第 8 卷 第 1 期 　　自 动 化 学 报 　　Vol. 8, No. 1
1982 年 1 月 　　ACTA AUTOMATICA SINICA 　　Jan., 1982

参数不完全系统的最小信息镇定

邓 聚 龙
（华 中 工 学 院）

摘　　要

本文在分散控制模型[2]的基础上，研究了最少信息的最经济控制问题，提出了最经济控制器存在的条件与满足极点配置要求的最经济控制器的传递函数.

一、参数不完全的定义

最少信息镇定，是指通过尽量少的反馈信息使系统稳定的问题，即控制手段具有良好经济性的镇定[1]. 涂序彦研究过最经济控制概念[2]. 本文研究具有尽量少的控制单元的经济控制问题.

有下述系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x \in R^n, \; u \in R^m$$
$$y = Cx. \qquad y \in R^l$$

若 B 及 C 具有下述结构

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} b_{11} & \cdots & & b_{1j_1} & \cdots & b_{1j_r} & & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & & b_{nj_1} & \cdots & b_{nj_r} & & \cdots & b_{nm} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c|cc} b_{11} & \cdots & & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & B_r & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & & \cdots & b_{nm} \end{array}\right]$$

完全参数子块　　　　完全参数

$$C = \left[\begin{array}{ccc} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \hline c_{k_1 1} & \cdots & c_{k_1 n} \\ \vdots & \text{完全参数} & \vdots \\ c_{k_r 1} & \cdots & c_{k_r n} \\ \hline \vdots & & \\ c_{l1} & \cdots & c_{ln} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \hline & c_r & \\ \hline \vdots & & \vdots \\ c_{l1} & \cdots & c_{ln} \end{array}\right]$$

即 B 中从 j_1 到 j_r 列的子阵 B_r 已知，其余未知，C 中从 k_1 到 k_r 列的子阵 c_r 已知，其余未知. B 和 C 具有这种性质的系统，称参数不完全系统.

二、参数不完全系统的动态模型及控制

文献[3]给出了图 1 所示系统采用 r 个（r 可以等于 1）动态反馈控制器时的特征多项

本文曾在 1979 年 10 月国防科委系统工程会议和 1979 年 12 月中国自动化学会控制理论学术会议上宣读. 修改稿于 1980 年 12 月 9 日收到.

