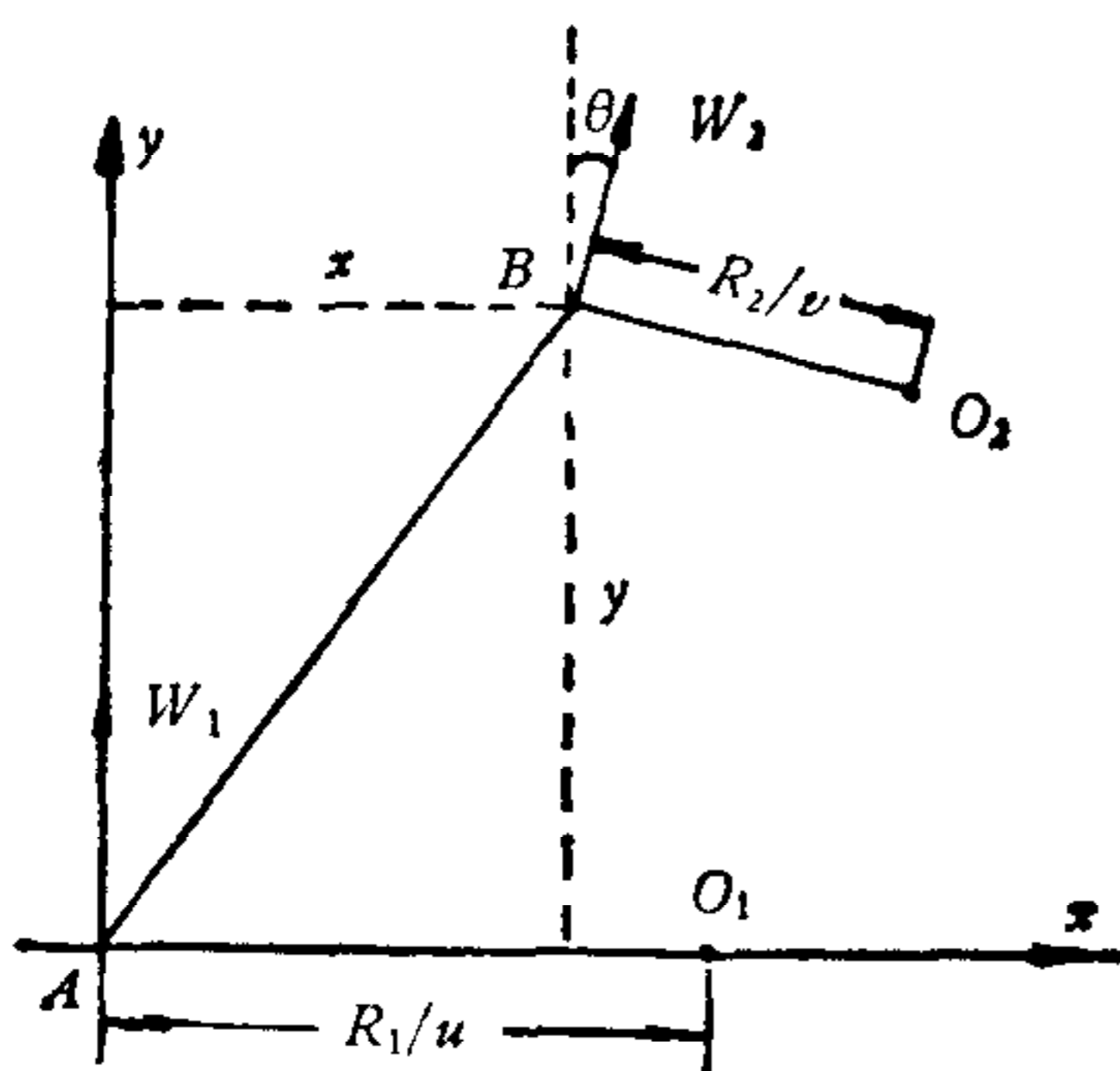


图 2.1

A, B 两方的性能及其他数据如下 (见图 2.1):

- W_1 ——A 的速度, 常数;
- R_1 ——A 的最小转弯半径;
- W_2 ——B 的速度, 常数;
- R_2 ——B 的最小转弯半径;
- θ —— W_2 的方向与 W_1 方向间的夹角;
- o_1 ——A 的转动中心;
- o_2 ——B 的转动中心;
- u ——A 的“控制”, 可自 -1 变到 $+1$, 对应于转弯半径自 $-R_1$ 变到 $+R_1$;
- v ——B 的“控制”, 性质同上.

