第7卷 第3期　　自 动 化 学 报　　Vol. 7, No. 3
1981 年 7 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 1981

全状态输出调节系统的结构

王 恩 平
(中国科学院系统科学研究所)

摘　　要

本文讨论了全状态输出调节系统的结构，得到了全状态输出调节器的结构特征，给出了开环系统存在全状态输出调节器的充分必要条件.

一、问题的叙述

在设计反馈控制系统时，人们常常关心系统的抗干扰问题. 处理干扰问题，一般可采取三种不同的方式. 第一种是干扰适应性方式，按照这种方式设计师们可以设计出输出无静差或结构无静差系统. 象"内模原理"或 Robust 调节器理论都是按这种干扰适应性方式消除干扰的. 这种方式消除干扰的特点是在整个系统中包含着闭环零点和外部输入信号的极点之间的零极相消，它是系统设计中普遍被采用的方式. 第二种是干扰补偿方式. 按照这种处理干扰的方式要求系统干扰能直接量测或间接估计，同时通过控制回路能够实现对干扰的补偿. 这里所讨论的全状态输出调节系统就是按这种处理干扰的方式所设计出来的一类控制系统. 这种处理干扰的方式对开环系统的要求条件比较严格，因此它的适用范围比较窄，但本文给出了能用干扰补偿方式处理干扰的开环系统所必须具备的结构性质，这就是定理 3 所讨论的主要内容. 能够实现干扰补偿的闭环系统就是我们所说的全状态输出调节系统. 第三种方式是采用随机控制的方式，它主要是处理随机干扰的一种办法，不是本文讨论的内容.

已知定常线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1 = A_1\boldsymbol{x}_1 + A_3\boldsymbol{x}_2 + B_1\boldsymbol{u}, \tag{1.1a}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2 = A_2\boldsymbol{x}_2, \tag{1.1b}$$

$$\boldsymbol{y} = C_1\boldsymbol{x}_1, \tag{1.1c}$$

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}_1. \tag{1.1d}$$

其中 $\boldsymbol{x}_1$ 是 n_1 维系统状态矢量，$\boldsymbol{u}$ 是 r 维控制输入矢量，$\boldsymbol{y}$ 是 m 维量测输出矢量，$\boldsymbol{z}$ 是 n_1 维调节输出矢量，$\boldsymbol{x}_2$ 是 n_2 维干扰输入矢量. A_1、A_2、A_3、B_1、C_1 分别是 $n_1\times n_1$、$n_2\times n_2$、$n_1\times n_2$、$n_1\times r$、$m\times n_1$ 阶常值矩阵. 假设

$$\sigma(A_2)\subset\mathscr{C}^+$$

$$\operatorname{rank} A_3 = n_2$$

这里 $\sigma(\cdot)$ 表示矩阵的特征值集合，$\mathscr{C}^-$ 和 $\mathscr{C}^+$ 分别表示复平面的左半开平面和右半闭平面.

现在考虑系统 (1.1) 的动态补偿器

$$\dot{\boldsymbol{x}}_c = A_c\boldsymbol{x}_c + B_c\boldsymbol{y}, \tag{1.2a}$$

$$\boldsymbol{u} = F_c\boldsymbol{x}_c + F\boldsymbol{y}. \tag{1.2b}$$

这里，$\boldsymbol{x}_c$ 为 n_c 维补偿器的状态，A_c、B_c、F_c 和 F 分别表示 $n_c \times n_c$、$n_c \times m$、$r \times n_c$ 和 $r \times m$ 阶矩阵. 于是闭环系统为

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{x}}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1FC_1 & B_1F_c \\ B_cC_1 & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_3 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_2, \tag{1.3a}$$

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}_1. \tag{1.3b}$$

定义 1. 如果

① 闭环系统稳定,即

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} A_1 + B_1FC_1 & B_1F_c \\ B_cC_1 & A_c \end{bmatrix}\right) \subset \mathscr{C}^-,$$

② 对任意 $\boldsymbol{x}_2(t_0) = \boldsymbol{x}_{20}$ 都有 $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{z} = 0$,

那么我们称补偿器 (1.2) 为系统 (1.1) 的一个全状态输出调节器.

带有全状态输出调节器的闭环系统叫做全状态输出调节系统.

