

金属加热的数学模型与控制

宋瑞玉 邵可振¹⁾

(武汉数学物理研究所) (中南电力设计院)

摘 要

本文以温度四次方关系为辐射传热的边界条件,对传统的热传导方程进行简化与线性化,提出了动态边界的传热方程,建立了金属加热过程的动态数学模型。通过大量试验,证实了该模型的可行性,并用电子计算机对各种钢锭加热过程实现了自动控制。

近年来,用分布参量法研究热传导理论有所进展,但在处理边界问题上仍有困难。为此必须简化以辐射为主的边界传热的温度四次方关系。作者提出一个动态边界传热方程式来描述炉温和金属表面温度之间的传热关系,并把传统的热传导方程^[2]加以线性化,两者结合建立了本文关于金属加热过程的动态模型结构。

一、热传导方程的线性处理

金属加热过程,习惯上采用传统的热传导方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (1.1)$$

其中 T 为金属在不同受热状态时的温度, a 为热扩散系数 (Thermal Diffusion)^[3], 且

$$a = \frac{d}{c\rho}, \quad (1.2)$$

其中 d 为热导系数 (Thermal Conductivity Coefficient), c 为比热, ρ 为密度。采用 $\text{g} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}$ 制单位, a 的单位为 cm^2/s 。现设金属加热体断面宽度为 B , 高为 H (见图 1), 炉内温度为 T_s , 被加热金属表面温度为 T_s ; 中心温度设为 T_c 。利用差分方法^[4], 把加热金属断面分为四等分²⁾, 则有

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_s - 2T_c + T_s}{(B/2)^2} = \frac{8}{B^2} (T_s - T_c). \quad (1.3)$$

类推,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{8}{H^2} (T_s - T_c). \quad (1.4)$$

本文于 1980 年 9 月 22 日收到。

1) 参加本文试验工作的有武钢初轧厂薛金山、张贤珍、张志宏、王俊锋、郭新华、魏克玲、潘绪全、施素琴、吴小燕等同志。

2) 因图形对称, 取 $\Delta x = \frac{B}{2}$; 对不规则形状, 利用[4]中方法可化为矩阵形式, 计算各点温度。

方程(1.1)化为

$$\frac{dT_c}{dt} = 8a \left(\frac{1}{B^2} + \frac{1}{H^2} \right) (T_s - T_c). \quad (1.5)$$

若被加热钢锭为方形时 $H = B$, 式(1.5)为

$$\frac{dT_c}{dt} = \frac{16a}{H^2} (T_s - T_c). \quad (1.6)$$

令式(1.6)中系数为 Ra , 则改为

$$\frac{dT_c}{dt} = Ra(T_s - T_c). \quad (1.7)$$

由 $T_s \geq T_c$ 决定金属是受热还是散热.

