

线性控制系统最经济结构 综合解的适定性问题

张荣祥 陈兆宽
(山东工学院) (山东大学)

摘 要

本文提出了最经济结构综合解的适定性问题。分析了状态矩阵 A 摄动时系统的最经济结构综合解的变化,引入了可控性余度的概念,提出它的两种估计方法并作了实例计算和讨论。

一、适定性问题的提出

文[1]所提出的线性控制系统的最经济结构综合问题,是指寻求一切与状态矩阵 A 构成完全能控对且其非零元为最少的控制矩阵 B 。文[2]所提出的代数方法可以求出全部最经济结构的综合解。但是任何实际的物理系统由于这种或那种原因其参数不可能是完全确定的,而且在建立其数学模型时总会有一定的误差,运算中也受计算机精度的限制,实际上在系统综合时所能得到的只是摄动后的状态矩阵 A ,因而对于解得的最经济结构在状态矩阵 A 有小的摄动时会有什么变化是一个值得注意的问题,这个问题对于最经济结构综合解在工程上的应用来说尤其重要。为了回答这个问题先看如下例子。设常系数线性控制系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.1}$$

的状态矩阵 A 为:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -13 & -2 & 11 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

按文[2]中所建立的方法可求得最经济结构的矩阵 B 为如下几种:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ b_{21} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ b_{31} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$b_{21} \neq 0, b_{31} \neq 0 \text{ 且 } b_{21} \neq 1, b_{31} \neq \frac{1}{3}.$$

可见对于本例的矩阵 A 其最经济结构的矩阵 B 要有两个非零元。下面分析当矩阵 A 受到摄动时最经济结构综合解(以下简称综合解)有何变化。现考虑一种特殊摄动。设只有 A 的左上角的元素摄动而成为 $1 + \varepsilon$, 其余元素不变。不难验证, 只要 $\varepsilon \neq 0$, 相应于摄动后矩阵 $A(\varepsilon)$ 的综合解为:

$$b_1 = [0001]^T \text{ 或 } b_2 = [0100]^T.$$

$$\text{对于 } b_1, \det [b_1 \ A(\varepsilon)b_1 \ A^2(\varepsilon)b_1 \ A^3(\varepsilon)b_1] = 24\varepsilon^2;$$

$$\text{对于 } b_2, \det [b_2 \ A(\varepsilon)b_2 \ A^2(\varepsilon)b_2 \ A^3(\varepsilon)b_2] = 420\varepsilon + 244\varepsilon^2.$$

因此, 无论按矩阵 A 或按 $A(\varepsilon)$ 来综合, 所得到的最经济结构在一定程度的某类摄动情况下, 都不能保持为最经济结构解。从工程的角度来看, 更重要的问题是在给定的某类摄动情况下, 原来的综合解是否仍能满足原来要求的技术约束条件, 即完全能控性。如上例中一旦所得到的状态矩阵 A 是微小摄动后的 $A(\varepsilon)$, 而以 b_1 或 b_2 向量作为最经济结构的控制矩阵时, 就有可能失去完全能控性, 因此这样的综合解就不能应用。

为此, 作者认为必须在文 [1] 对综合解提法的基础上再引进“最经济结构综合解的适定性”的概念。粗略地说, 即把在给定的某类摄动下仍能保持完全能控性的原来的综合解称为是具有“适定性”的或“适定的”。

如何定量地确定满足“适定性”的条件呢? 首先想到利用“能控性程度 ρ_c ”^[3]。但是仅用 ρ_c 一个量是不够的, 因为如上例中将 b_1 的非零元系数取得很大就可以得到足够大的 ρ_c 。为此, 本文引进在某类摄动下系统的“能控性程度变动量 $\Delta\rho_{c\max}$ ”及“能控性余度 q_c ”的概念, 来定量地分析和描述综合解的适定性问题。定义

$$q_c = (\rho_{c\min}/\rho_c) \times 100\% \quad (1.3)$$

为在某类摄动下系统 $[A, B]$ 的能控性余度, 式中

$$\rho_{c\min} = \rho_c - \Delta\rho_{c\max} \quad (1.4)$$

是在某类摄动下系统的最小能控性程度。显然, 若在某类摄动下由综合解构成的系统能控性余度 $q_c > 0$, 则该综合解是适定的。由上所述, 可以认为在结构的实际综合时, 除了给定能控性程度外, 还应给定在已知的某类摄动下的能控性余度。

二、能控性余度的估计方法

对于常系数线性控制系统 (1.1), 能控性程度的定量描写可以用

$$\rho_c = \det [Q_k Q_k^T], \quad Q_k = [B: AB: \cdots: A^{n-1}B], \quad (2.1)$$

$$\text{也可以用 } \rho_c = \lambda_{\min}[Q_k Q_k^T] \text{ 或 } \rho_c = \lambda_{\min}[W_c(t_0, t_f)]. \quad (2.2)$$

$$\text{其中 } W_c(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} e^{-At} B B^T e^{-A^T t} dt, \quad (2.3)$$

$\lambda_{\min}[W_c(t_0, t_f)]$ 是能控 Gram 阵 $W_c(t_0, t_f)$ 的最小特征值。由式 (1.3) 及 (1.4) 可知, 只要估计出在某类摄动下能控性程度的最大变动量 $\Delta\rho_{c\max}$ 就不难得到能控性余度, 而前者可分别对应于 (2.1) 及 (2.2) 式, 可按行列式值或特征值来进行估计。

三、能控性程度变动量特征值估计法

几个引理:

引理 3.1. 系统 (1.1) 完全可控的充要条件是对于任何 $t > 0$,

$$W_c(0, t) = \int_0^t e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T\tau} d\tau$$

为正定的矩阵(证明从略).