我们所讨论的问题是:

1. 补偿器 (1.2) 为系统 (1.1) 的一个全状态输出调节器的充分必要条件,从而得到全状态调节系统的结构特征;

2. 系统 (1.1) 存在全状态输出调节器的充分必要条件，从而给出设计全状态输出调节器的方法.

基本引理. 已知线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}_L = A_L\boldsymbol{x}_L + A_3\boldsymbol{x}_2,$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2 = A_2\boldsymbol{x}_2,$$

$$\boldsymbol{z}^* = D_L\boldsymbol{x}_L + D_2\boldsymbol{x}_2.$$

其中，$\boldsymbol{x}_L$ 是 n_L 维系统状态矢量，$\boldsymbol{x}_2$ 是 n_2 维干扰输入矢量，$\boldsymbol{z}^*$ 是 q 维调节输出矢量，A_L、A_2、A_3、D_L 和 D_2 分别表示 $n_L \times n_L$、$n_2 \times n_2$、$n_L \times n_2$、$q \times n_L$ 和 $q \times n_2$ 阶常值矩阵. 并假设 $\sigma(A_L) \subset \mathscr{C}^-$, $\sigma(A_2) \subset \mathscr{C}^+$. 则为使对任意 $\boldsymbol{x}_2(t_0) = \boldsymbol{x}_{20}$ 都有 $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{z}^* = 0$ 的充分必要条件是,存在一个 $n_L \times n_2$ 阶矩阵 V, 使得

$$A_LV - VA_2 = A_3,$$

$$D_LV = D_2.$$

这个引理在参考文献 [2] 中可以查到.

二、全状态输出调节系统的结构性质

为说明全状态输出调节系统的结构性质,主要证明如下定理.

定理 1. 为使补偿器 (1.2) 成为系统 (1.1) 的全状态输出调节器的充分必要条件是，闭环系统稳定,并存在 $n_c \times n_2$ 阶矩阵 V_2, 使得

$$B_1F_cV_2 = A_3, \tag{2.1a}$$

$$A_cV_2 = V_2A_2, \tag{2.1b}$$

$$\mathrm{rank}\ V_2 = n_2.$$

证明：必要性——假设补偿器 (1.2) 是系统 (1.1) 的一个全状态输出调节器．因此，闭环系统 (1.3) 稳定，即

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} A_1 + B_1FC_1 & B_1F_c \\ B_cC_1 & A_c \end{bmatrix}\right) \subset \mathscr{C}^-,$$

同时对任意 $\boldsymbol{x}_2(t_0) = \boldsymbol{x}_{20}$ 都有 $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{z} = 0$．依基本引理知，存在 $n_1 \times n_2$ 和 $n_c \times n_2$ 阶矩阵 V_1 和 V_2，使得

$$(A_1 + B_1FC_1)V_1 - V_1A_2 + B_1F_cV_2 = A_3,$$

$$B_cC_1V_1 + A_cV_2 - V_2A_2 = 0,$$

$$V_1 = 0.$$

因此有：

$$B_1F_cV_2 = A_3,$$

$$A_cV_2 = V_2A_2.$$

由于 $\mathrm{rank}\ A_3 = n_2$，因此必有 $\mathrm{rank}\ V_2 = n_2$．

充分性——若闭环系统稳定，并且等式 (2.1) 成立，那么由基本引理知，对任意 $\boldsymbol{x}_2(t_0) = \boldsymbol{x}_{20}$ 必有 $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{z} = 0$，只要取 $V_1 = 0$．这说明补偿器 (1.2) 是系统 (1.1) 的一个全状态输出调节器．证毕．

现在来分析定理 1 的条件．等式 (2.1a) 说明

$$\mathrm{rank}\ [B_1A_3] = \mathrm{rank}\ B_1 \tag{2.2}$$

这就是说，如果 $\boldsymbol{x}_2$ 已知，则存在 $\boldsymbol{u}_c$，使得

$$A_3\boldsymbol{x}_2 = B_1\boldsymbol{u}_c.$$

从而说明，一旦能测得干扰，就能决定控制，实现干扰补偿．因此，我们把等式 (2.2) 叫做干扰补偿条件．若 (2.2) 成立，那么我们就说系统 (1.1) 的干扰是能补偿的．