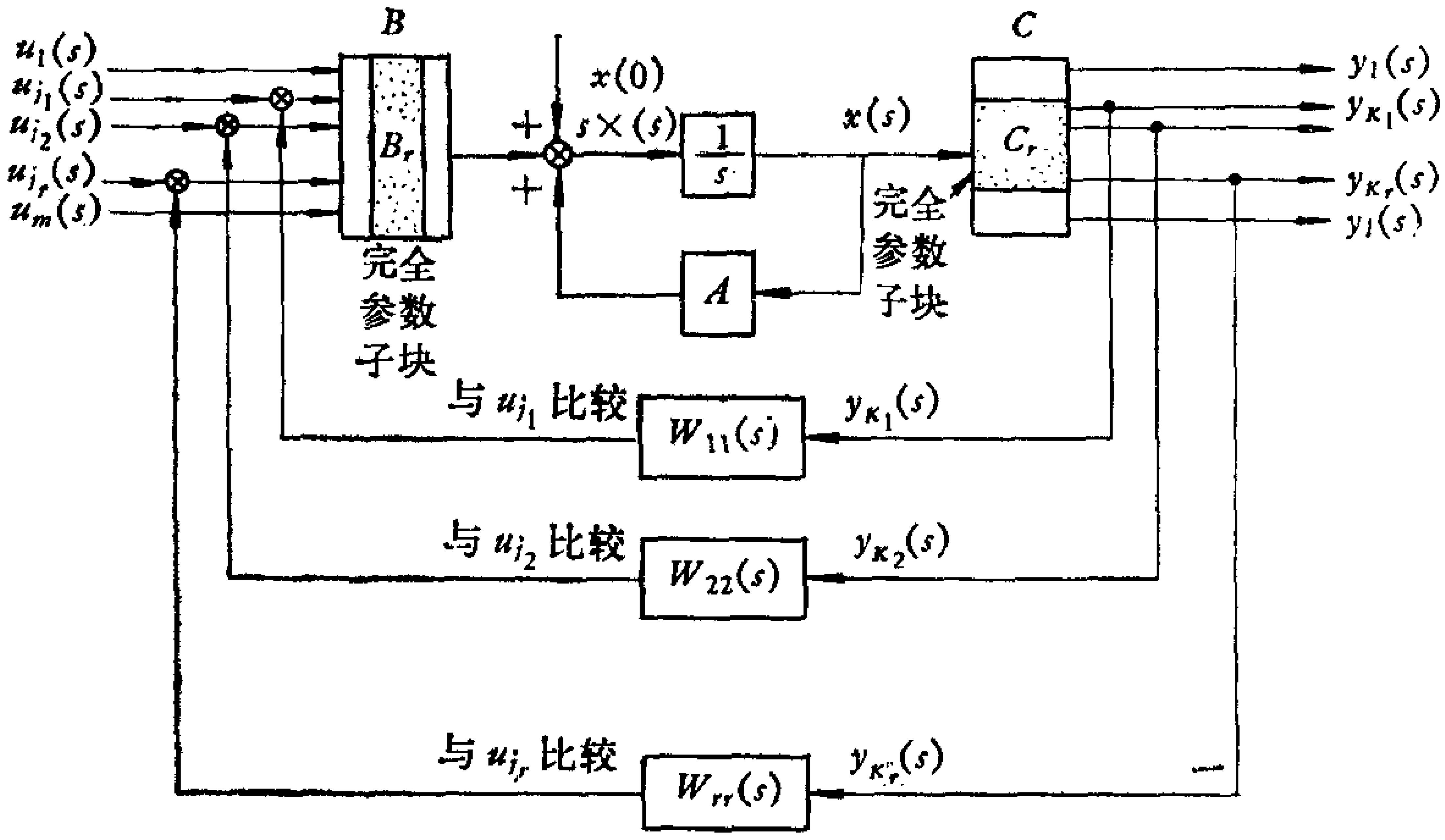

图 1

式.

r 个控制器

$$\det(sI - A_*) = \{\det[sI - A - B_r \operatorname{diag}(W_{11}(s)\cdots W_{rr}(s)) \cdot c_r]\} \prod_{i=1}^{r} \phi_i(s);$$

1 个控制器

$$\det(sI - A_*) = \{\det[sI - A - B_{i_1} W_{11}(s) c_{k_1}]\} \phi_1(s).$$

上式，$\phi_j(s)$ 为控制器传递函数 $W_{ii}(s)$ 的分母，即

$$W_{ii}(s) = \frac{\phi_{ii}(s)}{\phi_i(s)}, \qquad i = 1, 2, \cdots r]$$

A_* 为预期状态矩阵，$\operatorname{diag}(W_{11}(s), \cdots W_{rr}(s))$ 为动态反馈阵.

为了得到最经济控制，有必要研究某变量 u_k 对系统的影响. 若系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1h}x_n + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nh}x_n + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}u_1 + \cdots + b_{1k}u_k + \cdots + b_{1m}u_m \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ b_{n1}u_1 + \cdots + b_{nk}u_k + \cdots + b_{nm}u_m \end{bmatrix}$$

引入简单的 1 维反馈[4] $u_k = k_0 x_h$ 得

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + (a_{1h} + b_{1k}k_0)x_h + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + (a_{nh} + b_{nk}k_0)x_h + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}u_1 + \cdots + 0 + \cdots + b_{1m}u_m \\ \vdots \\ b_{n1}u_1 + \cdots + 0 + \cdots + b_{nm}u_m \end{bmatrix}.$$

引入 u_k 反馈后，状态矩阵中第 h 列所有元素发生了变化，这称为按列控制.

令 A，A_*，A_N 分别为

$$A_* = \begin{bmatrix} a_{11}\cdots, (a_{1h}+b_{1k}k_0), \cdots a_{1n} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}\cdots, (a_{nh}+b_{nk}k_0), \cdots a_{nn} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11}\cdots a_{1h}\cdots a_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{nh}\cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A_\sim = A_* - A = \begin{bmatrix} 0\cdots d_{1h}\cdots 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ 0\cdots d_{nh}\cdots 0 \end{bmatrix} = [0\cdots\Delta_h\cdots 0], \quad \Delta_h = \begin{bmatrix} d_{1h} \\ \vdots \\ d_{nh} \end{bmatrix}$$

Δ_h 称差列阵。后面将差列阵引伸到含 s 的情况。

定理 1. 若参数不完全系统满足：

1）控制与观测的完全参数子阵 B_r，C_r 的元素构成的矩阵

$$[B_{j_1}C_{k_1\sigma}\vdots\cdots\vdots B_{j_r}C_{k_r\sigma}] = \text{非奇矩阵}, \quad \sigma = 1, \cdots n, \qquad \sigma \neq h$$

并允许 $C_{k_1} = [0\cdots 0 C_{k_1h} 0\cdots 0]$.