设矩阵 $E = [e_{ij}]_{n \times n}$ 其范数用下式表示:

$$\|E\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(E^T E)},$$

矩阵 $E^T E = [f_{ij}]_{n \times n}$ 是非负定的对称矩阵.

引理 3.2. 设矩阵 $E = [e_{ij}]_{n \times n}$, 若 $\max_{i,j} |e_{ij}| \leq M$, 则必有

$$\|E\|_2 \leq nM.$$

证明. 由引理的假设知: $|f_{ij}| \leq nM^2$. 若本引理的结论不成立, 即 $\|E\|_2 > nM$, 则

$$\lambda_{\max}[E^T E] > n^2 M^2.$$

令 $E^T E$ 对应于最大特征值 λ_{\max} 的特征向量为 $x_0 = [x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}]^T$, 则

$$\sum_{i=1}^n f_{ji} x_{0i} = \lambda_{\max} x_{0j}, \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

令 $|x_{0j_0}| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_{0j}|$, 现考察

$$\sum_{i=1}^n f_{j_0 i} x_{0i} = \lambda_{\max} x_{0j_0},$$

于是有

$$\begin{aligned} n^2 M^2 |x_{0j_0}| &< |\lambda_{\max} x_{0j_0}| = \left| \sum_{i=1}^n f_{j_0 i} x_{0i} \right| \leq \sum_{i=1}^n |f_{j_0 i}| |x_{0i}| \\ &\leq nM^2 \sum_{i=1}^n |x_{0i}| \leq n^2 M^2 |x_{0j_0}|, \end{aligned}$$

这是不可能的, $\therefore \|E\|_2 \leq nM$. 引理 3.2 证毕.

引理 3.3. 设矩阵 A, B, C 都是 n 阶实对称矩阵且 $C = A + B$, 令矩阵 C 的特征值由大到小的次序排列为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$; A 的特征值由大到小的次序排列为 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. 则

$$|\lambda_s - \mu_s| \leq \|B\|_2, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

证明. 引用关于实对称矩阵的特征值 minmax 特性的 Courant-Fischer 定理^[6]. 定理叙述如下:

设 C 是实对称矩阵, 令其特征值从大到小的次序排列为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. 下面考察二次型 $x^T C x$ 在受到如下约束时的 minmax 特性:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_s &= \min_{x^T x = 1} \max_{p_i^T x = 0, p_i \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s-1)} (x^T C x) \end{aligned} \right\}, \quad (3.1)$$

minmax 表明对于任意选定的一组 $p_i (i = 1, 2, \dots, s-1)$, 可以求出在 (3.1) 式约束条件下的 $\max(x^T C x)$, 然后再对一切组 $p_i (i = 1, 2, \dots, s-1)$ 求 $\max(x^T C x)$ 的最小值. Courant-Fischer 定理表明, 当 $p_i = R e_i$ 时, 能达到 minmax 值, R 是化 C 成对角阵的正交变换, e_i 是第 i 个单位列向量.

令实对称矩阵 B 的特征值由大到小的次序排列为 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, 则由 Courant-Fischer 定理知: 对于任何特殊选取的非零向量 p_i , 若

$$x^T x = 1, p_i^T x = 0, (i = 1, 2, \dots, s-1),$$

$$\text{则 } \lambda_s \leq \max(x^T C x) = \max(x^T A x + x^T B x). \quad (3.2)$$

设 S 是如下的正交矩阵:

$$S^{-1} A S = \text{diag} [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]$$

若令 $p_i = S e_i$, 则 $x^T x = 1, 0 = p_i^T x = e_i^T S^T x, (i = 1, 2, \dots, s-1)$. 令 $y = S^T x$, 则 $x^T A x = y^T S^T A S y = \sum_1^n \mu_i y_i^2, (i = 1, 2, \dots, n)$. 且 $y^T y = 1, e_i^T y = 0, (i = 1, 2, \dots, s-1)$.

于是根据这样选取的 p_i, y 的头 $s-1$ 个分量都必须为零, 而式 (3.2) 变成:

$$\lambda_s \leq \max(x^T A x + x^T B x) = \max\left(\sum_{i=s}^n \mu_i y_i^2 + x^T B x\right) \quad (3.3)$$

由于 $\sum_{i=s}^n \mu_i y_i^2 \leq \mu_s, x^T B x \leq \beta_1$, 对于任何 $x^T x = 1$ 及 $\sum_{i=s}^n y_i^2 = 1$ 成立. 因此 (3.3) 式右端括号中的项在上述条件下不大于 $\mu_s + \beta_1$, 极大值也不大于 $\mu_s + \beta_1$, 则

$$\lambda_s \leq \mu_s + \beta_1 \text{ 或 } \lambda_s - \mu_s \leq \beta_1. \quad (3.4)$$

因为 $A = C + (-B)$, 矩阵 $(-B)$ 的特征值从大到小的次序排列为 $-\beta_n, -\beta_{n-1}, \dots, -\beta_1$. 再把对 $C = A + B$ 的论证结果用于 $A = C + (-B)$, 同样可得:

$$\mu_s \leq \lambda_s + (-\beta_n) \text{ 或 } \beta_n \leq \lambda_s - \mu_s. \quad (3.5)$$

由不等式 (3.4) 及 (3.5) 可知: $|\lambda_s - \mu_s| \leq \max(|\beta_n|, |\beta_1|)$,

$\therefore |\lambda_s - \mu_s| \leq \|B\|_2, s = 1, 2, \dots, n$. 引理 3.3 证毕.