在以上数据下, 将 A 取作原点, W_1 的方向取作 y 轴方向, B 相对于 A 的运动方程为:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= W_2 \sin \theta - \frac{W_1}{R_1} y u, \\ \dot{y} &= W_2 \cos \theta + \frac{W_1}{R_1} x u - W_1, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{W_2}{R_2} v - \frac{W_1}{R_1} u, \\ -1 &\leq u \leq +1, \quad -1 \leq v \leq +1. \end{aligned} \tag{2.2}$$

今以 y 轴为目标集, 分析当 B 位于右半平面时, 能否将 B 在某一 $t = t_1$ 时控制到 y 轴

的线段 PL 上(B 同时作对抗), 且此时满足条件

$$\dot{x}(t_1) = 0 \quad (2.3)$$

即到达 PL 时, B 对于 A 的相对速度在 y 轴方向.

对于左半平面, 分析和结论都将是对称的.

2. 问题的解

Hamilton 函数和伴随方程如下:

$$H(\lambda, x, u, v, t) = \lambda_1 \left(W_2 \sin \theta - \frac{W_1}{R_1} y u \right) + \lambda_2 \left(W_2 \cos \theta + \frac{W_1}{R_1} x u - W_1 \right) + \lambda_3 \left(\frac{W_2}{R_2} v - \frac{W_1}{R_1} u \right) \quad (2.4)$$

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{W_1}{R_1} u \lambda_2,$$

$$\dot{\lambda}_2 = \frac{W_1}{R_1} u \lambda_1, \quad (2.5)$$

$$\dot{\lambda}_3 = -\lambda_1 W_2 \cos \theta + \lambda_2 W_2 \sin \theta.$$

如果以 y 轴为目标集, 则在 t_1 到达 P 点时, 伴随方程将有如下的边界条件^[3]:

$$\lambda_1(t_1) = -1, \quad \lambda_2(t_1) = 0, \quad \lambda_3(t_1) = 0. \quad (2.6)$$

再由(2.3)式确定(2.1)式中 θ 在 t_1 时的值. 若满足(2.3)式, 则在 t_1 时将有

$$W_2 \sin \theta - \frac{W_1}{R_1} y u = 0,$$

或

$$\theta(t_1) = \sin^{-1} \frac{W_1 y u}{R_1 W_2}. \quad (2.7)$$

对于 x, y , 又有

$$x(t_1) = 0, \quad y(t_1) = s. \quad (2.8)$$

这里, s 将取 P 或 L 点的 y 轴坐标. 于是两方程的边界条件都将确定.

在这个对抗过程中, A 力图将 B 控制到 PL , B 则相反, A, B 将各按“双方极值原理”^[3]选取自己的最优控制 \bar{u}, \bar{v} . 由(2.4)式, 有

$$H = \frac{W_1}{R_1} u (-y \lambda_1 + x \lambda_2 - \lambda_3) + \frac{W_2}{R_2} v \lambda_3 + W_2 (\lambda_1 \sin \theta + \lambda_2 \cos \theta) - W_1 \lambda_2.$$

因此, 若记

$$K = (-y \lambda_1 + x \lambda_2 - \lambda_3) \quad (2.9)$$

则应取 \bar{u}, \bar{v} 如下:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \text{sign } K, \\ \bar{v} &= \text{sign}(-\lambda_3) \end{aligned} \quad (2.10)$$

与这样的 (\bar{u}, \bar{v}) 相对应的轨线称为最优轨线.