等式 (2.1b) 告诉我们，若令 $\mathscr{V}_2 = I_mV_2$，则 A_2 是 A_c 在 $\mathscr{V}_2$ 上的限制，即

$$A_2 = A_c|\mathscr{V}_2.$$

由于 V_2 满秩，因此如果取 $n_c \times n_c$ 阶可逆矩阵

$$T = [T_1V_2]$$

并做坐标变换：　　$\boldsymbol{z}_c = T^{-1}\boldsymbol{x}_c,$

那么补偿器 (1.2) 可变成

$$\boldsymbol{z}_c = \bar{A}_c\boldsymbol{z}_c + \bar{B}_c\boldsymbol{y}, \tag{2.3a}$$

$$\boldsymbol{u} = \bar{F}_c\boldsymbol{z}_c + F\boldsymbol{y}. \tag{2.3b}$$

其中：

$$\bar{A}_c = T^{-1}A_cT = \begin{bmatrix} A_{c_1} & 0 \\ A_{c_2} & A_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_c = T^{-1}B_c \quad \bar{F}_c = F_cT$$

而 A_{c_1}、A_{c_2} 分别为 $n_{c_1} \times n_{c_1}$、$n_{c_1} \times n_2$ 阶矩阵，并且 $n_{c_1} + n_2 = n_c$．若令

$$z_c = \begin{bmatrix} z_{c_1} \\ z_{c_2} \end{bmatrix} \quad \bar{B}_c = \begin{bmatrix} \bar{B}_{c_1} \\ \bar{B}_{c_2} \end{bmatrix} \quad \bar{F}_c = [\bar{F}_{c_1} \bar{F}_{c_2}],$$

这里 z_{c_1}、z_{c_2} 分别为 n_{c_1}、n_2 维矢量，$\bar{B}_{c_1}$、$\bar{B}_{c_2}$、$\bar{F}_{c_1}$、$\bar{F}_{c_2}$ 分别为 $n_{c_1} \times m$、$n_2 \times m$、$r \times n_{c_1}$、$r \times n_2$ 阶矩阵，则补偿器 (2.3) 又可写做

$$\dot{z}_{c_1} = A_{c_1} z_{c_1} + \bar{B}_{c_1} y \tag{2.4a}$$

$$\dot{z}_{c_2} = A_{c_2} z_{c_1} + A_2 z_{c_2} + \bar{B}_{c_2} y \tag{2.4b}$$

$$u = \bar{F}_{c_1} z_{c_1} + \bar{F}_{c_2} z_{c_2} + F y \tag{2.4c}$$

这说明，在补偿器 (2.2) 或 (2.4) 中包含了一个与外部干扰信号的动力学完全相同的动力学模型，而由它所形成的控制信号主要用于补偿外部干扰对系统的影响. 这可由等式 (2.1a) 看出. 改写等式 (2.1a) 有

$$B_1 \bar{F}_c T^{-1} V_2 = A_3, \tag{2.5}$$

而

$$T^{-1} V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_2} \end{bmatrix}.$$

所以由 (2.5) 式可知

$$B_1 \bar{F}_{c_2} = A_3 \tag{2.6}$$

这表明，在控制规律 (2.4c) 中，$\bar{F}_{c_2} z_{c_2}$ 项是用于抵消干扰的. 图 1 给出的就是全状态输出调节系统的结构图方块图.