2）下述两矩阵秩相等，即

$$\text{RANK}\,\{B_{j_1}C_{k_1h}\cdots B_{j_r}C_{k_rh}\} = \text{RANK}\,\{B_{j_1}C_{k_1h}\cdots B_{j_r}C_{k_rh}, \Delta_h\},$$

则列控制器 $[W_{11}\cdots W_{rr}]^T$ 存在。Δ_h 为含 s 的差列阵。

证明略。

定理 2. 列控制器的存在条件与下式等价

$$[B_{j_1}C_{k_1\sigma}\vdots\cdots\vdots B_{j_1}C_{k_r\sigma}] \begin{bmatrix} W_{11}(s) \\ \vdots \\ W_{rr}(s) \end{bmatrix} = 0, \quad \sigma = 1, \cdots n, \qquad \sigma \neq h$$

$$[B_{j_1}C_{k_1h}\vdots\cdots\vdots B_{j_r}C_{k_rh}] \begin{bmatrix} W_{11}(s) \\ \vdots \\ W_{rr}(s) \end{bmatrix} = \Delta_h$$

证明略。

三、最经济控制器的结构及系统极点配置

1. 最经济控制器的结构

定义 1. 动态反馈矩阵 $\mathrm{diag}\,(W_{11}(s)\cdots W_{rr}(s))$ 中，只有一个元素 (W_{11})，称最经济控制。

定理 3. 若动态差列阵 Δ_h 为

$$\Delta_h = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta_{qh}(s) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ q\text{ 行} \\ \\ \\ n\text{ 行} \end{matrix}$$

观测行 C_{k_1} 为 $C_{k_1} = [0\cdots 0 C_{k_1h} 0\cdots 0]$. 同时

$$\text{RANK}\,[B_{j_1}C_{k_1h}] = \text{RANK}\,[B_{j_1}C_{k_1h}, \Delta_h(s)]$$

则最经济控制器存在.

证明略.

定义 2. 前述差列阵 $\Delta_h(s)$ 中只有一个元素 δ_{qh}，这种控制称单元素控制.

定理 4. 若 $\Delta_h(s)$ 只有一个元素 δ_{qh}，C_{k_1} 中只有一个元素 C_{k_1h}，并且

$$B_{j_1}=[0\cdots0\ \underset{q\text{列}}{b_{qj_1}}\ 0\cdots0]^T,$$

则最经济控制器传递函数为

$$W_{11}(s)=C_{k_1h}^{-1}b_{qj_1}^{-1}\delta_{qh}(s).$$

证明略.

2. 最经济控制系统的极点配置

上述最经济控制只有一个控制器，一个控制器能否使系统获得极点配置？经济控制器的传递函数如何设计？

文 [3] 对问题一作了肯定回答. 下面阐述控制器传递函数的设计.

定理 5. 从 C 中第 k_1 行第 h 列交点获得信息，反馈到 B 中第 q 行第 j_1 列的点上(图 2)，且状态阵 $(sI-A)$ 中 q 行 h 列元素 $-a_{qh}$ (若 $q=h$，则为 $s-a_{qq}$) 的代数余子式 A_{qh} 满足 $A_{qh}(s)\neq0$，令 $f^0(s)$ 为预期特征多项式，则控制器传递函数为

$$W_{11}(s)=\frac{\phi_{11}(s)}{\phi_1(s)},\quad \phi_{11}(s)=\frac{\phi_1(s)\det(sI-A)-f^0(s)}{b_{qj_1}C_{k_1h}A_{qh}(s)}.$$

证明略.

下面将经济控制器设计步骤归纳如下：

1 判断 BC 中是否存在单元素完全子块，

2 确定控制器接线通道(从 y_{k_1} 到 u_{j_1})，

3 判断控制器传递函数是否满足存在条件，即 $A_{qh}\neq0$，

4 计算 $W_{11}(s)$.