现自 P 点或 L 点出发, 倒转时间, 求最优轨线. 倒转时间的方程及相应的初始条件如下(时间变量取为 τ):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{W_1}{R_1} yu - W_2 \sin \theta, \\ \dot{y} &= -\frac{W_1}{R_1} xu - W_2 \cos \theta + W_1, \\ \dot{\theta} &= \frac{W_1}{R_1} u - \frac{W_2}{R_2} v\end{aligned}\quad (2.11)$$

$\tau = 0$ 时的初始条件为

$$x(0) = 0, y(0) = s, \theta(0) = \sin^{-1} \frac{W_1 y(0)}{R_1 W_2} u, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1 &= \frac{W_1}{R_1} u \lambda_2, \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{W_1}{R_1} u \lambda_1,\end{aligned}\quad (2.13)$$

$$\dot{\lambda}_3 = \lambda_1 W_2 \cos \theta - \lambda_2 W_2 \sin \theta.$$

$$\lambda_1(0) = -1, \lambda_2(0) = 0, \lambda_3(0) = 0. \quad (2.14)$$

在一般初始条件 x^0, y^0, θ^0 及 $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0$ 下, 式(2.11)和(2.13)解的表达式为(当 u, v 取常数值时):

$$\begin{aligned}x &= x^0 \cos \frac{W_1}{R_1} u \tau + y^0 \sin \frac{W_1}{R_1} u \tau + R_1 u \left(1 - \cos \frac{W_1}{R_1} u \tau \right) \\ &\quad + R_2 v \left\{ \cos \left(\theta^0 + \frac{W_1}{R_1} u \tau \right) - \cos \left[\theta^0 + \left(\frac{W_1}{R_1} u - \frac{W_2}{R_2} v \right) \tau \right] \right\}, \\ y &= y^0 \cos \frac{W_1}{R_1} u \tau - x^0 \sin \frac{W_1}{R_1} u \tau + R_1 u \sin \frac{W_1}{R_1} u \tau \\ &\quad - R_2 v \left\{ \sin \left(\theta^0 + \frac{W_1}{R_1} u \tau \right) - \sin \left[\theta^0 + \left(\frac{W_1}{R_1} u - \frac{W_2}{R_2} v \right) \tau \right] \right\}, \\ \theta &= \theta^0 + \left(\frac{W_1}{R_1} u - \frac{W_2}{R_2} v \right) \tau.\end{aligned}\quad (2.15)$$

$$\lambda_1 = \lambda_1^0 \cos \frac{W_1}{R_1} u \tau + \lambda_2^0 \sin \frac{W_1}{R_1} u \tau,$$

$$\lambda_2 = -\lambda_1^0 \sin \frac{W_1}{R_1} u \tau + \lambda_2^0 \cos \frac{W_1}{R_1} u \tau, \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}\lambda_3 &= \frac{R_2}{u} \left\{ \lambda_1^0 \left[\sin \left(\frac{W_2}{R_2} v \tau - \theta^0 \right) + \sin \theta^0 \right] \right. \\ &\quad \left. - \lambda_2^0 \left[\cos \left(\frac{W_2}{R_2} v \tau - \theta^0 \right) - \cos \theta^0 \right] \right\} + \lambda_3^0.\end{aligned}$$

3. 最优轨线的计算

1) 取如下一组数据

$$W_1 = 550 \text{m/s}, W_2 = 500 \text{m/s}, R_1 = 23,000 \text{m}, R_2 = 20,000 \text{m}, y^0 = 300 \text{m}.$$

于是有

$$\frac{W_1}{R_1} = 0.024, \quad \frac{W_2}{R_2} = 0.025.$$

确定 $\theta(0) = \theta^0$:

$$\theta^0 = \sin^{-1} \frac{550 \times 300}{23000 \times 500} = 0.01435.$$

再确定开始第一段轨线的 \bar{u} , \bar{v} 及延续时间.

由式 (2.9), (2.12), (2.14) 可知: $\tau = 0$ 时 K 为正值, 故 $\bar{u}(0) = +1$.

