第7卷 第4期　　自 动 化 学 报　　Vol. 7, No. 4
1981 年 10 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Oct., 1981

多变量自校正滤波器和平滑器

邓 自 立
(黑 龙 江 大 学)

摘　　要

本文用状态空间方法提出了多变量自回归滑动平均（ARMA）过程的自校正滤波器，运用时间序列分析方法，提出了多变量 ARMA 过程的自校正滤波器和自校正平滑器，并且用这两种方法提出的自校正滤波器是一致的，推广了对于单变量 ARMA 过程的 Hagander 和 Wittenmark 的结果[3].

一、引　　言

自从 1973 年 Astrom 和 Wittenmark 提出了自校正调节器[1]以来，“自校正”概念已渗透到估值理论的许多方面，先后提出了自校正预报器[2]、自校正滤波器和自校正平滑器[3,4]. 而且自校正调节器也被推广，提出了自校正控制器[5]. 新近，自校正调节器和自校正控制器都从单输入单输出（SISO）系统推广到多输入多输出（MIMO）系统[6,7]. “自校正”已成为现代控制论新的重要分支，并引起广泛的理论和实际的兴趣[5].

本文的目的是把 Hagander 和 Wittenmark[3] 提出的单变量 ARMA 过程的自校正滤波器和平滑器推广到多变量 ARMA 过程的情形. 采用了与文献 [3] 完全不同的状态空间方法，提出了多变量自校正滤波器，应用时间序列分析方法提出了多变量自校正滤波器和自校正固定滞后平滑器，并且用这两种方法得到的多变量自校正滤波器是一致的.

在通讯和控制的许多应用问题中，接收的信号是多维的且被噪声所干扰，因此从被噪声干扰的信号中寻求真实信号的最佳估值，这就是所谓信号的滤波和平滑问题[3]. 对于信号模型和噪声统计完全已知的多变量 ARMA 过程的滤波问题被 Kashyap[8] 研究过；而自校正滤波器和平滑器则是处理当信号模型参数和噪声统计未知时的自适应滤波和平滑问题，其特点是不需建立原始的信号模型和决定其噪声统计，而直接在线估计稳态最优滤波器和平滑器的参数.

考虑用多变量 ARMA 过程描述的信号 $\boldsymbol{z}(t)$,

$$\boldsymbol{z}(t) + A_1\boldsymbol{z}(t-1) + \cdots + A_n\boldsymbol{z}(t-n) = C_1\boldsymbol{v}(t-1) + \cdots + C_n\boldsymbol{v}(t-n) \quad (1)$$

或简写为

$$A(q^{-1})\boldsymbol{z}(t) = C(q^{-1})\boldsymbol{v}(t), \quad (2)$$

其中 q^{-1} 是时间位移算子，$q^{-1}\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{z}(t-1)$，且

本文曾在 1980 年 10 月桂林第二届全国控制理论会议上宣读. 本文修改稿于 1981 年 3 月 9 日收到.

$$A(q^{-1}) = I + A_1 q^{-1} + \cdots + A_n q^{-n}, \tag{3}$$

$$C(q^{-1}) = C_1 q^{-1} + \cdots + C_n q^{-n} \tag{4}$$

为矩阵算子多项式，n 为模型的阶，信号 $\boldsymbol{z}(t)$ 为 p 维向量 A_i, C_i 为 $p \times p$ 系数矩阵，I 为 $p \times p$ 单位矩阵，且设 A_n 非异. $\boldsymbol{v}(t)$ 为模型输入噪声，维数为 p.

设观测过程 $\boldsymbol{y}(t)$ 为

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{z}(t) + \boldsymbol{e}(t), \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{e}(t)$ 为 p 维观测噪声. 假定 $\boldsymbol{v}(t)$, $\boldsymbol{e}(t)$ 为带零均值、协方差分别为 Q_v, Q_e 的相互独立的白噪声：

$$\begin{aligned} &E[\boldsymbol{v}(t)] = \mathbf{0}, \quad E[\boldsymbol{v}(t)\boldsymbol{v}^\tau(s)] = Q_v\delta_{ts}, \\ &E[\boldsymbol{e}(t)] = \mathbf{0}, \quad E[\boldsymbol{e}(t)\boldsymbol{e}^\tau(s)] = Q_e\delta_{ts}, \\ &E[\boldsymbol{e}(t)\boldsymbol{v}^\tau(s)] = \mathbf{0}, \quad \forall t, s \end{aligned} \tag{6}$$

其中 E 为数学期望，δ_{ts} 为 Kronecker δ 函数，τ 为转置记号，$\mathbf{0}$ 为零向量或零阵. 为保证信号 $\boldsymbol{z}(t)$ 的平稳性，假定 $\det A(q^{-1})$ 的零点在单位圆外[12,18].

假定模型 (1) 的参数 n, A_i, C_i 和噪声协方差 Q_e, Q_v 都是未知的，问题是基于到时刻 t 的观测数据 $\boldsymbol{y}(t)$, $\boldsymbol{y}(t-1)$, $\cdots$ 求信号 $\boldsymbol{z}(t-k)$ 的最优估值 $\hat{\boldsymbol{z}}(t-k|t)$, 即它是 $\boldsymbol{y}(t)$, $\boldsymbol{y}(t-1)$, $\cdots$ 的线性函数，且极小化条件数学期望

$$J = E[\|\boldsymbol{z}(t-k) - \hat{\boldsymbol{z}}(t-k|t)\|^2 | \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{y}(t-1), \cdots], \tag{7}$$

其中 $\|\cdot\|$ 为向量的欧氏模. 当 $k = 0$ 时，$\hat{\boldsymbol{z}}(t|t)$ 称最优滤波；当 $k > 0$, $\hat{\boldsymbol{z}}(t-k|t)$ 称最优固定滞后平滑，k 称固定滞后.