四、计 算 示 例

例. 有系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&1\\1&1&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\boxed{\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}}\\b_{21}&b_{22}&\\b_{31}&b_{32}&\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\\hline 0&0&1\end{bmatrix}x$$

即 B，C 中完全参数块为

$$B_r=[0\ 0\ 1]^T,\quad C_r=[0\ 0\ 1].$$

B_r 中非 0 元是 b_{33}，C_r 中非 0 元是 c_{33}（这种位置对应性是偶然的，因是利用具有实际背景的例子）.

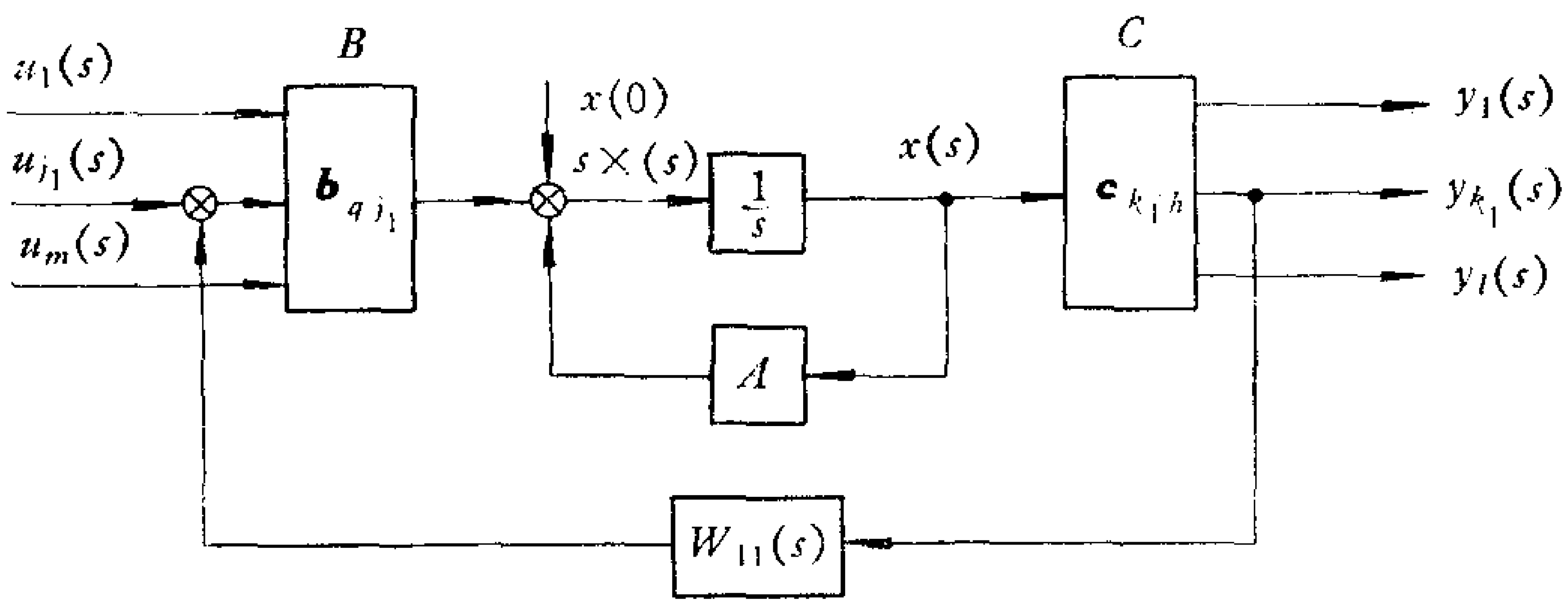

图 2

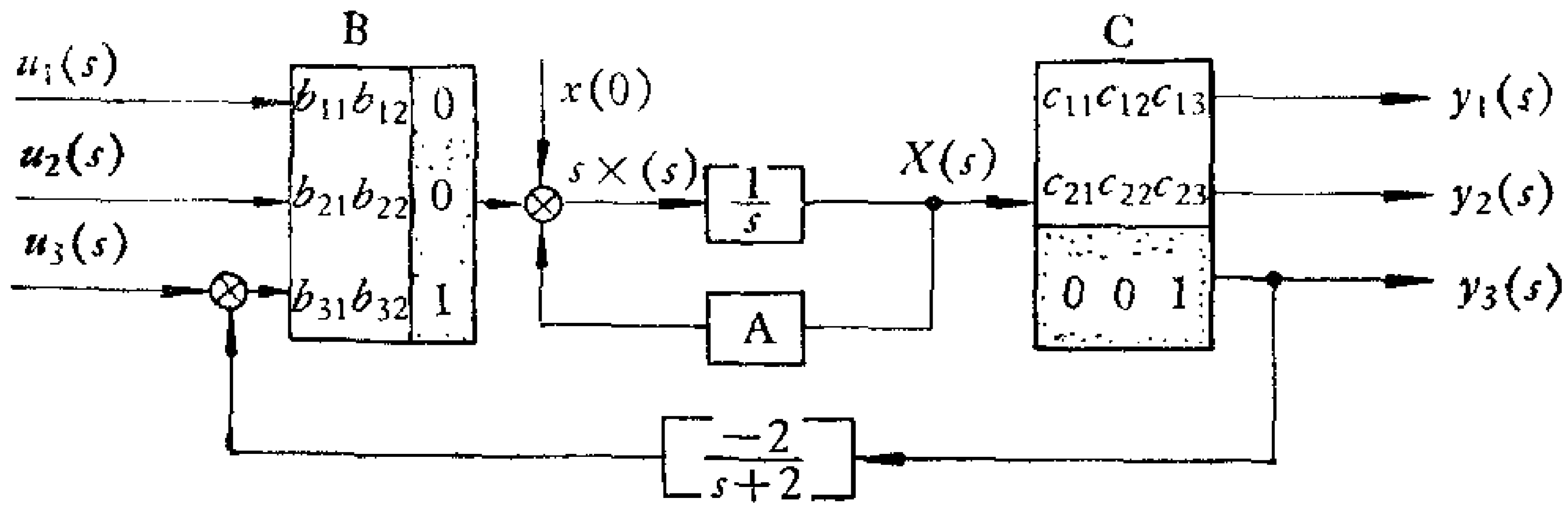

图 3

在预期特征多项式 $f^0(s) = (s+1)^3(s+2)$ 时，设计控制器.

解：

1）判断完全参数块的结构

显然完全参数块 $B_{j_1} = B_r = [0\ \ 0\ \ 1]^T$ 与 $C_r = C_{k_1} = [0\ \ 0\ \ 1]$ 均含单元素，满足要求.

2）确定控制器接线

$$b_{qj_1} = b_{33},\ q = 3,\ j_1 = 3,\ b_{33} = 1,\ c_{k_1h} = c_{33},\ k_1 = 3,\ h = 3,\ c_{33} = 1$$

控制器接在 $y_{k_1} = y_3$ 到 $u_{j_1} = u_3$ 的通道上.

3）判断 A_{qh} 是否存在

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & -1 \\ -1 & -1 & s \end{bmatrix},$$

$$\det(sI - A) = (s+1)(s^2+2s-1)$$

$$A_{qh} = A_{33} = (s+1)(s+2) \neq 0.$$