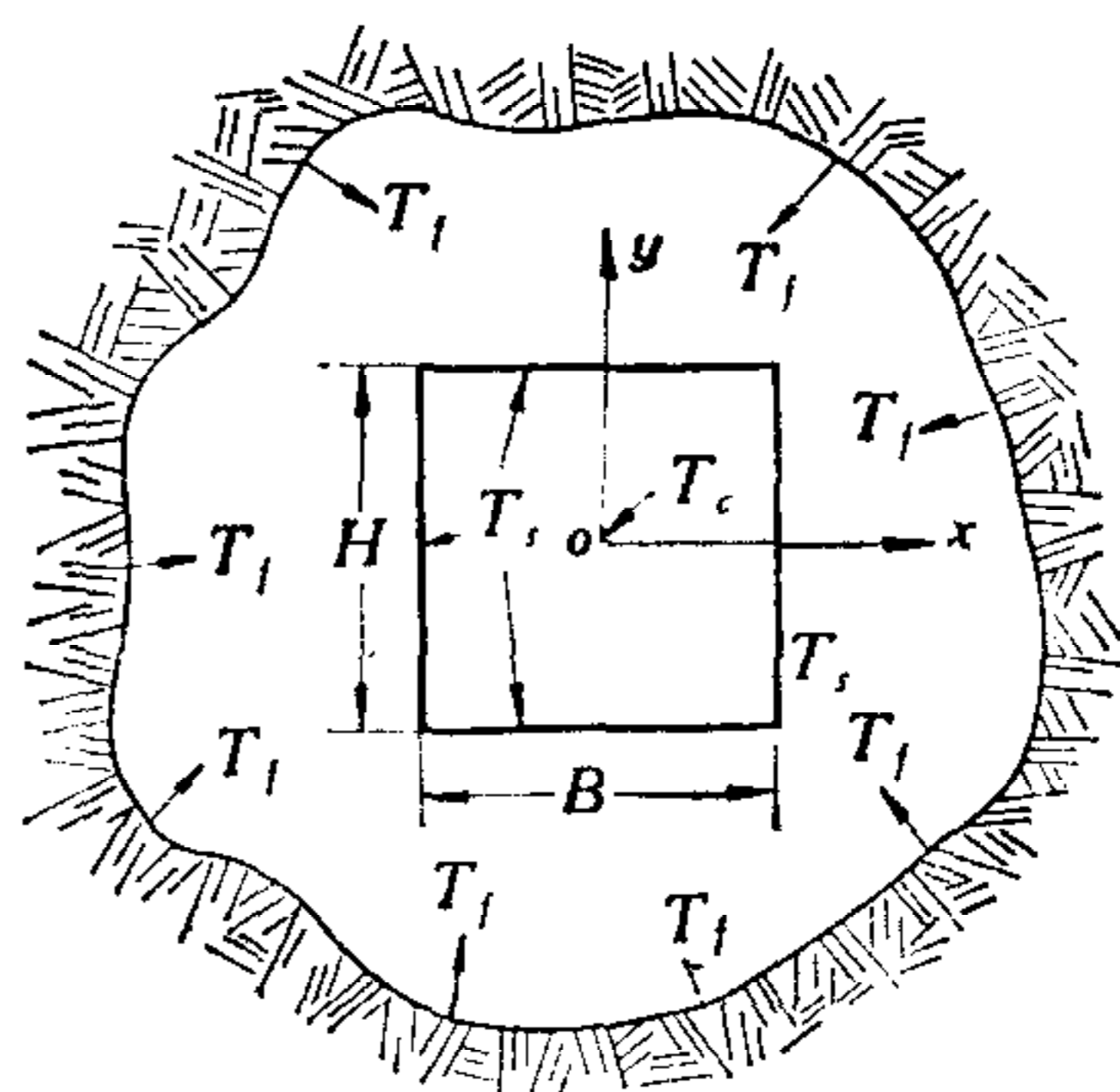


图1 金属二维加热分析示意

二、边界传热的动态形式

把传统热传导边界问题转化为动态边界传热方程式.

当炉温 T_f 大于被加热物体表面的温度时, 由辐射和对流传热方式进行热量传递. 据传统理论, 在辐射传热时热流 q_r 由下式确定^[5]:

$$q_r = \varepsilon \sigma_0 \left[\left(\frac{T_f + 273}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_s + 273}{100} \right)^4 \right], \quad (2.1)$$

其中 ε 为被加热体黑度系数; σ_0 是绝对黑体的辐射常数, 一般取 $4.9k \text{ cal/m}^2 \cdot \text{h} \cdot \text{°K}^4$ ^[5]; 如果 σ_0 乘上 10^{-8} , 即为 Stefan-Boltzmann 常数.

令

$$\alpha_r = \varepsilon \sigma_0 \left[\left(\frac{T_f + 273}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_s + 273}{100} \right)^4 \right] / (T_f - T_s), \quad (2.2)$$

则式(2.1)改写成

$$q_r = \alpha_r (T_f - T_s). \quad (2.3)$$

相应的对流传热方程式

$$q_s = \alpha_s (T_f - T_s), \quad (2.4)$$

其中 α_s 为对流传热系数, 它的确定比较复杂, 一般可由经验公式算得.

高温炉子热工设计计算中, 通常强调辐射传热而忽视对流传热. 本文定总热流 q_{rs} 为

$$q_{rs} = q_r + q_s = (\alpha_r + \alpha_s)(T_f - T_s) = \alpha_{rs}(T_f - T_s), \quad (2.5)$$

其中 α_{rs} 为热量传递系数, 显见

$$\alpha_{rs} = \alpha_r + \alpha_s = \frac{\varepsilon \sigma_0 \left[\left(\frac{T_f + 273}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_s + 273}{100} \right)^4 \right] + \alpha_s}{T_f - T_s}. \quad (2.6)$$

对于二维空间, 受热体四面受热, 若每面的面积为 F , 在 Δt 时间内物体所受热量为

$$Q = 4F q_{rs} \Delta t = 4F \alpha_{rs} (T_f - T_s) \Delta t. \quad (2.7)$$

物体受热后表面温度及中心温度均升高, 在 Δt 时间内, 被加热物体温度升高 $\frac{1}{2} (\Delta T_s + \Delta T_c)$ 度所需热量为

$$Q = c\rho V \frac{1}{2} (\Delta T_s + \Delta T_c). \quad (2.8)$$

则由式 (2.7), (2.8) 得出热平衡方程式

$$4F\alpha_{rs}(T_f - T_s)\Delta t = c\rho V \frac{1}{2} (\Delta T_s + \Delta T_c). \quad (2.9)$$

其中 V 为体积. 当上式 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 则有

$$\frac{dT_s}{dt} + \frac{dT_c}{dt} = \frac{8F\alpha_{rs}}{c\rho V} (T_f - T_s). \quad (2.10)$$

将式 (1.7) 代入 (2.10) 中, 则得到

$$\frac{dT_s}{dt} = \frac{8F\alpha_{rs}}{c\rho V} (T_f - T_s) - Ra(T_s - T_c). \quad (2.11)$$

定义边界传热系数 α_Σ 为

$$\alpha_\Sigma = \frac{8F\alpha_{rs}}{c\rho V} - Ra \frac{T_s - T_c}{T_f - T_s}, \quad (2.12)$$

则式 (2.11) 可写为

$$\frac{dT_s}{dt} = \alpha_\Sigma (T_f - T_s). \quad (2.13)$$

即为动态边界传热方程式, 其边界传热系数 α_Σ 不为常数.