将解的一般形式 (2.15), (2.16) 代入式 (2.9), 可得

$$K = - \left[\lambda_1^0 y^0 - \lambda_2^0 x^0 + \lambda_3^0 + R_1 u \left(\lambda_2^0 + \lambda_1^0 \sin \frac{W_1}{R_1} u \tau - \lambda_2^0 \cos \frac{W_1}{R_1} u \tau \right) \right] \quad (2.17)$$

在上面的初始条件下

$$K = y^0 + R_1 \bar{u} \sin \frac{W_1}{R_1} \bar{u} \tau,$$

由此式解出 $K = 0$ 时, $\tau = 131.44\text{s}$.

另外, 由 λ_3 的表达式 (2.16), 可知 $\tau = 0$ 时 $\lambda_3 = 0$, 再由 (2.13) 式, 知 $\lambda_3^0(0)$ 为负值. 因此 λ_3 的值将随着 τ 的增加而递减, 即 λ_3 为负值, 故应取

$$\bar{v} = \text{sign}(-\lambda_3) = +1.$$

计算 λ_3 再次为零的时间. 由初始条件及 λ_3 的表达式, 有

$$\lambda_3 = - \frac{R_2}{\bar{u}} \left\{ \sin \left(\frac{W_2}{R_2} \bar{v} \tau - \theta^0 \right) + \sin \theta^0 \right\}$$

由此式解出

$$\tau = \frac{\pi + 2\theta^0}{W_2/R_2} = 126.81\text{s}.$$

综上所述可知:

$$x^0 = 0, \quad y^0 = 300, \quad \theta^0 = 0.01435.$$

$$\lambda_1^0 = -1, \quad \lambda_2^0 = 0, \quad \lambda_3^0 = 0.$$

第一段轨线应取 $\bar{u} = +1$, $\bar{v} = +1$, 且这段轨线的延续时间为 126.8s .

现计算出每隔 10s 轨线上一点的值 (详见附录), 这里只列出 $\tau = 126.8$ 时的值

$$x = 6115, \quad y = -1962, \quad \theta = -0.11245.$$

算出此时 $\lambda_1 = 0.9952$, $\lambda_2 = 0.0982$, $\lambda_3 = 0$. 即以这样的数据作为初始条件, 分析下一段轨线.

自此时开始, 再经过 4.64 秒 K 将变号, 但由计算, λ_3 再次为零的时间大于此值, 故下一段轨线应取 $\bar{u} = +1$, $\bar{v} = -1$, 且这段轨线的延续时间为 4.64s .

附录中给出这段轨线的数值. 这段轨线终了时的有关数据如下:

$$x = 5870, \quad y = -2388, \quad \theta = 0.11491,$$

$$\lambda_1 = 0.99995, \quad \lambda_2 = -0.01274, \quad \lambda_3 = 2311.6.$$

又以它们为初始条件, 继续分析下一段轨线.

经计算, λ_3 为零的时间为 122.15s , K 为零的时间为 131.97s . 故下一段轨线应取 $\bar{u} = -1$, $\bar{v} = -1$, 且延续时间为 122.15s . 附录中也列出了这段轨线的数值, 并看出这段轨线已延续到左半平面. 图 2.2 中, 只画出在右半平面的那段轨线, 而且, 随着时间的延长, 其对应的轨线在空战中也失去了实际意义, 故不再继续计算.

对于从左半平面到达 PL 的轨线,将有完全对称的分析和结果. 这里不再赘述, 只在图中画出.

如果考虑 A 对于 B 的相对运动. 以 B 的速度 W_2 的方向为 y' 轴, 则 A 点的坐标 x', y' , 和原来的 x, y, θ 间将有如下关系

$$\begin{aligned} x' &= -x \cos \theta + y \sin \theta, \\ y' &= -x \sin \theta - y \cos \theta. \end{aligned} \tag{2.18}$$

此外还有 $\theta' = -\theta$. 据这样的坐标变换, 算出 x', y' 的值, 也列在附录中.

按上述步骤, 再计算当 $y^0 = 800 \text{ m}$ 时(对应于 P 点) 的轨线, 数据见附录. 这样便完成了第1)组数据的计算.

再计算另一组数据, 以作比较.