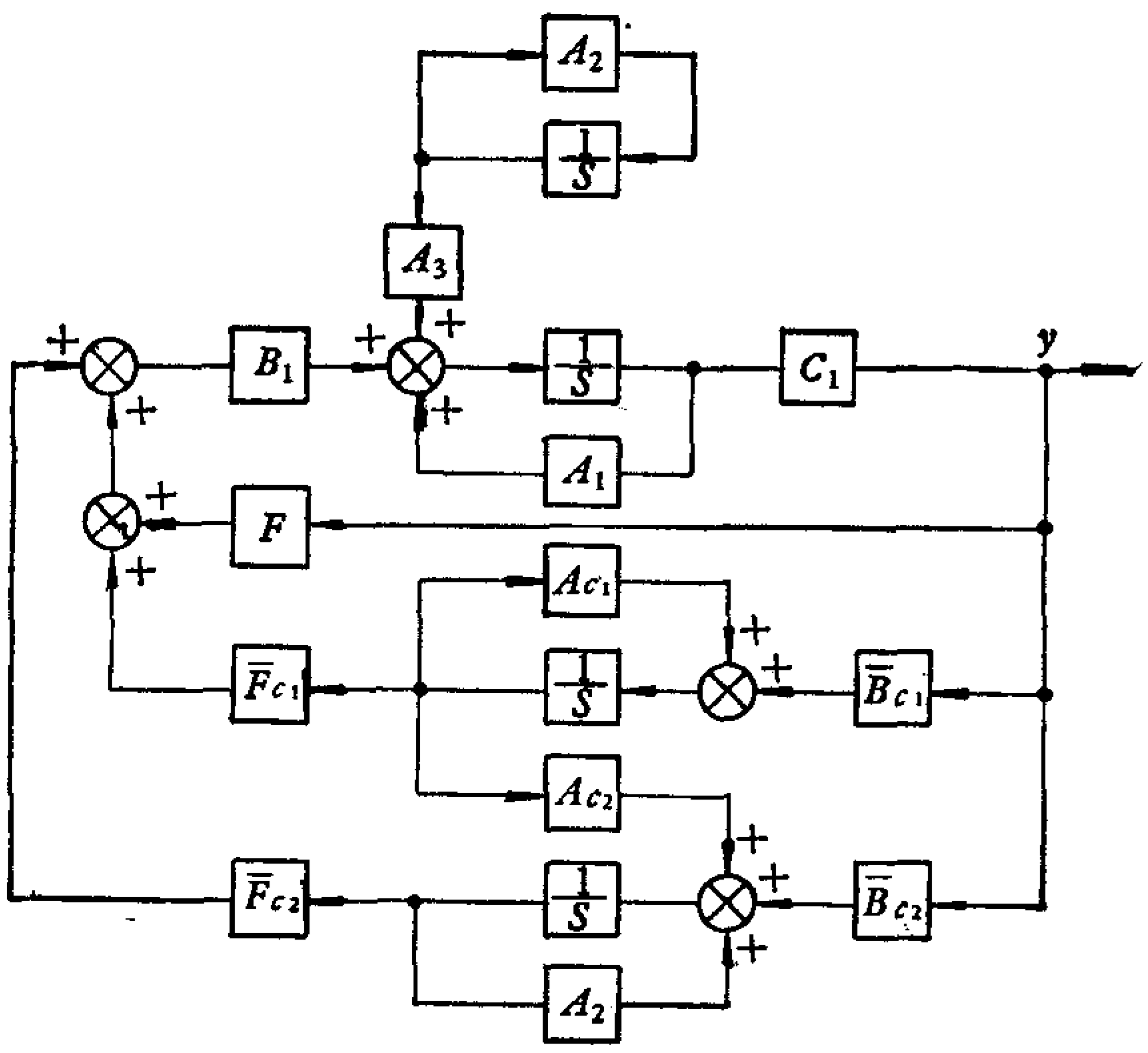

图 1 全状态输出调节系统的结构图

三、全状态输出调节器的存在性

有了全状态输出调节系统的结构性质之后，主要的问题是系统 (1.1) 存在全状态输出调节器的条件以及设计方法. 于是我们有

定理 2. 系统 (1.1) 存在全状态输出调节器的充分必要条件是:

① (A_1, B_1) 能稳，(A_1, C_1) 能检测；

② $\operatorname{rank}\,[B_1 \mid A_3] = \operatorname{rank} B_1$；

③ 对每个 $\lambda_0 \in \sigma(A_2)$ 都有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_1 - \lambda_0 I_{n_1} & A_3 \\ 0 & A_2 - \lambda_0 I_{n_2} \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} = n_1 + n_2.$$

证明：定理充分性的证明已在文献 [1] 中讨论过了，并且已给出了设计方法，不同的是在文献 [1] 中，我们曾经假设(A_1, B_1)能控，(A_1, C_1)能观测，这里我们仅限制在(A_1, B_1)能稳，(A_1, C_1) 能检测的条件下．而这并不妨碍构造一个全状态输出调节器．下面我们主要证明必要性．

假设 (1.2) 给出的是系统 (1.1) 的一个全状态输出调节器，那么由定理 1 知，条件②自然成立，同时由闭环稳定可知，对任意 $\lambda \in \mathscr{C}^+$ 都有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_1 + B_1 F C_1 - \lambda I_{n_1} & B_1 F_c \\ B_c C_1 & A_c - \lambda I_{n_c} \end{bmatrix} = n_1 + n_c.$$