今设系统 (1.1) 的状态矩阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 受到摄动后为 $A + \varepsilon D, D$ 为满足

$$D = [d_{ij}]_{n \times n}, |d_{ij}| \leq |a_{ij}| \quad (3.6)$$

的任何实矩阵. 由引理 3.1, 如果所有的量均以标么值来表示, 则可令 $t = 1$, 而在 $[0, 1]$ 区间上, 摄动后的能控 Gram 阵为

$$W_{c\varepsilon}(0, 1) = \int_0^1 e^{-(A+\varepsilon D)t} B B^T e^{-(A+\varepsilon D)^T t} dt.$$

令 $\rho_{c\varepsilon} = \lambda_{\min}[W_{c\varepsilon}(0, 1)], \rho_c = \lambda_{\min}[W_c(0, 1)], \Delta\rho_{c\varepsilon} = \rho_c - \rho_{c\varepsilon}, \Delta\rho_{c\varepsilon}$ 称为系统在时间区间 $[0, 1]$ 上的能控性程度的变动量. 因为^[4]

$$e^{-(A+\varepsilon D)t} = e^{-At} - \varepsilon \int_0^t e^{-A(t-\tau)} D e^{-A\tau} d\tau + 0(\varepsilon)$$

$$e^{-(A+\varepsilon D)^T t} = e^{-A^T t} - \varepsilon \int_0^t e^{-A^T(t-\tau)} D^T e^{-A^T \tau} d\tau + 0(\varepsilon)$$

$$\begin{aligned} \therefore W_{c\varepsilon}(0, 1) &= \int_0^1 e^{-At} B B^T e^{-A^T t} dt - \varepsilon \left\{ \int_0^1 \left[e^{-At} B B^T \left(\int_0^t e^{-A^T(t-\tau)} D^T e^{-A^T \tau} d\tau \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\int_0^t e^{-A(t-\tau)} D e^{-A\tau} d\tau \right) B B^T e^{-A^T t} \right] dt \right\} + o(\varepsilon) \\ &= W_c(0, 1) + \Delta W_{c\varepsilon}(0, 1) + o(\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.7)$$

(3.7) 式中 $\Delta W_{c\varepsilon}(0, 1)$ 为实对称矩阵. 若不考虑 ε 的高阶项, 令

$$W'_{c\varepsilon}(0, 1) = W_c(0, 1) + \Delta W_{c\varepsilon}(0, 1), \quad (3.8)$$

其中 $\Delta W_{c\varepsilon}(0, 1) = -\varepsilon [w_{ij}]_{n \times n}$, w_{ij} 是 d_{ij} 的线性齐次函数. 可以证明 $W_c(0, 1) + \Delta W_{c\varepsilon}(0, 1)$ 与 $W_c(0, 1) + \Delta W_{c\varepsilon}(0, 1) + o(\varepsilon)$ 相对于特征值 $\lambda_{\min}[W_c(0, 1)]$ 的摄动量主部是一样的(参见附录证明). 因而 $\Delta \rho_{c\varepsilon}$ 可以用等价无穷小量 $\Delta' \rho_{c\varepsilon}$ 来估计. 这里

$$\Delta' \rho_{c\varepsilon} = \lambda_{\min}[W'_{c\varepsilon}(0, 1)] - \lambda_{\min}[W_c(0, 1)] \quad (3.9)$$

定理 3.1. 设常系数线性控制系统 (1.1) 的 n 阶状态矩阵 A 受到摄动后变为 $A + \varepsilon D$, 则 $\Delta' \rho_{c\varepsilon}$ 可有如下的上界估计式:

$$|\Delta' \rho_{c\varepsilon}| \leq \varepsilon n M,$$

其中

$$M \geq \max_{i,j} |w_{ij}|.$$

证明. 由于式 (3.8) 中 $W_c(0, 1)$, $\Delta W_{c\varepsilon}(0, 1)$ 和 $W'_{c\varepsilon}(0, 1)$ 都是实对称矩阵, 于是由引理 3.3 知

$$\begin{aligned} |\lambda_{\min}[W'_{c\varepsilon}(0, 1)] - \lambda_{\min}[W_c(0, 1)]| &\leq \|\Delta W_{c\varepsilon}(0, 1)\|_2, \\ \therefore |\Delta' \rho_{c\varepsilon}| &\leq \|\Delta W_{c\varepsilon}(0, 1)\|_2. \end{aligned}$$

由引理的假设及引理 3.2 知 $\|\Delta W_{c\varepsilon}(0, 1)\|_2 \leq \varepsilon n M$,

$$\therefore |\Delta' \rho_{c\varepsilon}| \leq \varepsilon n M. \text{ 定理 3.1 证毕.}$$

例 3.1.