2) 取如下数据

$$\begin{aligned} W_1 &= 480 \text{ m/s}, & W_2 &= 440 \text{ m/s}, & R_1 &= 16000 \text{ m}, & R_2 &= 13000 \text{ m}, \\ y_L^0 &= 250 \text{ m}, & & & & & y_P^0 &= 800 \text{ m}. \end{aligned}$$

于是

$$\frac{W_1}{R_1} = 0.03, \quad \frac{W_2}{R_2} = 0.034.$$

然后进行上述同样计算, 结果见附录.

按附录中的所有数据画出图 2.2 和图 2.3, 图中的 $(+, +)$ 等表示与轨线相对应的 (\bar{u}, \bar{v}) .

4. 结语

1) 图 2.2 和 2.3 中, 实线表示上节第 1) 组数据的计算结果, 点线是第 2) 组数据的计算结果. 因此, 随着数据的变化, 轨线的分布将不同, 但分布区域(即 G 区和 R 区)将大体上如图所示, 即 G 区在前方左右两侧, R 区在后方左右两侧. 这和实战经验是大致相符的.

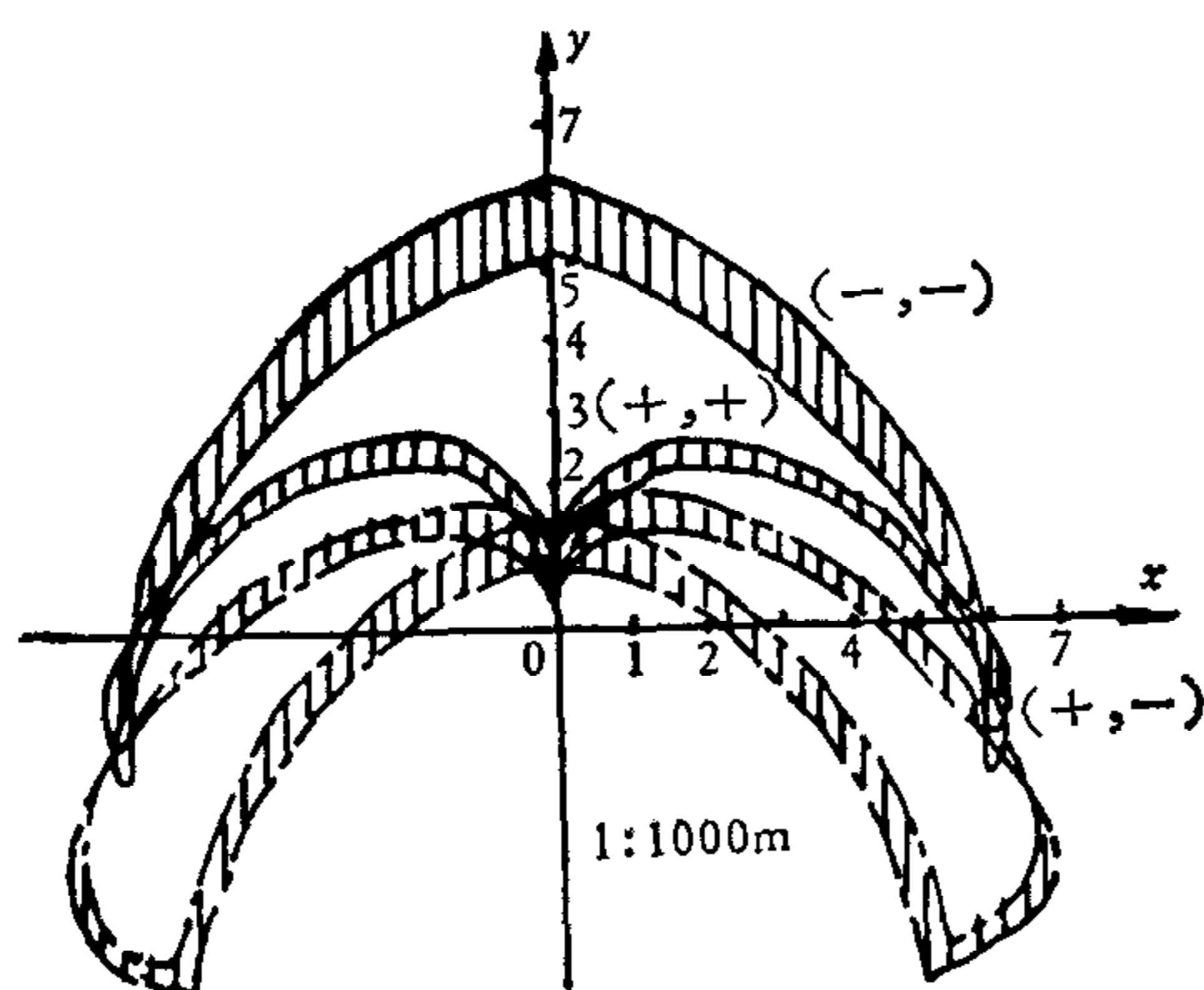


图 2.2

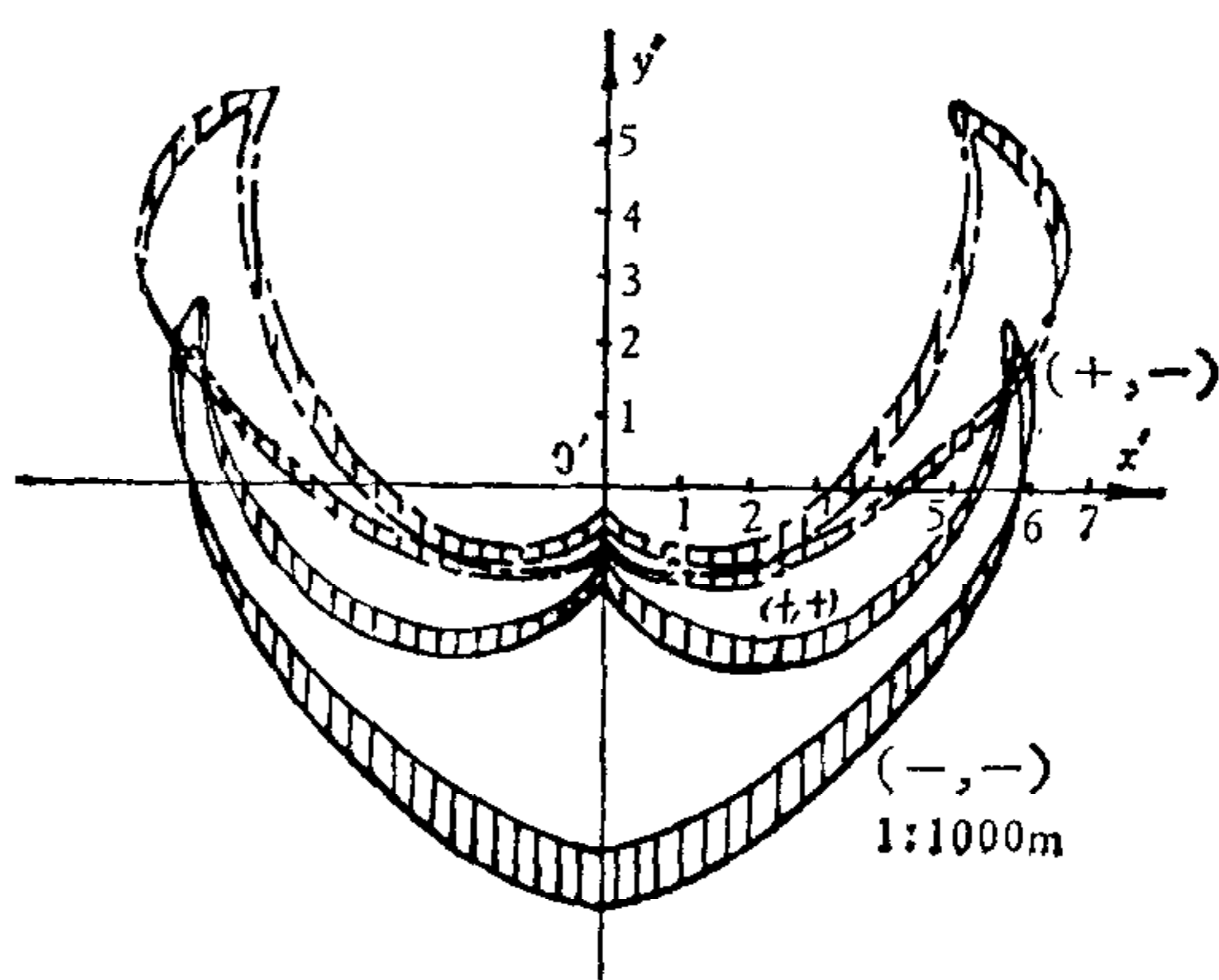


图 2.3

2) 轨线上每一点, 都对应一个 θ 值. 这是对这条轨线能否达到 PL 的附加条件. 看来这一要求是严苛的, 但可作为 A, B 的参考, 由此可知在什么条件下, 在对方位于 G 或

R 区时,会导致什么结果。

3) 双方在一定性能的条件下,才能有如上两个区域。例如当追方速度小于躲方,虽有机动优势(转弯半径小于躲方),也不能按上面的要求追及,可见速度优势是重要的。

