第7卷 第4期 自动化学报 Vol. 7, No. 4
1981年10月 ACTA AUTOMATICA SINICA Oct., 1981

大规模系统集结降阶中的几个问题

郑应平
(中国科学院自动化研究所)

摘要

本文讨论了线性定常系统集结法降阶的几个基本代数关系，论证了集结矩阵 K 应满足的条件及其构造方法，指出精确集结降阶的可能性的限度，讨论了简化模型中系统系数矩阵 F 的基本性质，并将所得结果用来对"保留主特征值方法"进行了具体的考察.

一、问题的提出及基本关系式

对于大规模系统常用的处理办法是对它进行分解或降阶以达到简化的目的[1,2]. 通常的降阶方法可以分为集结法和摄动法两大类. 本文力图弄清线性系统集结法降阶中的基本代数关系，从而给出应用该法的一些途径并指出其适用范围.

设系统 $\{A, B, C\}$ 所对应的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^p, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^m$，而 n 可能是个很大的数. 本文试图利用某种简单的线性关系[4]

$$\boldsymbol{z} = K\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^r,\ r < n) \tag{3}$$

而把系统简化为具有相同的输入-输出关系的 r 阶系统 $\{F, G, H\}$，亦即

$$\dot{\boldsymbol{z}} = F\boldsymbol{z} + G\boldsymbol{u} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{y} = H\boldsymbol{z} \tag{5}$$

这里不失一般性，恒可假定 $\operatorname{rank} K = r$.

为保持输入-输出关系不变，容易推出 $\{A, B, C\}$ 和 $\{F, G, H\}$ 之间必须满足[4]

$$FK = KA \tag{6}$$

$$G = KB \tag{7}$$

$$HK = C, \tag{8}$$

由此又可推出

$$F = KAK^T(KK^T)^{-1} = KAK^+ \tag{9}$$

$$H = CK^T(KK^T)^{-1} = CK^+. \tag{10}$$

这里 K^T 是 K 的转置，$K^+ \triangleq K^T(KK^T)^{-1}$ 是 K 的伪逆.

本文曾在1979年7月全国首届系统工程学术会议上宣读，修改稿于1980年7月28日收到.

注意,除非K是$n \times n$的满秩方阵,否则(9)只是(6)的一个必要条件. 就是说如果方程(6)对F有解,则F必满足(9),但反之由(9)算出的F却并不总能满足方程(6). 在关系式(10)和(8)之间也有类似的问题. 从下面最简单的例子可以看清这一点.

例1,考察二阶系统

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

若选$K = (\ 1\ \ 1\ )$,方程(6)成为

$$f(\ 1\ \ 1\ ) = (\ 1\ \ 1\ )\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

亦即

$$(\ f\ \ f\ ) = (\lambda_1\ \ \lambda_2)$$

但这在$\lambda_1 \neq \lambda_2$时是不可能做到的. 若套用(9)式可得

$$f = (\ 1\ \ 1\ )\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\left[(\ 1\ \ 1\ )\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2},$$

但这并不是方程(6)的解!

这样就提出了以下问题. 1)为了使(9),(10)式能满足(6),(8)式,矩阵K应满足什么条件?在实际应用中应如何选择K?从而可以知道为实现保持输入-输出关系的精确集结,系统$\{A, B, C\}$应具备什么条件?2)由(9)式得到的F具有什么性质?从而有可能判断用任意其它方法得到的系统简化模型,是否可以通过集结关系(3)而由原系统$\{A, B, C\}$来求得?

式(3)代表了一般形式的集结关系,而常见的"保留主特征值"方法是它的一种特例,第四节将仔细讨论.