设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = 10^{-3}, \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & d_{23} \\ 0 & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}.$$

由文 [2] 中所述方法可得如下几种最经济结构的矩阵 B :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

今只取第一个解矩阵 B 为例进行计算, 可得

$$W_c(0, 1) = \begin{bmatrix} 0.4323323583 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0143698132 & -0.0180290572 \\ 0 & -0.0180290572 & 1.705044913 \end{bmatrix},$$

$$\rho_c = \lambda_{\min}[W_c(0, 1)] = 0.0141775765,$$

$$\Delta W_{c\varepsilon}(0, 1) = -\varepsilon \begin{bmatrix} w_{11} & 0 & 0 \\ 0 & w_{22} & w_{23} \\ 0 & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix}.$$

其中

$$w_{11} = 0.2969972d_{11},$$

$$w_{22} = 0.0095292108d_{22} - 0.0014818872d_{32} - 0.025775852d_{23} + 0.0050835492d_{33},$$

$$w_{23} = w_{32} = -0.0006184862d_{22} + 0.0026817852d_{32} + 0.0126654868d_{23} - 0.0069429438d_{33},$$

$$w_{33} = -0.0005600424d_{22} - 0.0033606832d_{32} + 0.0067213664d_{23} + 0.0254160224d_{33}.$$

当 $|d_{ij}| \leq |a_{ij}|$, $\varepsilon = 10^{-3}$ 时, $|\Delta\rho'_{cs}| \leq 0.8909916\varepsilon = 0.0008909916$. 计算表明 $|\Delta\rho'_{cs}|$ 仅占摄动前能控性程度的 6.29%, 显然能控性余度 $q_c > 0$, 因而所取的解矩阵 B 是适定的.

由式 (3.8) 及 (3.9) 还可以应用非线性方程小分枝解的理论, 当已知摄动矩阵 D 时, 进一步求得能控性程度变动量主部的表示式, 及满足条件 (3.6) 的一切摄动下能控性程度变动量主部的最大值. 下面讨论 $\lambda_{\min}[W_c(0, 1)]$ 与 $\lambda_{\min}[W'_{cs}(0, 1)]$ 的关系.

设矩阵 $W_c(0, 1) = [w_{ij}]_{n \times n}$, 其特征方程为

$$\det[\lambda I - W_c(0, 1)] = \lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + C_1\lambda + C_0 = 0, \quad (3.11)$$

矩阵 $W'_{cs}(0, 1)$ 的特征方程为

$$\begin{aligned} \det[\lambda I - W'_{cs}(0, 1)] &= \det[\lambda I - W_c(0, 1) - \Delta W_{cs}(0, 1)] \\ &= \det[\lambda I - W_c(0, 1) + \varepsilon[w_{ij}]_{n \times n}] \\ &= \lambda^n + C_{n-1}(\varepsilon)\lambda^{n-1} + \cdots + C_1(\varepsilon)\lambda + C_0(\varepsilon) = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

这里 $C_r(\varepsilon) = p_r + p_{r,1}\varepsilon + \cdots + p_{r,n-r}\varepsilon^{n-r}$, 而且 $p_{r,k}$ 是 w_{ij} 的 k 次齐次函数, 容易看出 $C_r(0) = p_r = C_r$.

设 $\lambda_{\min}[W_c(0, 1)] = \lambda_0$, 当 ε 充分小时, 为了求方程 (3.12) 在 $\lambda = \lambda_0$ 的邻域内的解, 可以利用牛顿凸多边形方法^[5-7], 令 $\lambda - \lambda_0 = \xi$, 将方程 (3.12) 化成

$$F(\xi, \varepsilon) = \xi^n + e_{n-1}(\varepsilon)\xi^{n-1} + \cdots + e_k(\varepsilon)\xi^k + \cdots + e_1(\varepsilon)\xi + e_0(\varepsilon) = 0 \quad (3.13)$$

于是就变成求方程 (3.13) 在原点附近小分枝解的问题. 当矩阵 $[w_{ij}]_{n \times n}$ 已知时, 利用牛顿凸多边形方法就可以求出 $\lambda_{\min}[W'_{cs}(0, 1)]$ 摄动量主部的表达式.

考察方程 (3.13) 的解, 可以展成如下的级数:

$$\xi = \xi_\delta \varepsilon^\delta + \xi_{\delta'} \varepsilon^{\delta'} + \xi_{\delta''} \varepsilon^{\delta''} + \cdots \quad (3.14)$$

其中 $\delta < \delta' < \delta'' < \cdots$, $\xi_\delta \neq 0$, 或将 (3.14) 式简记成

$$\xi = \xi_\delta \varepsilon^\delta + V \quad (3.15)$$

这里 $V = o(\varepsilon^\delta)$.

为了寻找 δ 和 ξ_δ 的可能值, 将 (3.15) 式代入 (3.13) 式, 然后将 ε 的同次幂的系数收集在一起, 从最低次项开始, 分别令它们等于零. 由牛顿凸多边形方法确定找出 ε 的最低次项, 先从 (3.13) 式的左端每一项的系数中找出 ε 的最低次幂, 例如对应于 ξ^k 的系数

$e_k(\varepsilon)$ 的 ε 的最低次幂为 ρ_k , 在直角坐标系中标出相应的点 (k, ρ_k) , 然后用折线连结一部分点, 组成凸多边形, 而且使得其余所标出的点均位于凸多边形的上方, 如图 3.1 所示. 凸多边形的下降段折线相对于负实轴的斜率, 均可作为 (3.15) 式中的 δ 值. 对应于不同的斜率可以得到不同的分枝解. 当 δ 的值确定后, 将 (3.15) 式代入 (3.13) 式中, 并令所得结果中 ε 的最低次项的系数等于零, 就可以求出 ξ_δ 的值.