4) 目标集还可放宽,即不限于正前方的直线段 PL 。被追及时的飞行方向也可放宽,即不限于正前方。以上主要是给出一种处理问题的方法并作了一定的计算。

在完成此文的过程中,得到胡启文、高兰甸同志的热情帮助,特此深致谢意。

附录 计算数据

第 1) 组数据: $y^0 = 300$

第一段轨线

$\tau(S)$	$x(m)$	$y(m)$	$\theta(\text{rad})$	x'	y'
10	87	813	0.00435	-83	-813
20	343	1284	-0.00565	-350	-1283
30	754	1676	-0.01565	-780	-1663
40	1295	1953	-0.02565	-1344	-1919
50	1937	2089	-0.03565	-2010	-2018
60	2642	2065	-0.04565	-2733	-1942
70	3371	1870	-0.05565	-3469	-1679
80	4082	1504	-0.06565	-4171	-1232
90	4736	977	-0.07565	-4796	-616
100	5295	307	-0.08565	-5302	147
110	5729	-478	-0.09565	-5658	1022
120	6014	-1345	-0.10565	-5839	1971
1268	6115	-1962	-0.11245	-5856	2635

第二段轨线

1	6110	-2055	-0.06345	-5967	2438
2	6079	-2148	-0.01445	-6047	2235
3	6022	-2241	0.03455	-6095	2031
4	5937	-2332	0.08355	-6108	1828
4.64	5870	-2388	0.11491	-6105	1700

第三段轨线

10	5614	-442	0.12442	-5625	-202