二、多变量 *ARMA* 过程的最优滤波器

为了导出多变量自校正滤波器，本节暂时假定模型 (1) 的所有参数和噪声统计是已知的. 本文将用状态空间方法导出最优滤波器 $\hat{\boldsymbol{z}}(t|t)$, 其参数完全被观测过程的新息模型参数所决定，这一事实在下节将用来设计自校正滤波器.

首先给出下述的 MIMO 系统的状态空间表示引理，它是 Cadzov 和 Martens[9] 对 SISO 系统的状态空间表示的自然推广.

引理. 设 $\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{s}(t)$ 分别为 p 维输入、输出向量，满足向量差分方程

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s}(t) + \Phi_1 \boldsymbol{s}(t-1) + \cdots + \Phi_n \boldsymbol{s}(t-n) = B_0\boldsymbol{u}(t) + B_1\boldsymbol{u}(t-1) \\ + \cdots + B_n\boldsymbol{u}(t-n) \end{aligned} \tag{8}$$

其中 Φ_i, B_i 为 $p \times p$ 系数阵. 引入变换

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\theta}_n(t+1) = -\Phi_n\boldsymbol{\theta}_1(t) + (B_n - \Phi_n B_0)\boldsymbol{u}(t), \\ &\boldsymbol{\theta}_{n-1}(t+1) = -\Phi_{n-1}\boldsymbol{\theta}_1(t) + \boldsymbol{\theta}_n(t) + (B_{n-1} - \Phi_{n-1}B_0)\boldsymbol{u}(t), \\ &\boldsymbol{\theta}_{n-2}(t+1) = -\Phi_{n-2}\boldsymbol{\theta}_1(t) + \boldsymbol{\theta}_{n-1}(t) + (B_{n-2} - \Phi_{n-2}B_0)\boldsymbol{u}(t), \\ &\quad\vdots \\ &\boldsymbol{\theta}_2(t+1) = -\Phi_2\boldsymbol{\theta}_1(t) + \boldsymbol{\theta}_3(t) + (B_2 - \Phi_2 B_0)\boldsymbol{u}(t), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\theta}_1(t+1) = -\Phi_1\boldsymbol{\theta}_1(t) + \boldsymbol{\theta}_2(t) + (B_1 - \Phi_1 B_0)\boldsymbol{u}(t),$$

及

$$\boldsymbol{s}(t) = B_0\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{\theta}_1(t), \tag{10}$$

则差分方程 (8) 的等价状态空间表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_1(t+1) \\ \boldsymbol{\theta}_2(t+1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_{n-1}(t+1) \\ \boldsymbol{\theta}_n(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Phi_1 & I & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ -\Phi_2 & \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \\ -\Phi_{n-1} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & I \\ -\Phi_n & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_1(t) \\ \boldsymbol{\theta}_2(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_{n-1}(t) \\ \boldsymbol{\theta}_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 - \Phi_1 B_0 \\ B_2 - \Phi_2 B_0 \\ \vdots \\ B_{n-1} - \Phi_{n-1} B_0 \\ B_n - \Phi_n B_0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t), \tag{11}$$

$$\boldsymbol{s}(t) = [I \ \mathbf{0} \cdots\cdots \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_1(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_n(t) \end{bmatrix} + B_0\boldsymbol{u}(t). \tag{12}$$

其中 I 是 $p \times p$ 单位阵，$\mathbf{0}$ 是 $p \times p$ 零阵.

证明. 在变换 (10) 中逐次代入变换 (9) 的各式可得到差分方程 (8)；而 (11)、(12) 状态空间表示恰是 (9), (10) 式的向量写法. 证完.

由引理，模型 (2), (5) 的状态空间表示为

$$\boldsymbol{x}(t+1) = A\boldsymbol{x}(t) + C\boldsymbol{v}(t), \tag{13}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = H\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{e}(t), \tag{14}$$

$$\boldsymbol{z}(t) = H\boldsymbol{x}(t). \tag{15}$$

其中 A 是 $np \times np$ 阵，$\boldsymbol{x}(t)$ 为 np 维状态向量，其子向量 $\boldsymbol{x}_i(t)$ 是 p 维向量，C 为 $np \times p$ 阵，H 为 $p \times np$ 阵，即

$$A = \begin{bmatrix} -A_1 & I & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ -A_2 & \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \\ -A_{n-1} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & I \\ -A_n & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n(t) \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix},$$

$$H = [I \ \mathbf{0} \cdots\cdots \mathbf{0}]. \tag{16}$$

由 (15) 式所要求的最优滤波器为

$$\hat{\boldsymbol{z}}(t|t) = H\hat{\boldsymbol{x}}(t|t). \tag{17}$$

因此问题归结为求系统 (13), (14) 在已知观测 $\boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{y}(t-1), \cdots$ 下的最优滤波 $\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)$. 已知到时刻 t 以前的全部观测数据 $\boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{y}(t-1), \cdots$ 这相当于观测的起点是 $t_0 = -\infty$. 因而所求的最优滤波 $\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)$ 变为稳态 Kalman 滤波. 由 Kalman 滤波方程[10]，稳态时有