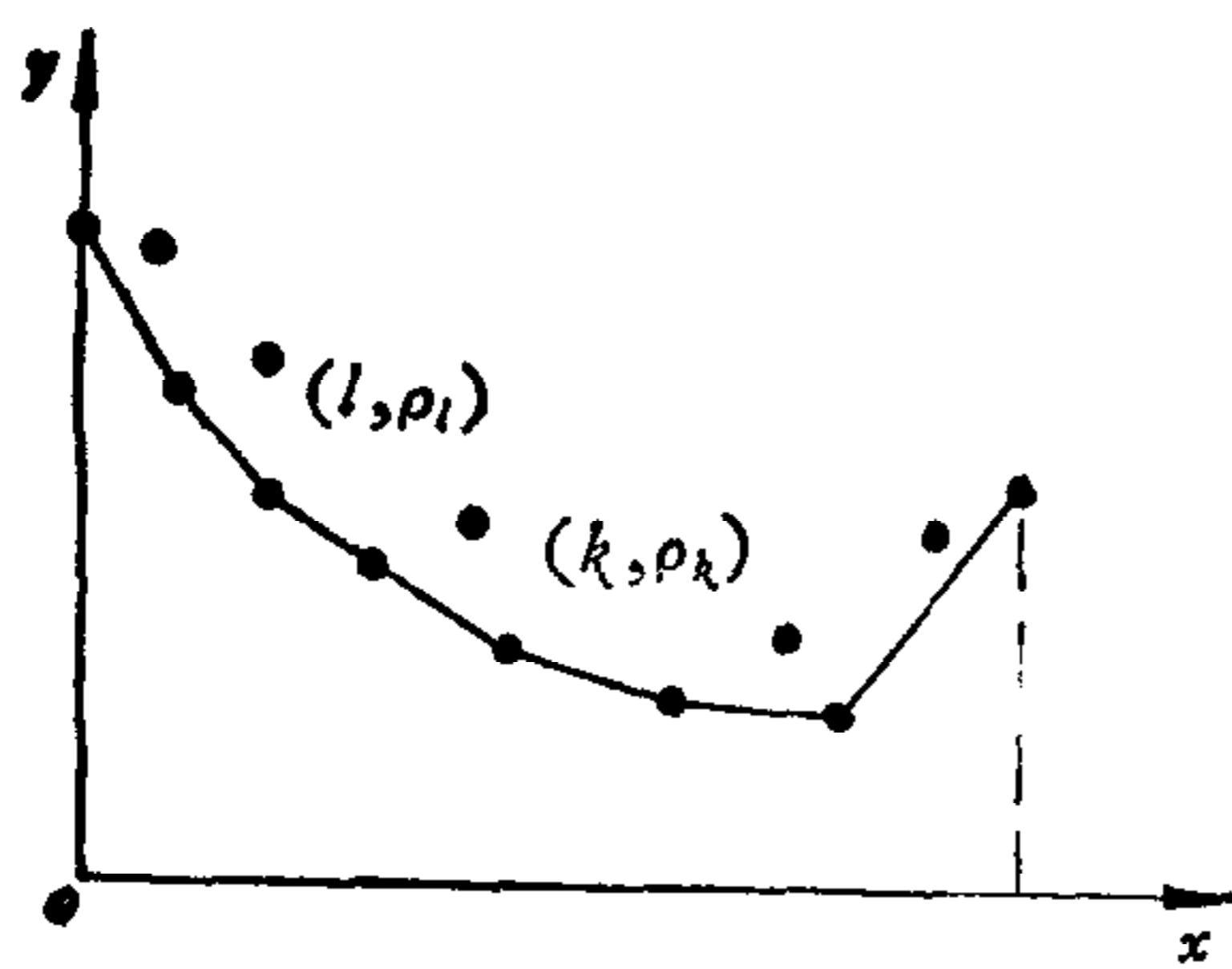


图 3.1

当 λ_0 是方程 (3.11) 的单根时有如下定理:

定理 3.2. 设 λ_0 是方程 (3.11) 的单根, 方程 (3.13) 中 $c_0(\varepsilon)$ 若含有 ε 项的系数不恒为零, 则 ξ 可以有如下的表达式:

$$\xi = \xi_\varepsilon \varepsilon + V, \quad V = 0(\varepsilon) \quad (3.16)$$

而且 ξ_ε 是诸 “ d_{ij} ” 的线性齐次函数. 为了得到 $|\xi_\varepsilon|$ 的最大值, d_{ij} 必须取 $\pm |a_{ij}|$, 视其在 ξ_ε 的表达式中系数的符号而定.

证明. 先引入一个引理:

引理 3.4. 设 $\lambda = \lambda_0$ 是方程 (3.11) 的 k 重根, k 为某一自然数, 则方程 (3.13) 中的 $c_k(\varepsilon) = c_k + c_{k,1}\varepsilon + \cdots + c_{k,n-k}\varepsilon^{n-k}$, 必有 $c_k \neq 0, c_{k-1} = 0, \cdots, c_1 = 0, c_0 = 0$. 证明省略.

由上述引理可知, 由于 λ_0 是方程 (3.11) 的单根, 所以方程 (3.13) 中系数 $c_1(\varepsilon)$ 的自由项一定不为零. 于是牛顿凸多边形的下降段仅由图 3.2 的 AB 段组成, 相对于负实轴的斜率为 1, 于是 (3.15) 式变成 (3.16) 式.