将式 (1.7), (2.13) 写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \dot{T}_c \\ \dot{T}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Ra & Ra \\ 0 & \alpha_\Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_c \\ T_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_\Sigma \end{pmatrix} T_f, \quad (2.14)$$

即

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{A}\mathbf{T} + \mathbf{B}T_f. \quad (2.15)$$

(2.5) 式为金属加热动态数学模型. 用 n 态时序处理, 进行差分, 使

$$\dot{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{T}(n+1) - \mathbf{T}(n)}{(n+1) - n},$$

令 $\bar{A}(n) = A(n) + I$, I 为么阵, 经叠代后, 归纳为

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(n+1) &= \bar{A}(n)\bar{A}(n-1)\cdots\bar{A}(0)\mathbf{T}(0) \\ &+ \bar{A}(n)\bar{A}(n-1)\cdots\bar{A}(1)\mathbf{B}(0)T_f(0) \\ &+ \bar{A}(n)\bar{A}(n-1)\cdots\bar{A}(2)\mathbf{B}(1)T_f(1) \\ &+ \cdots + \bar{A}(n)\mathbf{B}(n-1)T_f(n-1) + \mathbf{B}(n)T_f(n), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$(n = 0, 1, 2, \dots, N-1).$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_\Sigma(n) &= \frac{8F\varepsilon\sigma_0}{c\rho V} \left[\frac{\left(\frac{T_f(n) + 273}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_s(n) + 273}{100}\right)^4}{T_f(n) - T_s(n)} \right] \\ &- Ra \frac{T_s(n) - T_c(n)}{T_f(n) - T_s(n)} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1), \end{aligned} \quad (2.17)$$

根据设定的炉温飞升曲线, 计算被加热金属 T_s 及 T_c 的最终值. 图 2 表明炉温与金属表面和中心温度之间的关系.

三、钢锭加热的实例计算

采用冷钢锭在均热炉内加热的实例. 钢锭重为 8.55T, 比重 ρ 为 7.8 T/m^3 , 上部尺寸为 $0.84 \times 0.76 \text{ m}^2$, 下部尺寸为 $0.72 \times 0.64 \text{ m}^2$, 且为一般碳素钢. $H = 0.74 \text{ m}$. 采用差分方法计算在瞬时炉温设定值 $T_f(t)$ 条件下金属表面及中心温度 T_s 及 T_c . 加热时间以十分钟为单位, 则将式 (1.7) 及 (2.13) 中系数用 6 除之, 即有

$$\frac{R}{6} = \frac{16}{6H^2} = \frac{16}{6(0.74)^2} \doteq 4.8697.$$

由对碳钢 CT₃ 的实验, 得出比热 c 及热扩散系数 a 的回归规律为

$$\begin{aligned} c(n) &= 0.116 + 0.000046T_{sc}(n), \\ a(n) &= 0.05 - 0.000014166T_{sc}(n), \quad (n = 0, 1, \dots, N-1). \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 T_{sc} 为表面及中心的平均温度, 即

$$T_{sc}(n) = \frac{1}{2} [T_s(n) + T_c(n)], \quad (n = 0, 1, \dots, N-1). \quad (3.2)$$

在边界传热系数 α_Σ 中令 $\varepsilon = 0.8$, $\sigma_0 = 4.9 \text{ kcal/m}^2 \cdot \text{h} \cdot \text{K}^4$, 而 $F/V \doteq 1/0.74 \text{ m}$. 式 (2.17) 在计算中不以绝对温度计量, 而略去 273. 又令

$$\begin{aligned} \beta(n) &= Ra(n)/6 = 4.8697a(n) \\ \beta_\Sigma(n) &= \alpha_\Sigma(n)/6, \quad (n = 0, 1, \dots, N-1). \end{aligned} \quad (3.3)$$

则式 (2.17) 写成

$$\beta_\Sigma(n) = 0.000231 \frac{\alpha_r(n)}{c(n)} - \beta(n) \frac{\Delta T_{sc}(n)}{\Delta T_{fs}(n)} \quad (3.4)$$