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t|t) = \hat{\boldsymbol{x}}(t|t-1) + K_f\boldsymbol{\varepsilon}(t), \tag{18}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t|t-1) = A\hat{\boldsymbol{x}}(t-1|t-1), \tag{19}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{y}(t) - H\hat{\boldsymbol{x}}(t|t-1). \tag{20}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{x}}(t|t-1)$ 是基于观测 $\boldsymbol{y}(t-1), \boldsymbol{y}(t-2), \cdots$ 对 $\boldsymbol{x}(t)$ 的一步最优预报，K_f 是 $np \times p$ 稳态最优滤波增益阵，$\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ 是 p 维新息过程. 稳态时，新息 $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ 是均值为零、协方差

为常阵的白噪声[4,17].

(18) 式两边左乘 A 并利用 (19), (20) 可得到系统 (13), (14) 的等价稳态新息表达式

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t+1|t) = A\hat{\boldsymbol{x}}(t|t-1) + K_p\boldsymbol{\varepsilon}(t), \tag{21}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = H\hat{\boldsymbol{x}}(t|t-1) + \boldsymbol{\varepsilon}(t). \tag{22}$$

其 K_p 是 $np \times p$ 稳态最优预报增益阵,且

$$AK_f = K_p. \tag{23}$$

现在把 K_f, K_p 分块为相应的 n 个 $p \times p$ 子阵 K_{f_i}, K_{p_i},

$$K_f = \begin{bmatrix} K_{f_1} \\ \vdots \\ K_{f_n} \end{bmatrix}; \quad K_p = \begin{bmatrix} K_{p_1} \\ \vdots \\ K_{p_n} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

由引理, (21), (22) 式的等价的差分方程表示为

$$A(q^{-1})\boldsymbol{y}(t) = D(q^{-1})\boldsymbol{\varepsilon}(t), \tag{25}$$

其中 $A(q^{-1})$ 用 (3) 式定义,而矩阵算子多项式 $D(q^{-1})$ 为

$$D(q^{-1}) = I + D_1q^{-1} + \cdots\cdots + D_nq^{-n}, \tag{26}$$

其中 D_i 为 $p \times p$ 系数阵,且

$$K_{p_i} = D_i - A_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{27}$$

(25) 式恰好是多变量 ARMA 过程. 因为 $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ 是观测过程的新息过程, 因此称 (25) 式为观测过程的新息模型. 观测过程 $\boldsymbol{y}(t)$ 和新息过程 $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ 在如下意义下是等价的,即 $\boldsymbol{y}(t)$ 可用 $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(t-1)$, $\cdots$ 的线性函数表示; 反之, $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ 也可用 $\boldsymbol{y}(t)$, $\boldsymbol{y}(t-1)$, $\cdots$ 的线性函数表示[17], 这推出 ARMA 模型 (25) 满足平稳性和可逆性条件[11], 即 $\det A(q^{-1})$ 和 $\det D(q^{-1})$ 的零点在单位圆外[12,18,20].

由 (17), (18), (20), (24) 有最优滤波器为

$$\hat{\boldsymbol{z}}(t|t) = H\hat{\boldsymbol{x}}(t|t-1) + HK_f\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{\varepsilon}(t) + K_{f_1}\boldsymbol{\varepsilon}(t). \tag{28}$$

由 (23), (24), (27) 式有

$$\begin{bmatrix} K_{f_1} \\ K_{f_2} \\ \vdots \\ K_{f_n} \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} D_1 - A_1 \\ D_2 - A_2 \\ \vdots \\ D_n - A_n \end{bmatrix}. \tag{29}$$

由 (28) 式看出, 为了求最优滤波器 $\hat{\boldsymbol{z}}(t|t)$, 则必须求 K_f 的第一个 $p \times p$ 子阵 K_{f_1}; 由 (29) 式看出,为了求 K_{f_1}, 则必须求逆矩阵 A^{-1} 的首 p 行元素.

令 $A_k=(a_{ij}^{(k)})$, 即 A_k 的第 i 行第 j 列上的元素为 $a_{ij}^{(k)}$, $k=1, \cdots, n$, $i, j=1, \cdots p$. 注意到 (16) 式中阵 A 的特点,它包含一个 $(n-1)p \times (n-1)p$ 单位阵,一个 $p \times (n-1)p$ 零阵. 由 Laplace 定理[19],把 A 的行列式 $|A|$ 按第 $(n-1)p+1$ 至第 np 行(即最后 p 行)展开,可得

$$|A| = |-A_n| \cdot (-1)^{[(n-1)p+1]+\cdots+[(n-1)p+p]+1+2+\cdots+p} = |-A_n| \cdot (-1)^{(n-1)p^2}. \tag{30}$$

其中用到了 $p(p+1)$ 是偶数的事实. 因而

$$A^{-1}=\frac{\operatorname{adj}A}{|A|},\tag{31}$$

其中 adj A 是 A 的伴随矩阵．利用 A 的特点可算出 A^{-1} 的首 p 行元素，

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & M\\ \times & \times & \cdots & \times & \times\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \times & \times & \cdots & \times & \times\end{bmatrix}.\tag{32}$$