由引理 3.4 知 $c_0(\varepsilon)$ 中自由项为零. 于是将 (3.16) 式代入 (3.13) 式后 ε 的最低次幂为 1 次, 令其系数为零得:

$$e_1 \xi_\varepsilon + c_{0,1} = 0$$

$$\therefore \xi_\varepsilon = -\frac{c_{0,1}}{e_1} = -\frac{c_{0,1}}{C'_1} \quad (3.17)$$

其中 C'_1 为 (3.13) 式左端按 $(\lambda - \lambda_0)$ 的降幂排列时 $(\lambda - \lambda_0)$ 项的系数, 它不依赖于诸 “ w_{ij} ”. 由方程 (3.12) 可以看出诸多项式 $C_r(\varepsilon)$ 中, ε 的系数是由诸 “ w_{ij} ” 的线性齐次函数组成, $c_{0,1}$ 亦然. 而 w_{ij} 是 d_{ij} 的线性齐次函数, 所以 ξ_ε 也是 d_{ij} 的线性齐次函数. 由于 $|d_{ij}| \leq |a_{ij}|$, 故为了使 (3.17) 式中的 $|\xi_\varepsilon|$ 取最大值, 必须使 d_{ij} 取 a_{ij} 或 $-a_{ij}$, 视其在 ξ_ε 的表达式中系数的符号而定.

定理 3.2 证毕.

当 λ_0 是方程 (3.11) 的 k 重根以及 $c_{0,1} = c_{0,2} = \cdots = c_{0,r} = 0, c_{0,r+1} \neq 0$ 时, 也可以用上面类似方法求得分枝解. 举例说明如下.

例 3.2.

仍以例 3.1 中的已知条件为例进行计算.

$$\lambda_0 = \lambda_{\min}[W_c(0, 1)] = 0.0141775765,$$

$$\det[\lambda I - W_c(0, 1)] = (\lambda - \lambda_0)^3 - 2.109214353(\lambda - \lambda_0)^2 + 0.7071246462(\lambda - \lambda_0) = 0$$

$$\therefore C'_1 = 0.7071246462$$

又求矩阵 $W'_{ce}(0, 1)$ 的特征方程, 并将其按 $(\lambda - 0.0141775765)$ 的降幂排列得:

$$(\lambda - 0.0141775765)^3 + e'_2(\varepsilon)(\lambda - 0.0141775765)^2 + e'_1(\varepsilon)(\lambda - 0.0141775765) + e'_0(\varepsilon) = 0,$$

其中

$$e'_0(\varepsilon) = \varepsilon \times 0.4181547818 \times (-0.016134825d_{22} + 0.0026030207d_{32} + 0.0440389477d_{23} - 0.0087837961d_{33}) + 0(\varepsilon).$$

由 (3.17) 式, 为了得到能控性程度变动量主部的最大值, 必须有

$$d_{22} = 1, \quad d_{32} = -2, \quad d_{23} = -1, \quad d_{33} = 4,$$

或

$$d_{22} = -1, \quad d_{32} = 2, \quad d_{23} = 1, \quad d_{33} = -4.$$

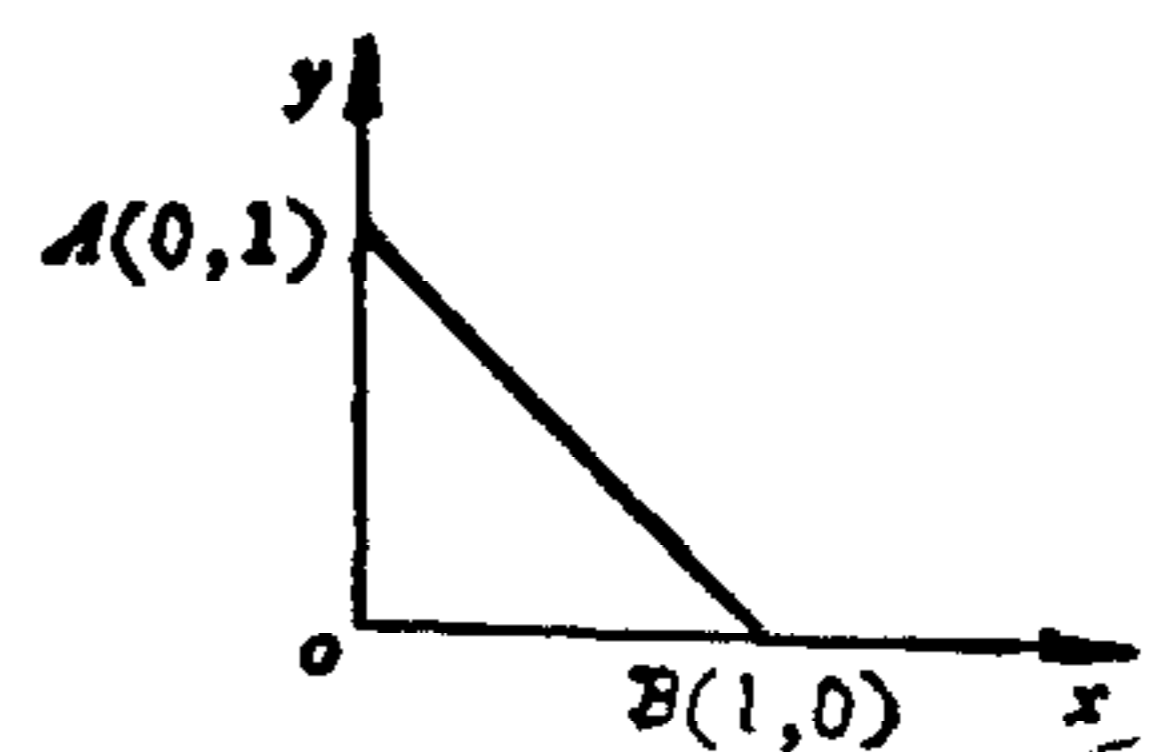


图 3.2

这时 $|\xi_s|_{\max} = 0.0594390641$.