二、集结矩阵K的性质和求法

在一些文献[4]中指出了K应满足

$$KA = KAK^T(KK^T)^{-1}K \tag{11}$$

这是把(9)直接代入(6)自然而得的结果. 为了便于检验并为K的选择提供一些指导的信息,将进一步证明:

定理1. 设$K \in \boldsymbol{R}^{r\times n}$, $r \leqslant n$, $\mathrm{rank}\, K = r$,这时以下诸条件等价:

(I) 存在F满足公式(6);

(II) 公式(11)成立;

(III) $R(A^TK^T) \subseteq R(K^T)$,这里$R(\cdot)$表示矩阵的值域,从此条件指出,$K^T$的列向量张成的子空间在变换$A^T$下不变;

(IV) $\mathrm{rank}\,(K^T\ \ A^TK^T \cdots\cdots A^{T^{n-1}}K^T) = r$

证明. 条件(I)和(II)等价,以及条件(III)和(IV)等价是显然的. 而条件(III)表明A^TK^T的各列向量均可表示为K^T各列向量的线性组合,亦即存在F^T使得有$A^TK^T = K^TF^T$,而这就是条件(I). 反之条件(I)也就表明A^TK^T的各列是K^T各列的线性组合.

因此,所有这四个条件都是互相等价的.

这个结果的物理意义是很明显的. 如果把(1)和(3)看成一个以 $\boldsymbol{u}$ 为输入、$\boldsymbol{z}$ 为输出的系统,那么式(4)加上 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}$ 的输出关系就构成具有同样输入-输出关系的一个最小实现. 由于在选 K 时矩阵 B 不起作用,我们可以断定矩阵对 (A, K) 的能观测子空间的维数为 r,这也就是定理 1 的条件(IV)必成立. 反之,若条件(IV)成立,系统(1),(3)就存在一个 r 阶的最小实现,从而它可由一个 r 阶的微分方程来描述.

与定理 1 类似的还有:

定理 2. 存在矩阵 H 满足(8)式,或亦即式(10)满足方程(8)的充分必要条件是 $R(K^T)\supset R(C^T)$,即 K^T 的列向量张成的子空间包含了 C^T 的各个列向量.

定理 2 的证明与定理 1 相同,这里从略.

由这两个结果可以知道矩阵 K 应如何选择.由 $R(K^T)\supset R(C^T)$,自然想到可选 K^T 为 C^T 的一种扩充;而从 $R(K^T)\supset R(A^TK^T)$,可知这种扩充可由 $[C^T, \cdots, A^{T^{n-1}}C^T]$ 来获得. 就是说,如果 $\operatorname{rank}[C^T \cdots A^{T^{n-1}}C^T]=r$,那么从该阵的 $p\times n$ 个列向量中取出包括 C^T 在内的 r 个独立向量以构成 K 就可以了.

三、关于能控性和能观性的结论

分析上述结果有以下结论.

(1) 由于 n 维系统 $\{A, B, C\}$ 和 r 维系统 $\{F, G, H\}$ 具有同样的输入-输出关系,所以若 $\{A, B, C\}$ 能控而且能观,则它已是最小实现而无法做到 $r<n$. 这时只能借助各种近似模型来降阶.

从定理 1 和定理 2 还知道,只要 (A, C) 能观,就有 $\operatorname{rank}(C^T A^TC^T\cdots A^{T^{n-1}}C^T)=n=r$. 从而就已经无法集结降阶了. 这时只有舍弃一部分次要的或我们不大感兴趣的输出,亦即舍弃 C 的一些行,在破坏了 (A, C) 的能观性之后才能进行精确的集结降阶.

(2) 若 (A, C) 不能观,但设 C 满秩(否则我们可以剔除那些独立的输出),这时,

$$n>\operatorname{rank}(C^T\ A^TC^T\cdots A^{T^{n-1}}C^T)=r\geqslant p.$$

若按上节的办法选择集结矩阵 K,就可将系统降至 r 阶,而且由于 K 满足定理 1 和定理 2 的条件,所以同时有:

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}K,\quad \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}K^+=\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} \tag{12}$$

因此 (A, C) 和 (F, H) 的能观性矩阵的秩是相同的,所以 (F, H) 一定能观.

(3) 若 (A, B) 能控,$\operatorname{rank}[BAB\cdots A^{n-1}B]=n$,那么由于

$$K(B\ \ AB\cdots A^{n-1}B)=(G\ \ FG\cdots F^{n-1}G) \tag{13}$$

以及 $\operatorname{rank}[G\ \ FG\cdots F^{r-1}G]=\operatorname{rank}[G\ \ FG\cdots F^{n-1}G]=\operatorname{rank} K=r$,所以可以断言 (F, G) 一定能控.