其中 $\mathbf{0}$ 是 $p\times p$ 零阵；而 $p\times p$ 阵 M 的元素由 $-A_n$ 的元素 $-a_{ij}^{(n)}$ 对于 $|A|$ 的代数余子式除以 $|A|$ 构成，易算出

$$M=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}|-A_{11}|\cdot(-1)^{[(n-1)p+1]+1}, & \cdots\cdots, & |-A_{p1}|\cdot(-1)^{np+1}\\ |-A_{12}|\cdot(-1)^{[(n-1)p+1]+2}, & \cdots\cdots, & |-A_{p2}|\cdot(-1)^{np+2}\\ \vdots & & \vdots\\ |-A_{1p}|\cdot(-1)^{[(n-1)p+1]+p}, & \cdots\cdots, & |-A_{pp}|\cdot(-1)^{np+p}\end{bmatrix}.\tag{33}$$

其中 $|-A_{ij}|$ 为从 $-A_n$ 划去第 i 行第 j 列所得的 $p-1$ 阶子行列式．把 (30) 代入(33)可得

$$M=\frac{1}{(-1)^{(n-1)p(p-1)}\cdot|-A_n|}\begin{bmatrix}|-A_{11}|\cdot(-1)^{1+1}, & \cdots\cdots, & |-A_{p1}|\cdot(-1)^{p+1}\\ \vdots & & \vdots\\ |-A_{1p}|\cdot(-1)^{1+p}, & \cdots\cdots, & |-A_{pp}|\cdot(-1)^{p+p}\end{bmatrix}$$
$$=(-A_n)^{-1}.\tag{34}$$

其中用到了 $(n-1)p(p-1)$ 为偶数的事实．由 (34) 显然也有

$$M=-A_n^{-1},\tag{35}$$

进而由 (29)，(32) 及分块矩阵运算有

$$K_{f_1}=M(D_n-A_n)=I-A_n^{-1}D_n.\tag{36}$$

于是由 (28) 式，所要求的最优滤波器最后化为

$$\hat{\boldsymbol{z}}(t|t)=\boldsymbol{y}(t)-A_n^{-1}D_n\boldsymbol{\varepsilon}(t).\tag{37}$$

由新息模型 (25) 的可逆性，(37) 式的新息 $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ 可用已知观测数据 $\boldsymbol{y}(t)$，$\boldsymbol{y}(t-1)$，$\cdots$计算如下：

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t)=\frac{A(q^{-1})}{D(q^{-1})}\boldsymbol{y}(t)=\sum_{j=0}^{\infty}G_jq^{-j}\boldsymbol{y}(t)=\sum_{j=0}^{\infty}G_j\boldsymbol{y}(t-j).\tag{38}$$

其中格林函数 G_j 可用比较如下算子多项式的系数矩阵得到

$$A(q^{-1})=D(q^{-1})(I+G_1q^{-1}+\cdots+G_iq^{-i}+\cdots),\tag{39}$$

其递推计算公式为[14,11]

$$G_j=-D_1G_{j-1}-\cdots-D_nG_{j-n}+A_j,\tag{40}$$

其中 $G_0=I$；$G_j=\mathbf{0}$，对 $j<0$；$A_j=\mathbf{0}$，对 $j>n$.

在 (37)、(38) 中，理论上计算最优滤波器 $\hat{\boldsymbol{z}}(t|t)$ 需要无限多观测数据 $\boldsymbol{y}(t)$，$\boldsymbol{y}(t-$

1), $\cdots$, 但通常格林函数 G_j 随 j 增大很快趋于零, 因此在用 (38) 式计算新息 $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ 时, 用 t 以前的有限项近似代替无穷级数, 只要项数充分大后就可达到所要求的精度. 在应用问题中, 任何实际系统的观测时间起点都是有限的, 即 $t_0 \neq -\infty$. 因而从 t_0 到 t 只有有限个观测数据可利用, 但由上述理由, 本文假定已知 t 以前全部观测历史, 即 $t_0 = -\infty$, 并不限制本文结果的应用.

三、多变量自校正滤波器

由 (37)—(40) 式看到, 所要求的最优滤波器的参数 A_n, D_n, G_j 完全被新息模型 (25) 的多变量 ARMA 过程的参数 A_i, D_i 所决定. 因此当原始模型 (1) 的参数和噪声统计未知时, 可避开建立模型 (1) 和求其噪声统计, 而直接在线估计新息模型 (25) 的参数就可求得最优滤波器 $\hat{\boldsymbol{z}}(t|t)$, 这导致建立自校正滤波器.

新息模型 (25) 是周知的多变量 ARMA 模型[8,12,14,18], 辨识这种多变量时间序列模型文献中已有许多方法可利用. 可以估计模型的阶 n[13], 用多变量的递推增广最小二乘法 (RELS) 或多变量的递推极大似然法 (RML)[16] 或多变量的改进的辅助变量法 (RIV)[15], 及其他方法在线估计系数矩阵 A_i, D_i.

因此自校正滤波器可分如下两步实现:

(1) 根据所述的在线辨识方法, 利用从 t_0 到 t 的有限个观测数据, 估计新息模型(25) 的阶 n 和递推估计诸系数阵 A_i, D_i. 设阶的估值为 $\hat{n}$, 相应的系数阵估值为 $\hat{A}_i$, $\hat{D}_i$, 且记

$$\hat{A}(q^{-1}) = I + \hat{A}_1 q^{-1} + \cdots + \hat{A}_{\hat{n}} q^{-n},$$
$$\hat{D}(q^{-1}) = I + \hat{D}_1 q^{-1} + \cdots + \hat{D}_{\hat{n}} q^{-n}. \tag{41}$$

阶的估计可用比较不同阶模型的预报误差平方总和决定[3], 选择阶的统计方法见 [13].