当 $\varepsilon = 10^{-4}$ 时 $\lambda_{\min}[W'_{c\varepsilon}(0, 1)]$ 的最大摄动量的主部为

$$\varepsilon|\xi_s|_{\max} = 0.000594390641.$$

计算表明它仅占 $\lambda_{\min}[W_c(0, 1)]$ 的 4.29%，因而本例的最经济结构综合解是适定的。

综上所述，定理 3.1 利用能控 Gram 阵的对称性给出的估计式是 $\Delta\rho'_{c\varepsilon}$ 的上界估计式，其精度不如定理 3.2 所用的方法，但计算较为简捷，便于使用计算机。

四、能控性程度变动量行列式值估计法

利用 (2.1) 式可以直接求得 $\Delta\rho_{c\varepsilon}$ ，令

$$\rho_{c\varepsilon} = \det [Q_{k\varepsilon} Q_{k\varepsilon}^T], \quad Q_{k\varepsilon} = [B:(A + \varepsilon D)B:\cdots:(A + \varepsilon D)^{n-1}B],$$

则 $\Delta\rho_{c\varepsilon} = \rho_c - \rho_{c\varepsilon}$.

显然上式的右边是 ε 的多项式，当 ε 足够小时，不难得到 $\Delta\rho_{c\varepsilon}$ 的线性近似估计式，即主部估计式及 $\Delta\rho_{c\varepsilon\max}$ 的近似估计值。利用求不等式约束的多元函数极值的非线性规划方法，也可以得到 $\rho_{c\varepsilon\min}$ 的二次或更高次近似估计值。

例 4.1.

对于例 3.1 中的状态矩阵 A ，取综合解矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 进行计算，可得

$$\begin{aligned} \rho_{c\varepsilon} = & 744 - \varepsilon(696d_{22} - 888d_{32} + 264d_{33} + 1488d_{11} + 288d_{23}) + \varepsilon^2(1488d_{11}^2 + 744d_{21}^2 \\ & + 199d_{31}^2 + 36d_{12}^2 + 1572d_{22}^2 - 1218d_{32}^2 + 16d_{13}^2 - 1200d_{23}^2 + 24d_{33}^2 + 340d_{21}d_{31} \\ & + 510d_{31}d_{12} - 3198d_{22}d_{32} - 198d_{32}d_{33} + 264d_{22}d_{33} - 376d_{13}d_{31} + 752d_{13}d_{12} \\ & + 576d_{11}d_{23} + 1392d_{11}d_{22} - 1776d_{11}d_{32} + 2328d_{32}d_{23} - 1728d_{22}d_{23} + 528d_{33}d_{11} \\ & + 48d_{33}d_{23} - 248d_{12}d_{21} - 816d_{21}d_{13} - 432d_{21}d_{31}) + \cdots. \end{aligned}$$

当 $|d_{ij}| \leq 1$ ， $\varepsilon = 10^{-2}$ 时，本例中 ε^2 项的值不超过 ε 项的 5% 可略去，得 $\rho_{c\varepsilon}$ 的主部估计式：

$$\rho'_{c\varepsilon} = 744 - \varepsilon(696d_{22} - 888d_{32} + 264d_{33} + 1488d_{11} + 288d_{23}).$$

为了求得 $\rho'_{c\varepsilon\min}$ ，如下线性规划问题：

$$\begin{cases} \rho'_{c\varepsilon\min} = \min \{744 - \varepsilon(696d_{22} - 888d_{32} + 264d_{33} + 1488d_{11} + 288d_{23})\} \\ |d_{ij}| \leq 1 \end{cases}$$

显然其解为 $d_{22} = 1$ ， $d_{32} = -1$ ， $d_{33} = 1$ ， $d_{11} = 1$ ， $d_{23} = 1$ 。当 $\varepsilon = 10^{-2}$ 时， $\rho'_{c\varepsilon\min} = 707.76$ ； $\rho_c = 744$ ； $q_c = 95\%$ 。因此在本例所给定的摄动下所取的解矩阵 B 是适定的。

中国科学院自动化研究所涂序彦同志在本文写作过程中给予不少帮助，在此表示感谢。

附 录

设 λ_0 是矩阵 $W_c(0, 1)$ 的特征值，而且是方程

$$\det [\lambda I - W_c(0, 1)] = 0 \quad (\text{附 1.1})$$

的 k 重根，则下面两个矩阵

$$W_c(0, 1) + \Delta W_{c\varepsilon}(0, 1) \text{ 与 } W_c(0, 1) + \Delta W_{c\varepsilon}(0, 1) + 0(\varepsilon)$$

相对于矩阵 $W_c(0, 1)$ 特征值 λ_0 的摄动量主部相同。

证明。将 (附 1.1) 式展成按 $(\lambda - \lambda_0)$ 的降幂排列得：

$$(\lambda - \lambda_0)^n + g_{n-1}(\lambda - \lambda_0)^{n-1} + \dots + g_k(\lambda - \lambda_0)^k = 0, \quad g_k \neq 0. \quad (\text{附 1.2})$$

设

$$W_c(0, 1) = \{w_{ij}^c\}_{n \times n}, \quad \Delta W_{c\varepsilon}(0, 1) = \{-\varepsilon w_{ij}\}_{n \times n}, \quad (\text{附 1.3})$$

则

$$W_c(0, 1) + \Delta W_{c\varepsilon}(0, 1) = \{w_{ij}^c - \varepsilon w_{ij}\}_{n \times n}, \quad (\text{附 1.4})$$

$$W_c(0, 1) + \Delta W_{c\varepsilon}(0, 1) + 0(\varepsilon) = \{w_{ij}^c - \varepsilon w'_{ij}\}_{n \times n}, \quad (\text{附 1.5})$$