20	4852	1384	0.13442	-4622	-2021
30	3628	2979	0.14442	-3161	-3470
40	2009	4238	0.15442	-1333	-4496
50	88	5078	0.16442	743	-5025
60	-2026	5440	0.17442	2939	-5005
70	-4217	5291	0.18442	5115	-4429

第 1) 组数据 $y^0 = 800$

第一段轨线

τ	x	y	θ	x'	y'
10	88	1315	0.00435	-82	-1315
20	345	1788	-0.00565	-355	-1780
30	757	2179	-0.01565	-791	-2167
40	1299	2454	-0.02565	-1361	-2419
50	1941	2587	-0.03565	-2031	-2516
60	2646	2558	-0.04565	-2759	-2434
70	3373	2358	-0.05565	-3499	-2166
80	4081	1986	-0.06565	-4202	-1713
90	4730	1452	-0.07565	-4826	-1090
100	5284	776	-0.08565	-5331	-321
110	5711	-14	-0.09565	-5683	559
120	5987	-886	-0.10565	-5860	1512
128.7	6094	-1681	-0.11435	-5862	2365

第二段轨线

1	6097	-1773	-0.06535	-5968	2169
2	6074	-1867	-0.01635	-6042	1966
3	6024	-1960	+0.03265	-6084	1762
3.624	5979	-2017	+0.06322	-6094	1635