在 $\hat{n}$ 决定后, 递推估计诸 A_i, D_i, 要求其在 t_0 时刻它们的初始估值. 若关于初值无任何先验信息, 则初值可任意选定. 对于所述的在线辨识方法, 通常初值不影响估值的渐近性, 但影响收敛速度.

(2) 计算格林函数 G_j 的估值 $\hat{G}_j$, 它可根据估值 $\hat{A}_i$, $\hat{D}_i$ 用 (40) 式递推计算为

$$\hat{G}_j = -\hat{D}_1 \hat{G}_{j-1} - \cdots - \hat{D}_{\hat{n}} \hat{G}_{j-\hat{n}} + \hat{A}_j, \tag{42}$$

其中 $\hat{G}_0 = I$; $\hat{G}_j = \mathbf{0}$, 对 $j < 0$; $\hat{A}_j = \mathbf{0}$, 对 $j > \hat{n}$.

从而多变量自校正滤波器为

$$\hat{\boldsymbol{z}}(t|t) = \boldsymbol{y}(t) - \hat{A}_{\hat{n}}^{-1} \hat{D}_{\hat{n}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(t). \tag{43}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ 是 $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ 的估值, 因由 t_0 到 t 只有有限个观测数据可利用, 由 (38) 式可得到

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \sum_{j=0}^{t-t_0} \hat{G}_j \boldsymbol{y}(t-j). \tag{44}$$

每当新的观测数据收到后, 随着递推估值 $\hat{A}_i$, $\hat{D}_i$ 的更新, 这两步重复进行.

显然, 假如 $\hat{n} = n$, 且参数估计是一致的, 则当 $t \to \infty$ 时, $\hat{A}(q^{-1}) \to A(q^{-1})$, $\hat{D}(q^{-1}) \to D(q^{-1})$, 从而也有 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \to \boldsymbol{\varepsilon}(t)$, 因此自校正滤波器 (43) 便收敛到最优滤波器 (37). 这表明自校正滤波器具有渐近最优的性质.

Hagander 和 Wittenmark 的单变量 ARMA 过程的自校正滤波器是自校正滤波器(43)、(44)的特例[3].

四、最优固定滞后平滑器

为了导出自校正平滑器,本节暂时假定模型(1)的参数和噪声统计是已知的,这里将用时间序列分析方法给出多变量最优固定滞后平滑器，其参数完全被观测过程的新息模型的参数所决定,这一事实在下节将用来设计多变量自校正平滑器.

把(5)式代入(2)式,则观测过程 $\boldsymbol{y}(t)$ 可表为

$$A(q^{-1})\boldsymbol{y}(t) = C(q^{-1})\boldsymbol{v}(t) + A(q^{-1})\boldsymbol{e}(t). \tag{45}$$

(45)式右边的两个多变量滑动平均过程之和可用一个等价的滑动平均过程表示为[20]

$$D(q^{-1})\boldsymbol{\varepsilon}(t) = C(q^{-1})\boldsymbol{v}(t) + A(q^{-1})\boldsymbol{e}(t). \tag{46}$$

其中 $D(q^{-1})$ 为矩阵算子多项式

$$D(q^{-1}) = I + D_1q^{-1} + \cdots + D_nq^{-n}. \tag{47}$$

而 $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ 为零均值、协方差为 Q_ε 的白噪声:

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}(t)] = \boldsymbol{0}, \quad E[\boldsymbol{\varepsilon}(t)\boldsymbol{\varepsilon}^\tau(s)] = Q_\varepsilon\delta_{ts}. \tag{48}$$

于是(45)化为多变量 ARMA 过程

$$A(q^{-1})\boldsymbol{y}(t) = D(q^{-1})\boldsymbol{\varepsilon}(t). \tag{49}$$

它同用状态空间方法导出的新息模型(25)是完全一致的. 为了使(49)式的 $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ 是新息,即

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t|t-1) \tag{50}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{y}}(t|t-1)$ 是基于观测 $\boldsymbol{y}(t-1), \boldsymbol{y}(t-2), \cdots$ 对 $\boldsymbol{y}(t)$ 的最优预报估值，这要求多变量 ARMA 过程(49)是平稳的和可逆的. 平稳性条件用 $\det A(q^{-1})$ 的零点在单位圆外的假定保证. 可逆性条件用要求 $\det D(q^{-1})$ 的零点在单位圆外保证[12,20]. 这一要求保证了由(46)式可唯一决定 $D(q^{-1})$. 事实上,令

$$\boldsymbol{w}(t) = C(q^{-1})\boldsymbol{v}(t) + A(q^{-1})\boldsymbol{e}(t), \tag{51}$$

$$R_w(l) = E[\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{w}^\tau(t-l)]. \tag{52}$$