其中

$$\alpha_r(n) = 3.92 \left[\left(\frac{T_f(n)}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_s(n)}{100} \right)^4 \right] / \Delta T_{fs}(n), \quad (3.5)$$

$$\Delta T_{sc}(n) = T_s(n) - T_c(n), \quad (3.6)$$

$$\Delta T_{fs}(n) = T_f(n) - T_s(n). \quad (3.7)$$

于是, 在钢锭初始温度 $T_s(0) = T_c(0) = 30^\circ\text{C}$ 及炉子初始温度 $T_f(0)$ 为 1100°C 下, 依据式

$$\begin{aligned} T_c(n+1) &= T_c(n) + \beta(n)\Delta T_{sc}(n), \\ T_s(n+1) &= T_s(n) + \beta_\Sigma(n)\Delta T_{fs}(n), \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \end{aligned} \quad (3.8)$$

计算 T_s , T_c 各时态的值(见表 1).

实际上, 一般钢锭加热其表面温度 T_s 要求有一定范围, 并且表面与中心温度之间差值要满足一定值时才允许钢锭出炉. 我们的模型要求:

一般碳素钢(其中 $C < 0.25\%$), 温差 ΔT_{sc} 为 $70\text{--}80^\circ\text{C}$; 对钢 3 为 60°C ; 高碳钢及