由此立即可以推知，对任意 $\lambda \in \mathscr{C}^+$ 有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_1 - \lambda I_{n_1} \\ C_1 \end{bmatrix} = n_1,$$

$$\operatorname{rank}\,[A_1 - \lambda I_{n_1} B_1] = n_1.$$

这说明定理 2 的条件①是正确的．

又由定理 1 知有满秩矩阵 V_2 存在，使得

$$A_c V_2 = V_2 A_2$$

和定理 1 的说明一样，我们可取可逆矩阵 T，并且有

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_1 + B_1 F C_1 - \lambda I_{n_1} & B_1 F_c \\ B_c C_1 & A_c - \lambda I_{n_c} \end{bmatrix} \\
&= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 + B_1 F C_1 - \lambda I_{n_1} & B_1 F_c \\ B_c C_1 & A_c - \lambda I_{n_c} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \\
&= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_1 + B_1 F C_1 - \lambda I_{n_1} & B_1 \bar{F}_{c_1} & B_1 \bar{F}_{c_2} \\ \bar{B}_{c_1} C_1 & A_{c_1} - \lambda I_{n_{c_1}} & 0 \\ \bar{B}_{c_2} C_1 & A_{c_2} & A_2 - \lambda I_{n_2} \end{bmatrix} = n_1 + n_{c_1} + n_2
\end{aligned}$$

再从对定理 1 的说明有

$$B_1 \bar{F}_{c_2} = A_3,$$

于是，对每个 $\lambda \in \mathscr{C}^+$ 必有

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_1 + B_1 F C_1 - \lambda I_{n_1} & A_3 \\ \bar{B}_{c_2} C_1 & A_2 - \lambda I_{n_2} \\ \bar{B}_{c_1} C_1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & B_1 F \\ 0 & I_{n_2} & \bar{B}_{c_2} \\ 0 & 0 & \bar{B}_{c_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 - \lambda I_{n_1} & A_3 \\ 0 & A_2 - \lambda I_{n_2} \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} = n_1 + n_2.
\end{aligned}$$

从而有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_1-\lambda I_{n_1} & A_3 \\ 0 & A_2-\lambda I_{n_2} \\ C_1 & 0 \end{bmatrix}=n_1+n_2,\ \forall\lambda\in\mathscr{C}^+.$$

这当然使定理的条件③成立. 证毕.

分析这个定理的条件我们可以看出,条件②说明了干扰补偿条件,条件①和③保证了把干扰 $\boldsymbol{X}_2$ 做为扩充状态引入系统之后,扩充系统是能检测的,这是文献 [1] 中所说的干扰能估计的条件. 由此可见,对一个能稳系统,如果它满足干扰补偿条件和干扰能估计条件,则一定存在全状态输出调节器. 这就是文献 [1] 的主要结论.

四、结 束 语

参考文献 [1] 已讨论了全状态输出调节器存在的充分条件及其设计方法. 本文说明了那里给出的条件也是必要的. 同时我们在本文还讨论了全状态输出调节系统的一般结构,说明了在全状态输出调节器中一定包含一个与外部干扰信号动力学相同的动力学模型. 从而告诉我们,按文献 [1] 提供的设计方法所得到的全状态输出调节系统结构的必然性. 它为工程技术人员给出了设计全状态输出调节器的一般原则.

最后我们指出,如果补偿器 (1.2) 是系统 (1.1) 的一个全状态输出调节器,那么它对系统的标称参数 A_1、C_1、A_{c_1}、A_{c_2}、F、$\bar{F}_{c_1}$ 具有 Robust 性质.

参 考 文 献

[1] 王恩平,线性反馈控制系统的未知干扰补偿设计,全国控制理论及其应用学术交流会论文集,科学出版社待出版,(1981 年).

[2] B. A. Francis and W. M. Wonham, The Internal Model Principle for Linear Multivariable Regulators, *J. Appl. Math. Optimization* (2) (1975), 170—194.

THE STRUCTURE OF FULL STATE REGULATING SYSTEMS

WANG ENPING

(Institute of Systems Science, Academia Sinica)

Abstract

In this paper the structure of full state regulating systems is considered and the structural properties of full state regulator are obtained. For the open loop systems sufficient and necessary conditions for existence of such a regulator are given.