这里

$$w'_{ij} = w_{ij} - 0(\varepsilon) \quad (\text{附 1.6})$$

于是 $W_c(0, 1) + \Delta W_{c\varepsilon}(0, 1)$ 的特征值为如下方程的根:

$$\det [\lambda I - (W_c(0, 1) + \Delta W_{c\varepsilon}(0, 1))] = 0, \quad (\text{附 1.7})$$

$W_c(0, 1) + \Delta W_{c\varepsilon}(0, 1) + 0(\varepsilon)$ 的特征值为如下方程的根:

$$\det [\lambda I - (W_c(0, 1) + \Delta W_{c\varepsilon}(0, 1) + 0(\varepsilon))] = 0, \quad (\text{附 1.8})$$

将(附 1.7)式展成按 $(\lambda - \lambda_0)$ 的降幂排列为:

$$(\lambda - \lambda_0)^n + c_{n-1}(\varepsilon)(\lambda - \lambda_0)^{n-1} + \dots + c_1(\varepsilon)(\lambda - \lambda_0) + c_0(\varepsilon) = 0, \quad (\text{附 1.9})$$

这里

$$c_k(\varepsilon) = c_k + c_{k,1}\varepsilon + \dots + c_{k,n-k}\varepsilon^{n-k}, \quad (\text{附 1.10})$$

由于当 $\varepsilon = 0$ 时(附 1.9)将退化成(附 1.2)式,

$$\therefore c_j = g_j, \quad (j = k, \dots, n-1) \quad (\text{附 1.11})$$

将(附 1.8)式展成 $(\lambda - \lambda_0)$ 的降幂排列为

$$(\lambda - \lambda_0)^n + c'_{n-1}(\varepsilon)(\lambda - \lambda_0)^{n-1} + \dots + c'_1(\varepsilon)(\lambda - \lambda_0) + c'_0(\varepsilon) = 0, \quad (\text{附 1.12})$$

这里

$$c'_k(\varepsilon) = c'_k + c'_{k,1}\varepsilon + \dots + c'_{k,n-k}\varepsilon^{n-k} \quad (\text{附 1.13})$$

同理有

$$c'_j = g_j, \quad (j = k, \dots, n-1)$$

在方程(附 1.9)中令 $(\lambda - \lambda_0) = \xi$, 则为

$$\xi^n + c_{n-1}(\varepsilon)\xi^{n-1} + \dots + c_1(\varepsilon)\xi + c_0(\varepsilon) = 0, \quad (\text{附 1.14})$$

在方程(附 1.12)中令 $(\lambda - \lambda_0) = \eta$, 则为

$$\eta^n + c'_{n-1}(\varepsilon)\eta^{n-1} + \dots + c'_1(\varepsilon)\eta + c'_0(\varepsilon) = 0, \quad (\text{附 1.15})$$

由(附 1.4)、(附 1.5)式可以看到,方程(附 1.14)和(附 1.15)中诸系数 $c_k(\varepsilon)$ 和 $c'_k(\varepsilon)$ 的结构形式是相类似的,只要将 $c_k(\varepsilon)$ 中的诸“ w_{ij} ”换为“ w'_{ij} ”即得 $c'_k(\varepsilon)$,因此根据牛顿凸多边形方法,若求得方程(附 1.14)的解为:

$$\xi = \xi_\delta \varepsilon^\delta + 0(\varepsilon^\delta), \quad (\text{附 1.16})$$

则方程(附 1.15)的解必为

$$\eta = \xi'_\delta \varepsilon^\delta + 0(\varepsilon^\delta). \quad (\text{附 1.17})$$

这里

$$\xi_\delta = \xi_\delta(w_{ij})$$

$$\xi'_\delta = \xi_\delta(w'_{ij}) = \xi_\delta(w_{ij} - 0(\varepsilon)) = \xi_\delta(w_{ij}) + 0(\varepsilon) \quad (\text{附 1.18})$$

将(附 1.18)代入(附 1.17)中得

$$\eta = \xi_\delta(w_{ij})\varepsilon^\delta + 0(\varepsilon^\delta). \quad (\text{附 1.19})$$

由(附 1.16)和(附 1.19)即得欲证的结论.附录证毕.

参 考 文 献

- [1] 涂序彦,可控性、可观性的实用价值与“最经济结构”综合问题,第一届全国控制理论及其应用学术交流会论文集,科学出版社即将出版,1981.
- [2] 陈兆宽、张荣祥,线性控制系统最经济结构综合的代数方法,自动化学报,第七卷第三期,1981.
- [3] 关肇直、陈翰馥,线性系统的能控性和能观测性,科学出版社,1975.

-
- [4] Bellman, R., *Perturbation Techniques in Mathematics Physics and Engineering*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1964.
- [5] Vainberg, M. M., Trenogin, V. A., *Theory of Branching of Solutions of Non-linear Equations*, Noordhoff International Publishing, 1974.
- [6] Courant, R., Hilbert, D., *Methoden der Mathematischen Physik I*, 2nd. ed. Berlin, 1931.

THE WELL-POSED PROBLEM IN MES SYNTHESIS OF LINEAR CONTROL SYSTEM

ZHANG RONGXIANG

(Shandong Engineering Institute)

CHEN ZHAOKUAN

(Shandong University)

ABSTRACT

In this paper the authors reveal the well-posed problem of the solutions of the MES (the Most Economical Structure) synthesis, analyse the change of the MES solutions of the system when the state matrix A is perturbed, and introduce the concept of controllability margin of the system. Two methods for the estimation of controllability margin are proposed with numerical examples and discussions.