4）求控制器传递函数 $W_{11}(s)$

指定 $\phi_1(s) = (s+2)$，则

$$\phi_{11}(s) = \frac{\phi_1(s)\det(sI-A) - f^0(s)}{b_{qj_1}C_{k_1h}A_{qh}(s)}$$

$$= \frac{[(s+1)(s^2+2s-1)](s+2) - (s+1)^3(s+2)}{1\cdot 1\cdot (s+2)(s+1)} = -2.$$

则

$$W_{11}(s) = \frac{\phi_{11}(s)}{\phi_1(s)} = \frac{-2}{s+2}.$$

结构见图 3.

上述结果,按文 [3] 模型验算无误.

参 考 文 献

[1] 关肇直,现代控制理论中的某些问题 (I, II), 自动化学报, 1980, 6 卷,第一、二期.
[2] 涂序彦,可控性、可观性的实用价值与"最经济结构"综合问题,第一届全国控制理论及其应用学术交流会论文集,科学出版社, 1981 年.
[3] 邓聚龙,分散输出反馈系统一种简化的新模型,华中工学院学报, 1980, 1.
[4] 邓聚龙,大系统分散控制的一维输出反馈,华中工学院学报 1979, 1.

THE LEAST PARAMETERS CONTROLLER OF DECENTRALIZED CONTROL SYSTEM

DENG JULONG
(*Huazhong Institute of Technology*)

ABSTRACT

Based on the model of reference [2], the simplest structure and the least parameters controller (the most economical controller) to stabilize the given decentralized control system are studied in this paper. The existential theorem and the transfer function of the most economical controller by which the poles assignment for the given system may be obtained, is proposed.