第三段轨线

10	5885	-51	0.07322	-5872	-379
20	5278	1833	0.08322	-5107	-2265
30	4190	3518	0.09322	-3844	-3892
40	2683	4895	0.10322	-2164	-5145
50	842	5873	0.11322	-173	-5930
60	-1228	6358	0.12322	2003	-6185
70	-3411	6390	0.13322	4229	-5880

第 2) 组数据 $y^0 = 250$

第一段轨线

τ	x	y	θ	x'	y'
10	144	615	-0.023	-158	-611
20	564	900	-0.063	-619	-862
30	1225	1032	-0.103	-1324	-900
40	2073	955	-0.143	-2185	-650
50	3033	630	-0.183	-3097	-67
60	4032	41	-0.223	-3941	851
70	4987	-803	-0.263	-4606	2071
80	5825	-1872	-0.303	-5001	3524
90	6483	-3115	-0.343	-5058	5113
93.4	6658	-3565	-0.3566	-4994	5664

第二段轨线

τ	x	y	θ	x'	y'
3	6659	-4005	0.1646	-5912	5042
6	6368	-4474	0.0274	-6488	4298
9	5782	-4897	0.2194	-6709	3521
11.84	4969	-5188	0.4012	-6600	2853

第三段轨线

10	4387	-2997	0.4412	-5246	836
20	3015	-1026	0.4812	-3147	-485
30	956	508	0.5212	-576	-916
40	-1628	1430	0.5612	2139	-344
50	-4531	1617	0.6012	4651	1229

第2)组数据 $y^0 = 800$

第一段轨线

τ	x	y	θ	x'	y'
10	143	1168	0.0146	-125	-1169
20	563	1449	-0.0254	-599	-1434
30	1221	1572	-0.0654	-1321	-1488
40	2062	1479	-0.1054	-2206	-1253
50	3013	1134	-0.1454	-3145	-685
60	3997	523	-0.1854	-4025	222
70	4931	-345	-0.2254	-4729	1438
80	5743	-1437	-0.2654	-5165	2893
90	6369	-2700	-0.3054	-5762	4490
95.61	6624	-3458	-0.3278	-5157	5406

第二段轨线

3	6597	-3903	-0.1358	-6007	4760
6	6277	-4368	0.0562	-6512	4008
9	5664	-4776	0.2482	-6663	3238
10.78	5168	-4962	0.3621	-6590	2809

第三段轨线

10	4677	-2765	0.4021	-5386	714
20	3388	-768	0.4421	-3062	-755
30	1399	809	0.4821	-864	-1365
40	-1134	1786	0.5221	1873	-982
50	-4006	2034	0.5621	4473	414

参 考 文 献

- [1] Isaacs, R., *Differential Games*, John Wiley and Sons, 1965.
 [2] Peng, W. Y., Vincent, T. L. Some Aspects of Aerial Combat, *AIAA Journal*, **13**, 1975, No. 1.
 [3] 张嗣瀛,关于定量与定性微分对策,自动化学报,第6卷第2期,1980.

TWO REGIONS IN AERIAL COMBAT

ZHANG SIYING

(Dongbei Polytechnic Institute)

ABSTRACT

In this paper, the aerial combat is analysed by applying the theory of qualitative differential games. The method is presented to solve the problem of "role ambiguity" arisen in combat. Numerical calculations are carried out. Two regions G and R are obtained for each fighter. If fighter B entered into the region G of fighter A, then it may be captured on the tail by A and the direction of flight of B is straight forward relative to A. This is the chance of attack sought by A. If B entered into the region R of A, then A may be captured by B under the same situation.

学术活动简讯

“中美控制系统学术会议”即将召开

今年8月10—12日在中国上海,将召开“中美控制系统学术会议”。由中国自动化学会和美国IEEE控制系统学会共同发起。

中方已组成以关肇直教授为主任的程序委员会,及以疏松桂教授为主任的组织委员会。美方组织委员会主任为哈佛大学何毓琦教授,程序委员会主任为麻省理工学院 Willsky 教授。双方共同进行本次会议的筹备工作。

关于控制系统的国际性学术交流会,在我国还是首次举行,预计将会出现一番盛况。

(中国自动化学会)