则由(46)式有

$$\boldsymbol{w}(t) = D(q^{-1})\boldsymbol{\varepsilon}(t). \tag{53}$$

由(53)易知 $D(q^{-1})$ 的系数阵 D_i 和新息 $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ 的协方差 Q_ε 可用解下述矩阵方程组得到:

$$\begin{aligned}
Q_\varepsilon + D_1Q_\varepsilon D_1^\tau + D_2Q_\varepsilon D_2^\tau + \cdots\cdots\cdots + D_nQ_\varepsilon D_n^\tau &= R_w(0),\\
D_1Q_\varepsilon + D_2Q_\varepsilon D_1^\tau + \cdots\cdots\cdots + D_nQ_\varepsilon D_{n-1}^\tau &= R_w(1),\\
D_2Q_\varepsilon + D_3Q_\varepsilon D_1^\tau + \cdots\cdots + D_nQ_\varepsilon D_{n-2}^\tau &= R_w(2),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\\
D_{n-1}Q_\varepsilon + D_nQ_\varepsilon D_1^\tau &= R_w(n-1),\\
D_nQ_\varepsilon &= R_w(n).
\end{aligned} \tag{54}$$

可证明使 $\det D(q^{-1})$ 的零点在单位圆外的矩阵方程组(54)的解 Q_ε, D_i 是唯一的[20,11].

以同样理由称多变量 ARMA 过程(49)为观测过程 $\boldsymbol{y}(t)$ 的新息模型.

根据射影理论,平滑估值 $\hat{\boldsymbol{z}}(t|t+k)$ 是 $\boldsymbol{z}(t)$ 在由观测集 $\{\boldsymbol{y}(t+k), \boldsymbol{y}(t+k-1), \cdots\}$ 所张的 Hirbert 空间上的射影[17],而新息过程 $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ 与观测过程 $\boldsymbol{y}(t)$ 是等价的,即由观测集 $\{\boldsymbol{y}(t+k), \boldsymbol{y}(t+k-1), \cdots\}$ 张成的 Hirbert 空间与由新息数据集 $\{\boldsymbol{\varepsilon}(t+k), \boldsymbol{\varepsilon}(t+k-1), \cdots\}$ 张成的 Hirbert 空间是完全一样的[17], 因而 $\hat{\boldsymbol{z}}(t|t+k)$ 又等于 $\boldsymbol{z}(t)$ 在由 $\{\boldsymbol{\varepsilon}(t+k), \boldsymbol{\varepsilon}(t+k-1), \cdots\}$所张成的 Hirbert 空间上的射影, 由于 $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ 是白噪声,所以 $\boldsymbol{\varepsilon}(t+k), \boldsymbol{\varepsilon}(t+k-1), \cdots\cdots$ 构成这个空间的正交基底, 这将对求射影带来很大方便.

用 P_{r0j} 表示射影记号,则

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{z}}(t|t+k) &= P_{r0j}[\boldsymbol{z}(t)|\boldsymbol{y}(t+k), \boldsymbol{y}(t+k-1), \cdots\cdots] \\
&= P_{r0j}[\boldsymbol{z}(t)|\boldsymbol{\varepsilon}(t+k), \boldsymbol{\varepsilon}(t+k-1), \cdots\cdots] \\
&= P_{r0j}[\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{e}(t)|\boldsymbol{\varepsilon}(t+k), \boldsymbol{\varepsilon}(t+k-1), \cdots\cdots] \\
&= \boldsymbol{y}(t) - \sum_{j=0}^{\infty} P_{r0j}[\boldsymbol{e}(t)|\boldsymbol{\varepsilon}(t+k-j)].
\end{aligned} \tag{55}$$

其中用到了射影性质 (5), 式及 $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ 的正交性 (48) 式.

由 (46) 式及 $\det D(q^{-1})$ 的零点在单位圆外,则 $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ 可表为

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}\boldsymbol{v}(t) + \frac{A(q^{-1})}{D(q^{-1})}\boldsymbol{e}(t). \tag{56}$$

令

$$\frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j q^{-j}; \quad \frac{A(q^{-1})}{D(q^{-1})} = \sum_{j=0}^{\infty} G_j q^{-j} \tag{57}$$

其中 G_j 用 (40) 式递推计算,同理计算 π_j. 于是,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \boldsymbol{v}(t-j) + \sum_{j=0}^{\infty} G_j \boldsymbol{e}(t-j). \tag{58}$$

由 (58) 及 $\boldsymbol{v}(t)$ 与 $\boldsymbol{e}(t)$ 是相互独立的白噪声可得到

$$E[\boldsymbol{e}(t)\boldsymbol{\varepsilon}^{\tau}(i)] = \begin{cases} Q_e G_{i-t}^{\tau}, & i \geqslant t \\ \boldsymbol{0}, & i < t \end{cases} \tag{59}$$

于是 $\boldsymbol{e}(t)$ 在由 $\varepsilon(i)$ 张成的子空间上的射影[17]为

$$\begin{aligned}
P_{r0j}[\boldsymbol{e}(t)|\boldsymbol{\varepsilon}(i)] &= E[\boldsymbol{e}(t)\boldsymbol{\varepsilon}^{\tau}(i)] \cdot \{E[\boldsymbol{\varepsilon}(i)\boldsymbol{\varepsilon}^{\tau}(i)]\}^{-1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(i) \\
&= \begin{cases} Q_e G_{i-t}^{\tau} Q_{\varepsilon}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}(i), & i \geqslant t \\ \boldsymbol{0}, & i < t. \end{cases}
\end{aligned} \tag{60}$$