(4) 若 (A, B) 不能控而且 $\operatorname{rank}(B\ \ AB\cdots A^{n-1}B)<r$,则 $\operatorname{rank}(G\ \ FG\cdots F^{r-1}G)$

小于 r，所以 (F, G) 不能控.

若 (A, B) 不能控，但 $\mathrm{rank}\,(B\ \ AB\cdots A^{n-1}B) \geqslant r$，则不能做出关于 (F, G) 是否能控的一般结论.

四、关于"保留主特征值"的集结方法

保留主特征值的集结方法[2,3]是前述一般方法的一种特例，它适用于矩阵 A 可以对角化的情形. 这时可利用某变换 $\boldsymbol{x} = M\tilde{\boldsymbol{x}}$ 而将系统方程变为

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \Lambda\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{B}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{y} = \tilde{C}\tilde{\boldsymbol{x}} \tag{14}$$

其中

$$\Lambda = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \ (\mathrm{Re}\,\lambda_1 \geqslant \mathrm{Re}\,\lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \mathrm{Re}\,\lambda_n) \tag{15}$$

$$\tilde{B} = M^{-1}B \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}, \ \tilde{C} = CM \triangleq (\boldsymbol{c}_1\cdots\boldsymbol{c}_n) \tag{16}$$

在系统运动的各振型中，对应 $\mathrm{Re}\lambda_i$ 越大者显然衰减越慢(甚至是"发散越快")从而起着主导的作用. 所谓保留主特征值的集结方法就是选 $\boldsymbol{z} = (I_r\ 0\ )\tilde{\boldsymbol{x}}$ 以弃去后面 $n-r$ 个非主导振型. 或者更一般地可选

$$\boldsymbol{z} = M_0(I_r\ 0\ )\tilde{\boldsymbol{x}} = M_0(I_r\ 0\ )M^{-1}\boldsymbol{x} \triangleq K\boldsymbol{x} \tag{17}$$

其中 M_0 为任一 $r \times r$ 满秩矩阵. 这样的集结矩阵显然满足定理 1 的条件，但不一定满足定理 2. 为说明这一点我们考察系统 (14—16)，并令 $M_0 = I$，这并不影响问题的物理实质.

对于这种系统众所周知[4]：当各 λ_i 互不相同时(下面为简单起见均做如此假定)，能控性等价于各行向量 $\boldsymbol{b}_i$ 均非零，而能观性等价于各列向量 $\boldsymbol{c}_i$ 均非零. 集结后的系统为

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_r \end{bmatrix}_{r\times m}, \quad H = [\boldsymbol{c}_1\cdots\boldsymbol{c}_r]_{p\times r}. \tag{18}$$

因此它与原系统的输出之间的误差为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_m) = (\boldsymbol{c}_{r+1}\cdots\boldsymbol{c}_n)\begin{bmatrix} \tilde{x}_{r+1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix}. \tag{19}$$

由此我们可以做出以下结论：

(1) 当 $\boldsymbol{c}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{c}_n$ 不全为零时，误差 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 不为零. 而且虽然 $\tilde{x}_{r+1}, \cdots, \tilde{x}_n$ 对应的振型收敛较快，但同时也表明它们对输入有较快的跟踪速度，从而由输入 $\boldsymbol{u}$ 所引起的误差可能较大. 这和实际应用的经验是符合的.

(2) 误差 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 由两部分组成，若 $\boldsymbol{b}_{r+1} = \cdots = \boldsymbol{b}_n = 0$ 或很小，则由 $\boldsymbol{u}$ 引起的误差较小，又若 $\mathrm{Re}\,\lambda_{r+1}, \cdots, \mathrm{Re}\,\lambda_n$ 是较大负数，则 $\tilde{x}_{r+1}, \cdots, \tilde{x}_n$ 衰减很快，从而由初始条件引起的误差很小. 在这种情形下集结降阶模型 (18) 是一种很好的近似.

(3) 只有当 $c_{r+1}=\cdots=c_n=0$，从而系统不能观时才能进行精确的集结.

(4) 若原系统能控，即各 $b_i\neq 0$，则集结后的系统一定能控；若原系统不能控，即有某些 $b_i=0$，这时若它们对应的状态 $\tilde{x}_i$ 均属剔除之列，则集结后的系统变为能控的，若这些不能控状态未剔除乾净，则集结后系统仍然不能控.