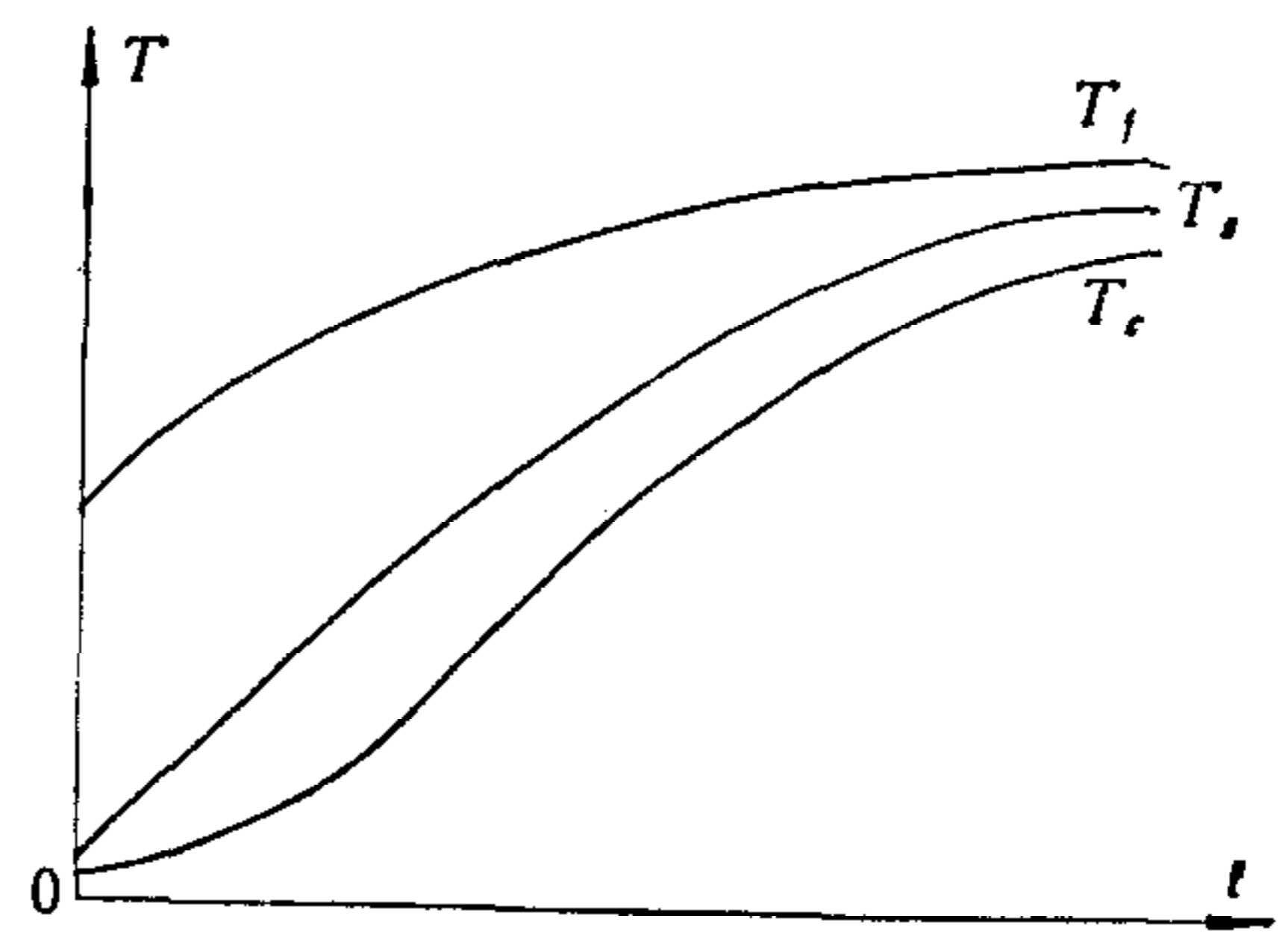


图 2 T_f 与 T_s , T_c 的变化状态

表 1 炉子与钢锭在各时态的温度

n	$T_f(n)$	$T_s(n)$	$T_c(n)$	$T_{sc}(n)$	$\Delta T_{sc}(n)$	$\Delta T_{fs}(n)$
0	1100°C	30°C	30°C	30°C	0°C	1070°C
1	1155	143	30	86	113	1012
2	1175	250	57	154	193	925
3	1191	345	102	224	243	846
4	1201	433	153	293	280	768
5	1211	514	216	365	298	697
6	1221	591	281	436	310	630
7	1241	665	347	506	318	556
8	1256	740	413	577	327	516
9	1266	812	480	646	332	454
10	1276	879	546	713	333	397
11	1286	939	611	775	328	347
12	1296	994	673	834	321	302
13	1316	1035	733	884	302	281
14	1326	1087	788	938	299	239
15	1336	1130	841	986	289	206
16	1336	1167	892	1030	275	169
17	1336	1193	939	1066	254	143
18	1336	1213	982	1098	231	123
19	1330	1230	1020	1125	210	100
20	1330	1241	1055	1148	186	89
21	1330	1251	1086	1169	165	79
22	1330	1260	1113	1187	147	70
23	1330	1269	1137	1203	132	62
24	1330	1276	1158	1217	118	54
25	1330	1282	1171	1227	111	48
26	1330	1287	1189	1238	98	43
27	1325	1292	1204	1248	88	33
28	1325	1294	1218	1256	76	31
29	1325	1297	1230	1263	67	28
30	1325	1230	1240	1270	59	25
31	1310	1302	1250	1276	52	8

普通合金钢为 40—50°C；特殊合金钢为 20—30°C。

实践表明,用这种方法烧钢,冷锭可由 7.5 小时缩短到 5.5 小时;加热均匀;轧机操作工满意;表面气化铁皮也比一般烧钢薄三分之一;节省煤气。

金属表面实际温度 T_s 与模型计算值的比较。在 T_s 达到 550°C 以上时,用高温计进行测量,同时也找有经验的操作工进行观察,两者都用模型所计算的 T_s 相比较,误差在 10—20°C 以内。当 T_s 在 550°C 以下时,由于金属表面加热后颜色变化并不显著,实际上难以测定。

另外,本模型的预报精度同武钢引进的连续热轧板加热炉的国外模型相比较。用厚度为 250mm 的钢 3 板坯,按照日本专利的数学模型,炉温分四段控制,规定加热后钢坯表面温度为 1260°C,加热时间 1.8—2 小时。而按本文建立的连续加热炉的热工模型预报,

以十分钟为一段,到 11 段时钢坯表面温度 T_s 达到 1271°C ,比日本的模型提前 20 分钟出钢。如段数再细分,精度还可提高。把本模型应用于冷轧厂钢板卷罩式炉退火的参数识别和温度预报时,同实际状态吻合。

在计算实例中要求碳素钢出炉时的表面温度在 $1260\text{—}1280^\circ\text{C}$ 左右。加热到 22 段时已达到此指标,但需温差 ΔT_{sc} 达到 70°C 以下时才算加热完毕,当加热到 29 段时 $\Delta T_{sc}(29) = 67^\circ\text{C}$,此时才允许出炉。由此可见,用上述数学模型提供瞬时温度预报,控制金属的加热过程是有效的。

四、钢锭加热过程的预报与控制

1. 问题的提出

从金属加热过程来看,控制的目的,就是使加热过程缩短;使热量耗损最小;被加热金属质量最佳。为了达到这一控制目的,只有用炉温作为控制状态的变量。炉温的升高是风量、燃料及压力等输入能量的变化结果,把炉温 T_f 作为输出状态可检测的控制变量。鉴此,有必要用电子计算机来控制 and 调节炉温,以期达到理论和实际值一致,从而研究和改进目前传统的加热操作过程。

2. 控制方法的拟定

当前金属加热操作方法是采用“高烧低保”的原则。由于“高烧低保”是在后一阶段采取低保,加热速度延缓,因而钢锭加热时间延长,能源损耗大。至于目前烧钢出炉时间及炉温计算,一般依据经验上的规定及六十年代苏联操作规程。所以上述“高烧低保”的人工操作是有缺点的。为此采用“高烧高保”原则,即在开始加热时按给定的最佳规律使炉温以一定的速度迅速上升,当炉温达到 1336°C 时,不降低炉子温度,而由此开始保温阶段,直至钢锭出炉。由于采用计算机控制,加热时间和保温时间均可缩短,同时使炉温控制在 $\pm 5^\circ\text{C}$ 范围内,不会因“高烧高保”而产生钢锭熔化的情况。实际上每种钢锭都有其合理的加热速度。如对于高碳钢及合金钢由于热应力会导致钢锭产生裂纹,所以开始加热时炉温不能太高,即加热速度受到限制。这就需要根据金属所要求的加热速度合理地确定炉温飞升曲线。