由 (55), (60) 式可得最优固定滞后平滑器为

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{z}}(t|t+k) &= \boldsymbol{y}(t) - \sum_{i=0}^{k} P_{r0j}[\boldsymbol{e}(t)|\boldsymbol{\varepsilon}(t+k-i)] \\
&= \boldsymbol{y}(t) - \sum_{i=0}^{k} Q_e G_{k-i}^{\tau} Q_{\varepsilon}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}(t+k-i) \\
&= \boldsymbol{y}(t) - \sum_{i=0}^{k} Q_e G_i^{\tau} Q_{\varepsilon}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}(t+i).
\end{aligned} \tag{61}$$

现在考察最优平滑器的参数与新息模型(49)的参数 A_i, D_i, Q_{ε} 的关系. 首先 $\boldsymbol{\varepsilon}(t+$

i) 用 (38) 式计算，通过 (40) 式格林函数 G_j 完全由诸 A_i, D_i 决定，从而 $\boldsymbol{\varepsilon}(t+i)$ 也完全由 A_i, D_i 决定．其次看 Q_e 与 A_i, D_i, Q_ε 的关系，由 (51) 式，注意白噪声 $\boldsymbol{v}(t)$ 与 $\boldsymbol{e}(t)$ 的独立性，及 $C(q^{-1})$ 的特点(它没有单位阵 I 这一项)，易求得

$$R_w(n) = A_n Q_e. \tag{62}$$

另一方面由 (54) 的最后一式有

$$R_w(n) = D_n Q_\varepsilon, \tag{63}$$

于是由 A_n 非异的假定有

$$Q_e = A_n^{-1} D_n Q_\varepsilon. \tag{64}$$

从而最优固定滞后平滑器为

$$\hat{\boldsymbol{z}}(t|t+k) = \boldsymbol{y}(t) - \sum_{i=0}^{k} A_n^{-1} D_n Q_\varepsilon G_i^\tau Q_\varepsilon^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(t+i), \tag{65}$$

当 $k=0$ 时，注意 $G_0 = I$，则最优滤波器为

$$\hat{\boldsymbol{z}}(t|t) = \boldsymbol{y}(t) - A_n^{-1} D_n \boldsymbol{\varepsilon}(t). \tag{66}$$

这与用状态空间方法得到的最优滤波器 (37) 是完全一致的．

平滑误差协方差可由下式计算：

$$\begin{aligned} P_k &= E[(\boldsymbol{z}(t) - \hat{\boldsymbol{z}}(t|t+k))(\boldsymbol{z}(t) - \hat{\boldsymbol{z}}(t|t+k))^\tau] \\ &= E\left[\boldsymbol{e}(t) - \sum_{i=0}^{k} Q_e G_i^\tau Q_\varepsilon^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(t+i)\right] \cdot \left[\boldsymbol{e}(t) - \sum_{i=0}^{k} Q_e G_i^\tau Q_\varepsilon^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(t+i)\right]^\tau \\ &= Q_e - \sum_{i=0}^{k} Q_e G_i^\tau Q_\varepsilon^{-1} G_i Q_e^\tau = A_n^{-1} D_n Q_\varepsilon \left[I - \sum_{i=0}^{k} G_i^\tau Q_\varepsilon^{-1} G_i Q_\varepsilon D_n^\tau A_n^{-\tau}\right]. \end{aligned} \tag{67}$$

特别，滤波误差协方差为

$$\begin{aligned} P_0 &= E[(\boldsymbol{z}(t) - \hat{\boldsymbol{z}}(t|t))(\boldsymbol{z}(t) - \hat{\boldsymbol{z}}(t|t))^\tau] \\ &= A_n^{-1} D_n Q_\varepsilon [I - D_n^\tau A_n^{-\tau}]. \end{aligned} \tag{68}$$

五、多变量自校正固定滞后平滑器

注意到最优固定滞后平滑器 (65) 的参数完全被新息模型 (49) 的参数 A_i, D_i, Q_ε 所决定．因此当模型 (1) 的参数和噪声统计未知时，象自校正滤波器一样，可直接在线辨识用 ARMA 模型表示的新息模型 (49)，就可决定最优固定滞后平滑器的参数，这导致建立多变量自校正平滑器．

自校正平滑器可分为如下两步实现：

(1) 用所述方法在线辨识新息模型 (49)，这是多变量 ARMA 模型．设阶和参数估值为 $\hat{n}$, $\hat{A}_i$, $\hat{D}_i$.

(2) 用 (42) 式计算格林函数 G_j 的估值 $\hat{G}_j$；用 (44) 式计算新息估值 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$；递推估计新息协方差，记估值为 $\hat{Q}_\varepsilon$．在时刻 t Q_ε 的估值 $\hat{Q}_\varepsilon(t)$ 可由下式

$$\hat{Q}_\varepsilon(t) = \frac{1}{t-t_0} \sum_{i=t_0}^{t} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(i) \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(i)^\tau \tag{69}$$

计算[15]．其递推形式为

$$\hat{Q}_\varepsilon(t) = \hat{Q}_\varepsilon(t-1) + \frac{1}{t-t_0}[\hat{\varepsilon}(t)\hat{\varepsilon}(t)^\tau - \hat{Q}_\varepsilon(t-1)]. \tag{70}$$

多变量自校正固定滞后平滑器为

$$\hat{z}(t|t+k) = y(t) - \sum_{i=0}^{k} \hat{A}_{\hat{n}}^{-1}\hat{D}_{\hat{n}}\hat{Q}_\varepsilon\hat{G}_i^\tau\hat{Q}_\varepsilon^{-1}\hat{\varepsilon}(t+i). \tag{71}$$

假如 $\hat{n}=n$，且估值 $\hat{A}_i$, $\hat{D}_i$, $\hat{Q}_\varepsilon$ 是一致的，显然当 $t\to\infty$ 时自校正平滑器 (71) 收敛于最优平滑器 (65)，因而具有渐近最优性.