(5) 保留主特征值的集结方法宜推广而按以下原则进行：① 若 $c_i=0$（或近似为 0），则可以剔除 $\tilde{x}_i$ 而不论其对应 λ_i 的大小；② 若 $b_i=0$（或近似为 0）且对应 $\mathrm{Re}\lambda_i$ 是较大负数，则可剔除对应 $\tilde{x}_i$ 而误差不大；③ 若 $c_i\neq 0$，$b_i\neq 0$，则虽然 $\mathrm{Re}\,\lambda_i$ 是较大负数，亦不宜将 $\tilde{x}_i$ 剔除.

这样就已经较简捷地回答了按保留主特征值方法集结时，简化模型的存在性、能控性、能观性以及必须进行近似时误差的分析等等问题.

五、简化模型系统系数矩阵 F 的性质

设 K 满秩，可以把式 (9) 看成矩阵相似交换的一种推广：当 K 为可逆方阵时，它就是普通的相似变换. 现在探讨一下，当 K 满足定理 1 的条件从而式 (6) 成立时，F 有什么性质. 这一结果有助于回答这样的问题：当我们用任何其它办法得到了系统 $\{A,B,C\}$ 的一个低阶模型 $\{F,G,H\}$ 时，能否找到一个集结矩阵 K 使得后者可由前者经集结降阶而达到？而问题本身又等价于：F 和 A 之间应有何种关系，才能由式 (6) 解出满秩的 K 来？

为简化理论推导，先引用一些预备的结果[6].

先把 F 和 A 分别化为 Jordan 标准形

$$A=U\tilde{A}U^{-1},\quad F=V\tilde{F}V^{-1} \tag{20}$$

这里 Jordan 标准形

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}A_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & A_s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_{A1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J_{Au}\end{bmatrix}, \tag{21}$$

$$\tilde{F}=\begin{bmatrix}F_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & F_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_{F1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J_{Fv}\end{bmatrix},$$

其中

$$J_{Ai}=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{n_i\times n_i},\qquad J_{Fj}=\begin{bmatrix}\mu_j & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \mu_j\end{bmatrix}_{r_j\times r_j}$$

均为 Jordan 块. 设 A 共有 s 个互不相等的特征值，以 A_i 表示对应于第 i 个特征值的所有各 Jordan 块的直和，F_j 的含义亦相类似. 这时 (6) 式变为

$$V\tilde{F}V^{-1}K=KU\tilde{A}U^{-1},$$

或引入 $\tilde{K}=V^{-1}KU$ 时变为 $\tilde{F}\tilde{K}=\tilde{K}\tilde{A}$. 由于这个方程与原方程 (6) 是等价的，我们不

妨直接假定(6)式中的F和A本身即已具有 Jordan 形(21)和(22)的形式.

进而假定把K也分成对应维数的小块:

$$K=\begin{bmatrix} K_{11} \cdots\cdots K_{1u} \\ K_{v1} \cdots\cdots K_{vu} \end{bmatrix}, \tag{23}$$

直接分块相乘得

$$J_{F\alpha}K_{\alpha\beta}=K_{\alpha\beta}J_{A\beta}, \quad (\alpha=1,\cdots,v;\beta=1,\cdots,u) \tag{24}$$

矩阵论中已经证明[5]: 当$J_{F\alpha}$和$J_{A\beta}$之特征值不同时,$K_{\alpha\beta}=0$; 而当$J_{F\alpha}$和$J_{A\beta}$之特征值相同时,$K_{\alpha\beta}$为下列两种右上三角形矩阵之一:

$$K_{\alpha\beta}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_q \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & c_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & c_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{当 } J_{A\beta} \text{ 维数大于 } J_{F\alpha} \text{ 时}) \tag{25}$$

或

$$K_{\alpha\beta}=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_q \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_2 \\ \vdots & & \ddots & c_1 \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{当 } J_{A\beta} \text{ 维数小于 } J_{F\alpha} \text{ 时}) \tag{25'}$$

这里平行于对角线的各线上元素均相等且可为任意值. 由这些结果可知, 当将K分为$t\times s$个小块并得到一组关系

$$F_\alpha K_{\alpha\beta}=K_{\alpha\beta}A_\beta \quad (\alpha=1,\cdots,t;\beta=1,\cdots,s) \tag{26}$$