3. 炉温约束方程

各时态的炉温之间存在一定的联系,可用公式表出。以冷锭加热 31 段为例,建立约束方程

$$T_f(n) = \varphi_{n,n+1} T_f(n+1), \quad (n = 0, 1, \dots, 29) \quad (4.1)$$

其中 $\varphi_{n,n+1}$ 为常数。

把式 (3.8) 中后一组改为

$$T_s(n+1) = \bar{\beta}_\Sigma(n) T_s(n) + \beta_\Sigma(n) T_f(n), \quad (n = 0, 1, \dots, 30), \quad (4.2)$$

其中

$$\bar{\beta}_\Sigma(n) = 1 - \beta_\Sigma(n).$$

对式 (4.2) 进行迭代,并令

$$\begin{cases} L_0 = \bar{\beta}_\Sigma(30)\bar{\beta}_\Sigma(29)\cdots\bar{\beta}_\Sigma(0), \\ L_{f-0} = \bar{\beta}_\Sigma(30)\bar{\beta}_\Sigma(29)\cdots\bar{\beta}_\Sigma(1)\beta_\Sigma(0), \\ L_{f-1} = \bar{\beta}_\Sigma(30)\bar{\beta}_\Sigma(29)\cdots\bar{\beta}_\Sigma(2)\beta_\Sigma(1), \\ \dots\dots\dots \\ L_{f-29} = \bar{\beta}_\Sigma(30)\beta_\Sigma(29), \\ L_{f-30} = \beta_\Sigma(30). \end{cases} \quad (4.3)$$

式(4.2)最后一式改写为

$$L_{f-0}T_f(0) + L_{f-1}T_f(1) + \cdots + L_{f-30}T_f(30) = T_f^*(31), \quad (4.4)$$

其中

$$T_f^*(31) = T_f(31) - L_0T_f(0). \quad (4.5)$$

于是式(4.1), (4.4)即为约束方程组, 不难写出其对应的矩阵形式。

4. 均热炉控制系统的构成

当建立金属加热数学模型后, 用炉温约束方程定出炉温飞升曲线而得可控变量 $T_f(n)$ 的设定值, 从而确定了金属加热控制方法, 此时即可拟定均热炉的计算机控制方案。

我们对四角烧咀换热式均热炉进行了实验。由于炉温的变化与通入的风量 A , 煤气量 G 及压力 P 有关, 要对炉温进行控制, 必须有相应的调节器及执行机构。当炉内温度发生变化时, 实际炉温讯号 $T_f^0(n)$ 被送到计算机及主调节器中, 计算机系统随时预报 $T_f(n)$, $T_c(n)$ 值, 直至出钢讯号, 并采集实际炉温 $T_f^0(n)$ 同炉温设定值 $T_f^*(n)$ 对比值。如对冷锭加热, 每十分钟发一讯号至主调节器, 判定 $\Delta T_f(n) = T_f^*(n) - T_f^0(n)$ 是否为零, 当 $\Delta T_f(n)$ 不为零时, 并放大此讯号, 送到各 A, G, P 调节器及其执行机构, 启动马达, 改变风量、煤气量等, 直至 $\Delta T_f(n) \rightarrow 0$, 使实际炉温与设定值一致, 调节停止。计算机控制系统的框图