这种多变量自校正平滑器 (71) 推广了单变量 ARMA 过程的自校正平滑器[3].

六、结 论

本文结果可用于通讯、控制领域中处理多维随机信号的稳态自适应滤波和平滑问题. 与传统的自适应滤波问题和方法不同[10]，本文提出的自校正滤波器和平滑器具有如下特点:

(1) 用于处理模型的阶、参数和噪声统计完全未知的多变量系统的自适应滤波问题.

(2) 不需建立信号本身的模型和决定其噪声统计，可直接在线估计最优滤波器和平滑器的参数.

(3) 自校正状态估值问题最后归结为一个用多变量 ARMA 模型表示的新息模型的在线辨识.

(4) 自适应性表现在具有渐近最优性. 可在线不断校正状态估值器的参数，使之接近于最优状态估值器的参数.

对于多变量 ARMA 过程，本文提出了建立自校正滤波器和平滑器的两种完全不同的方法: 状态空间方法和多变量时间序列分析方法，并揭示了这两种方法的内在联系: 它们归结为同样的新息模型的在线辨识.

所得的结果包括 Hagander 和 Wittenmark 对于单变量 ARMA 过程的结果为特例[3].

参 考 文 献

[1] Aström, K. J., Wittenmark, B., On Self-Tuning Regulators. *Automatica*, 9(1973), 185—199.

[2] Wittenmark, B., A Self-Tuning Predictor, *IEEE Trans. Autom-Cont.*, AC-19(1974), 848—851.

[3] Hagander, P., Wittenmark, B., A Self-Tuning Filter for Fixed-Lag Smoothing, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 23(1977), 377—384.

[4] Young, P., Self-Adaptive Kalman Filter, *Electroni s Letters*, 15(1979), 358—360.

[5] Clarke, D. W., et al., Self-Tuning Control, Proc, IEE 126(1979), 633—640.

[6] Keviczky, Hetthessy, J., Self-Tuning Minimum Variance Control of MIMO Discrete Time *Systems, Automatic Control Theory and Applications*, 5(1977), 11—17.

[7] 卢桂章，袁著祉，适应性控制系统的若干问题，1979 全国控制理论学术交流会论文集，厦门，科学出版社(待出).

[8] Kashyap, R. L., A New Method of Recursive Estimation in Discrete Linear Systems, *IEEE Trans. Autom-Cont.* AC-15(1970), No. 1.

[9] Cadzov, J. A., Martens, H. R., Disrete-Time and Computer Control Systems, *Prentice-Hall*, (1970), 191—192.

[10] 中国科学院数学研究所概率组，离散时间系统滤波的数学方法，国防工业出版社，(1975).

[11] G. E. P., Box, Jenkins, G. M., Time Series Analysis, Holden-Day, San Francisco, (1970).

[12] Hannan, E. J., The Estimation of ARMA Models, *Annals of Stat.* **3**(1975), 975—981.
[13] Astrom, K. J., P. Eykhoff, System Identification —— A Survey, *Automatica*, 7(1971), 123—162.
[14] W. R. De Vies, S. M. Wu, Evaluation of Process Control Effectiveness and Diagnesis of Variation in Paper Basis Weight via Multivariate Time-Series Analysis, *IEEE Trans. Autom-Cont.*, AC-**23**(1978), No. 4.
[15] Jakeman, A., Young, P., Refined Instrumental Variable Methods of Recursive Time-Series Analysis, Part II Multivariable Systems, *Int. J. Control*, **29**(1979), 621—644.
[16] Keviczky, L. K., Banyasz, Cs. M., Some New Results on Multiple Input-Multiple Output Identification Methods, Identification and System Parameter Estimation, Rajbman (ed.), North-Holland Pub. Comp., 1978, 1989—2001.
[17] Woulters, W. R. E., M., Gevers, An Innovations Approach to the Discrete-Time Linear Least-Squares Estimation Problem, *Journal A*, **19**(1978), No. 1.
[18] Gevers, M., Wouters, W. R. E., An Innovation Approach to the Discrete-Time Stochastic Realization Problem, *Journal A*, **19**(1978), No. 2.
[19] 须田信英等，自动控制中的矩阵理论，科学出版社，1979.
[20] Funahashi, Y., Nakamura, K., Design of State Estimator for Systems Originally Described by Input-Output Relation, Proc. 3rd IFAC Symposium, Identification and System Parameter Estimation, Part 2. Edited by Prof. P. Eykhoff, 1973, 901—904.

A MULTIVARIABLE SELF-TUNING FILTER AND SMOOTHER

DENG ZILI
(*Heilongjiang University*)

ABSTRACT

This paper presents a multivariable self-tuning filter and smoother for multivariable autoregressive-moving average model using the state space method and the time series analysis method, the correspondent results proposed by Hagander and Wittenmark[3] for univariate autoregressive-moving average model are extended.