时,若F_α的特征值μ_α不等于A的任一特征值,则所有$K_{\alpha1},\cdots,K_{\alpha s}=0$, 从而$K$不满秩. 因而我们可以断言$s>t$并不失一般地假定$\lambda_1=\mu_1,\cdots,\lambda_t=\mu_t$. 这时$K$具有形式

$$K=\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & K_{22} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & K_{tt} & 0\cdots & 0 \end{bmatrix}, \tag{27}$$

从而K满秩就相当于要求各K_{ii}均满秩. 这样只要考察A和F具有共同的、单一的多重特征值λ这种特殊情形就可以了.

现在从与(6)等价的关系式

$$A^TK^T=K^TF^T \tag{6'}$$

出发. 设A和F均具有唯一的多重特征值λ, K满行秩. 先来证明下列引理.

引理 1. 对任何整数$l=1,2,\cdots$均有

$$(A^T-\lambda I)^lK^T=K^T(F^T-\lambda I)^l. \tag{28}$$

证明. 当$l=1$时显然成立.

设当$l=s-1$时引理成立,考察$l=s$的情形:

$$\begin{aligned}(A^T-\lambda I)^s K^T &= (A^T-\lambda I)[(A^T-\lambda I)^{s-1}K^T]\\ &= (A^T-\lambda I)K^T(F-\lambda I)^{s-1}\\ &= K^T(F-\lambda I)^{s-1},\end{aligned}$$

这时引理亦成立，由归纳法本引理证毕.

引理 2. 设 F^T 具有 t 个线性独立的 l 阶广义特征向量，它们构成 $r\times t$ 矩阵 M，亦即

$$\left.\begin{aligned}&(F^T-\lambda I)^l M=0\\ &(F^T-\lambda I)^{l-1}M\triangleq M_l \quad \text{为满列秩 } r\times t \text{ 阵}\end{aligned}\right\}. \tag{29}$$

那么，满列秩 $n\times t$ 矩阵 K^TH 的 t 个列向量就是 A^T 的一组线性独立的 l 阶广义特征向量. 证明. 由于 $(A^T-\lambda I)^{l-1}K^TM=K^T(F^T-\lambda I)^{l-1}M=K^TM_l$ 是满列秩的 $n\times t$ 矩阵. 而且

$$(A^T-\lambda I)^l K^T M=K^T(F^T-\lambda I)^l M=0,$$

所以引理 2 成立.

由于各阶独立的广义特征向量的个数完全决定了矩阵的 Jordan 形结构，而 A^T 的各阶独立的广义特征向量的个数均不小于 F^T 的对应个数，所以可断言以下命题成立.

定理 3. 若 $A^TK^T=K^TF^T$，K 为满秩 $r\times n$ 阵，那么 F 的 Jordan 形的每个子块 J_{Fi} 均可由 A 的 Jordan 形的一个对应子块 J_{Ai} 取出其前面的 $r_i\times r_i$ 部分而得到. 换言之，若 F 的初等因子集合为 $\{\varphi_{Fi}(\lambda)\}$，则必可找到 A 的一组初等因子 $\{\psi_{Ai}(\lambda)\}$，使得 $\varphi_{Fi}(\lambda)|\psi_{Ai}(\lambda)$.

这个结果说明，集结的结果不仅保证了"F 的特征值必为 A 的特征值"，而且 F 的整个初等因子结构或 Jordan 形结构也都包含在 A 的对应结构"之中"了. 如果把 $F=KAK^+$ 看成矩阵相似变换的一种推广，那么定理 3 就是关于矩阵相似变换基本定理的一种推广. 它与"在 A 中嵌入了 F 的一个内模"这一概念也有密切的关系.

下面举一些例子来说明前述结果.