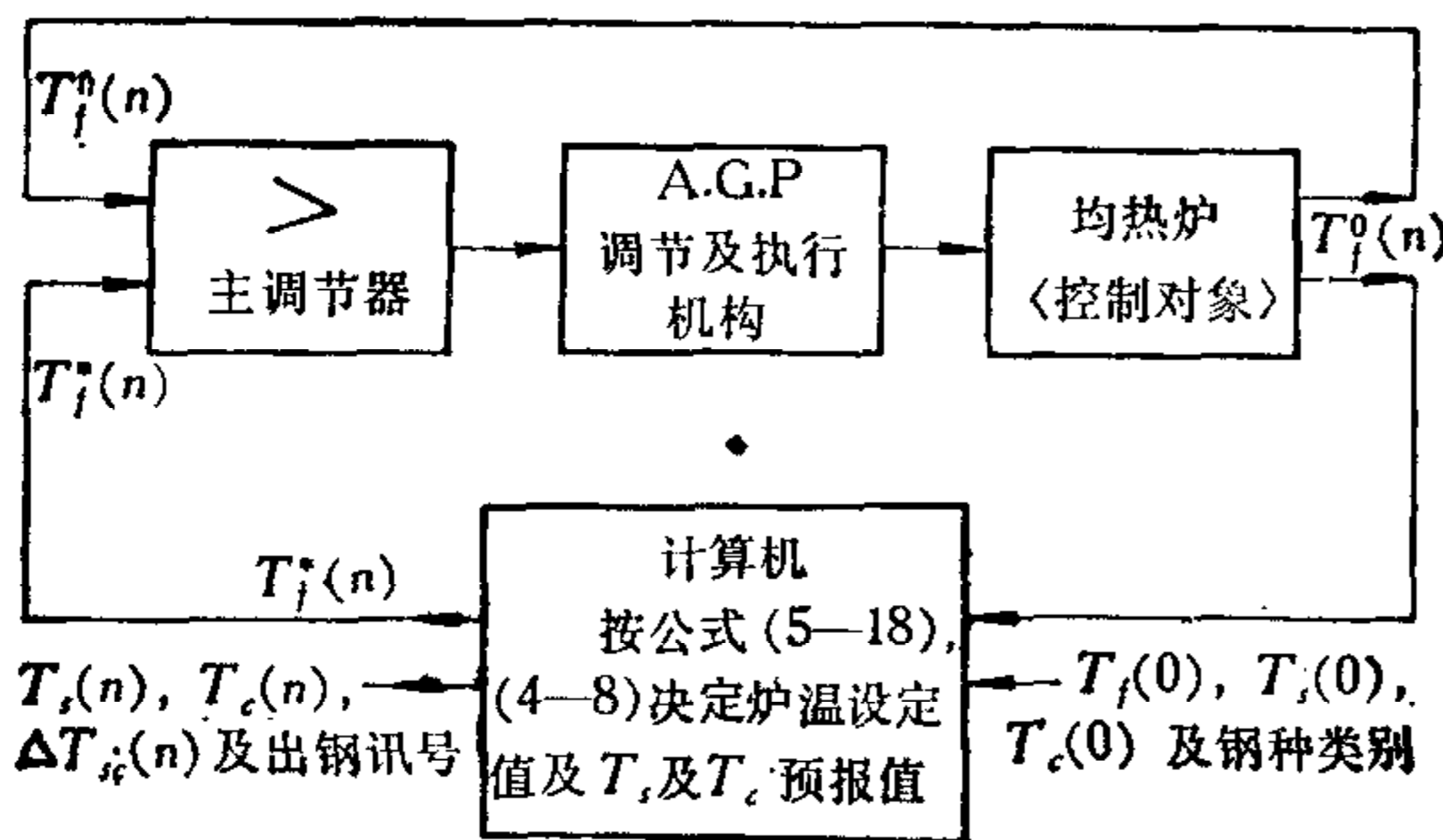


图3 均热炉计算机控制框图

如图3所示。

5. 计算机控制的优点及存在的问题

从我们的实践中, 计算机系统对金属加热的控制有如下优点:

1) 缩短了钢锭出炉时间。如冷锭加热的出炉时间由7小时20分缩短到5小时10分。

2) 节约煤气、空气。在控制中煤气与风量能按炉温要求输送, 不仅输送时

间短, 且能节约15—20%。

3) 钢锭加热质量好。钢锭出炉后其表面气化层薄, 金属烧蚀少。

4) 国产仪表及调节器能满足控制要求。

存在问题: 理论上最优响应炉温曲线是可以达到的。如设保温时的温度在稳定值, 在实际中加热段的炉温曲线上升可超过稳定值 T_{f_0} (见图4), 而达到最大值 B 点处。由于超调可使 $0 \rightarrow t_0$ 段加热时间缩短。这就要求炉温在短时间内急速上升, 但炉子设计能力达不到负荷要求, 炉温就不能全速上升, 加热时间不能进一步缩短, 因而我们的控制系统还达不到最优。此外由于结构缺陷产生漏气及煤气发热值波动等原因, 致使在加热炉上

实现按理论计算值进行控制出现了困难。为此今后要求:

- 1) 炉子设计应具有超负荷能力;
- 2) 要有精密仪表检查空气、煤气的供应情况。煤气发热波动要小于 5%;
- 3) 换热系统不漏气;
- 4) 对废气要进行燃烧实验,测定炉内空气过剩的瞬时情况;
- 5) 有热工实验炉,可对控制过程中的参数进行研究。