例 2. 设

$$A^T=\left[\begin{array}{ccc|cc}\lambda&1&0&&\\0&\lambda&1&\multicolumn{2}{c}{0}\\0&0&\lambda&&\\\hline &0&&\lambda&1\\&&&0&\lambda\end{array}\right],\quad K^T=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

这时 $\boldsymbol{k}_1=\boldsymbol{e}_{11}$，$\boldsymbol{k}_2=\boldsymbol{e}_{12}+\boldsymbol{e}_{21}$ 为 K^T 的两个列向量. $A^T\boldsymbol{k}_1=\lambda\boldsymbol{k}_1$，$A^T\boldsymbol{k}_2=\boldsymbol{e}_{11}+\lambda(\boldsymbol{e}_{12}+\boldsymbol{e}_{21})=\boldsymbol{k}_1+\lambda\boldsymbol{k}_2$. 从而 $R(A^TK^T)\subset R(K^T)$ 成立. 容易算出 $A=\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}=F^T$ 并验证有 $A^TK^T=K^TF^T$.

例 3. 设

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc}\lambda&1&\multicolumn{2}{c}{0}\\0&\lambda&&\\\hline \multicolumn{2}{c|}{0}&\lambda&1\\&&0&\lambda\end{array}\right],\quad F=\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$$

按(23),(24)式记法,$v=1$,$u=2$.

$$K_{11}=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & c_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad K_{12}=\begin{bmatrix} c_3 & c_4 \\ 0 & c_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad K=[K_{11}K_{12}]$$

显然K不满秩,这是因为F不符合定理3的结论.

例4. 设

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc} \lambda & 1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & \lambda & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & \lambda & 1 \\ & & 0 & \lambda \end{array}\right],\quad F=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

这时$v=3$,$u=2$.

$$K_{11}=[0\ c_1],\quad K_{21}=[0\ c_3],\quad K_{31}=[0\ c_5],$$
$$K_{12}=[0\ c_2],\quad K_{22}=[0\ c_4],\quad K_{32}=[0\ c_6].$$

这时

$$K=\begin{bmatrix} 0 & c_1 & 0 & c_2 \\ 0 & c_3 & 0 & c_4 \\ 0 & c_5 & 0 & c_6 \end{bmatrix},$$

从而K不满秩.

从这三个例子可见,虽然$r<n$而且F的特征值确实都是A的特征值,也不一定存在满秩的集结矩阵K实现由A和F的集结. 当给定$\{F, G, H\}$时,能否由$\{A, B, C\}$经集结矩阵K而得到它,定理3给出了F必须满足的必要条件,为了满足$G=BK$和$HK=C$,又必须分别满足$R(G)\subset R(B)$,$R(C)\subset R(H)$,并且还要检验各条件同时满足的可能性.

结 束 语

本文给出了集结关系(6)—(8)式成立时K应满足的条件,这个条件较易于检验和使用,并可为K的选择和研究系统能观、能控等性质提供了方便的途径. 最后证明的定理3指出了集结简化模型中F的性质,而且它作为相似变换的推广,在数学上也有其独立的兴趣.

工作过程中黄琳、涂序彦同志提出了许多宝贵意见,在此表示感谢.

参 考 文 献

[1] N. R. Sandel et. al., Survey of decentralized control methods for large-scale systems, *IEEE Trans.*, AC-**23** (1978), 108—128. 中译本:大系统的分散控制方法综述(上、下),郑应平译,国外自动化,第一卷第2,3期. (1979).

[2] 万百五、吴受章,大系统模型简化,自动化学报,**6**(1980), 57—66.

[3] M. Aoki, Control of large-scale dynamic systems by aggregation, *IEEE Trans.* AC-**13** (1968), 246—253.

[4] E. G., Gilbert, Controllability and observability in multivariable control systems, *SIAM J. Control*, **1**

(1963) 128—151.
[5] 甘特马赫尔，矩阵论，第八章，高等教育出版社，(1955).

SOME PROBLEMS ON THE ORDER-REDUCTION OF LARGE-SCALE SYSTEMS BY AGGREGATION

ZHENG YINGPING
(*Institute of Automation, Academia Sinica*)

ABSTRACT

Some basic algebraic relations in the order-reduction of linear time-invariant systems by aggregation has been discussed. The conditions, which should be satisfied by the aggregating matrix K, and the method of construction of this matrix are established. The theoretically possible limit of the exact order-reducing method is shown. The fundamental properties of the system coefficient matrix F in the reduced model are proved, and the results obtained are applied specifically to the inspection of the "aggregation method with the principle eigenvalues retained".