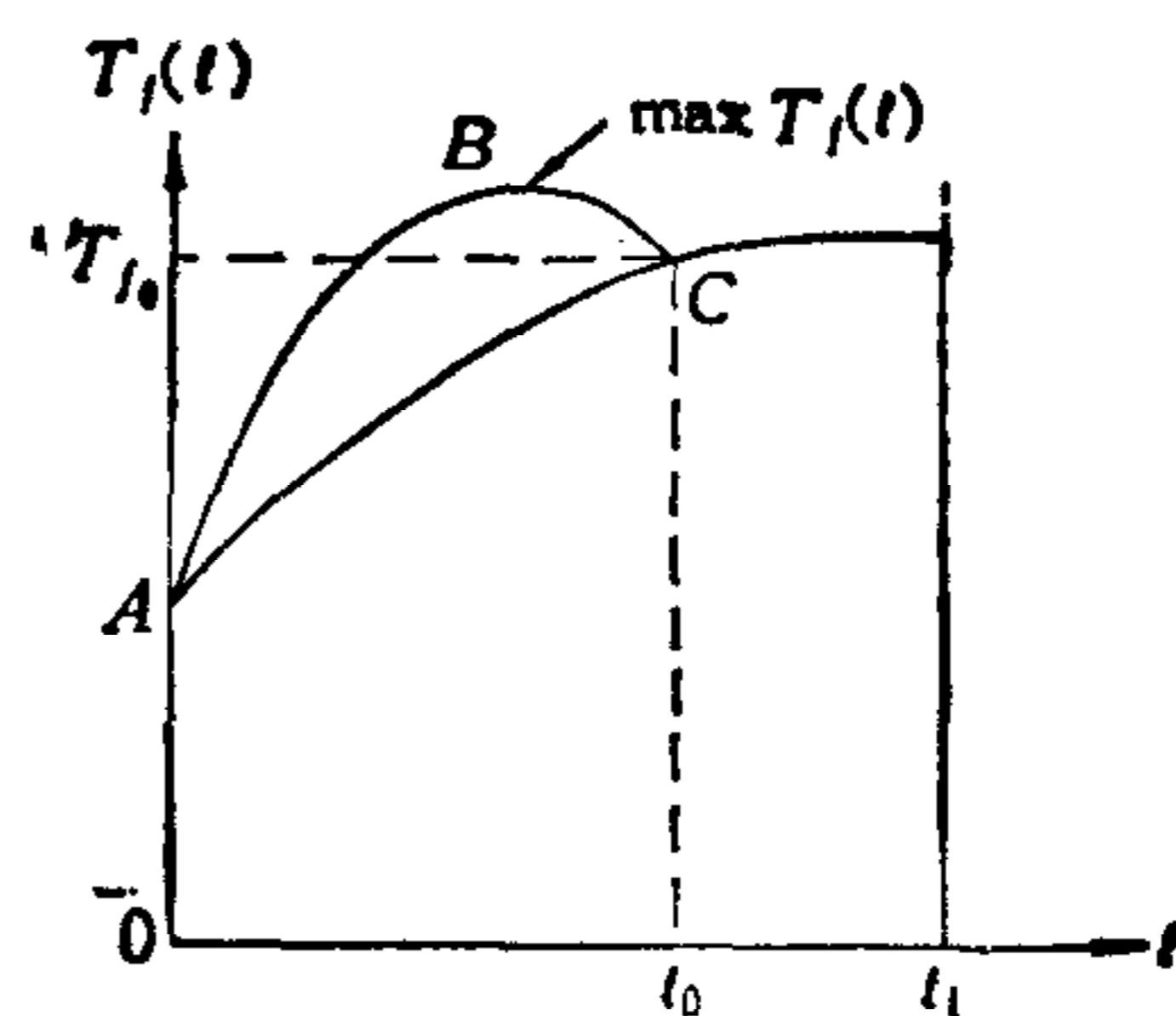


图 4 理想的炉温曲线

参 考 文 献

- [1] Carslow, H. S., Jaeger, J. C., *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press, (1959), 1—49.
- [2] 王潼, 热势论, 科学出版社 (1980), 1—8.
- [3] Özisik, M. N., *Basic Heat Transfer*, McGraw-Hill, Inc. (1977), 20—37.
- [4] Bertram Bussell, *Heat Transfer, Thermodynamics and Education*, Edited by Harold A. Johnson, McGraw-Hill, Inc. (1964), 43—58.
- [5] Михеев, М. А., Основы теплопередачи, ГЭИ (1956), 148—168.
- [6] 李国平、宋瑞玉、范文涛, 数学模型与工业自动控制, 第一卷, 湖北人民出版社 (1979).

THE MATHEMATICAL MODEL AND CONTROL OF METAL HEATING PROCESS

SONG RUIYU

(*Institute of Mathematics and Physics, Wu Han*)

SHAO KEZHEN

(*Institute of Design of Middle South Power System*)

ABSTRACT

In this paper, the fourth order relation of the temperature is considered as the boundary condition of the heat-transfer, and the traditional equation of the heat conduction is simplified and linearized, then, the equation of the heat-transfer with the dynamical boundary is formulated. Based on this the mathematical model of metal heating process is established.

Through a lot of tests, the feasibility of this model is proved, and the automatic control of the heating process of the steel bars is realized by a computer.