数字锁相迴路的设计

郭兆曾
(北京控制工程研究所)

摘　　要

本文提出了一种采用新型校正网络的数字锁相迴路. 它适用于低频(小于 1Hz)锁相系统, 具有精度高、动态响应快和频率锁定范围宽等特点.

一、引　　言

锁相迴路的研究由来已久[1,2], 应用范围也不断扩大, 至今仍有旺盛的生命力. 但是对于系统的重要环节之一——校正网络, 至今仍沿用传统的无源 $R-C$ 网络和有源 $R-C$ 网络. 当系统参考信号的频率非常低(小于 1Hz), 频带非常宽, 并且频率还要随时间变化的情况下,如果要求系统有快的动态响应和高的跟踪精度,则沿用传统概念远远不能满足实际需要. 本文所述系统的特点是采用两个可逆计数器 (或积分器) 实现比例-积分校正,并兼作一般采样系统中的零阶保持器和限幅器. 详见图 1. 参考信号可以是脉冲串, 也可以是方波.

参考信号和反馈信号,经鉴频-鉴相器鉴频鉴相后输出方波. 一方面利用该方波的前沿微分后,使可逆计数器归零;另一方面, 根据系统要求调制成两种不同频率的窄脉冲, 分别送到可逆计数器和累加可逆计数器. 容易看出, 可逆计数器就是比例环节, 累加可逆计数器就是积分环节. 当可逆计数器计满后,输出停止计数指令,用以实现宽度限制(见图 2). 当方波过后,两个计数器都要保持到下一个周期再计数. VCO 可以是数字的, 也可以是模拟的, 采用数字的可以提高精度. 分频后将频率转换成相位,和参考信号比相. 鉴频-鉴相器也是多种多样[3],采用限幅器可以减小超调, 缩短过渡过程.

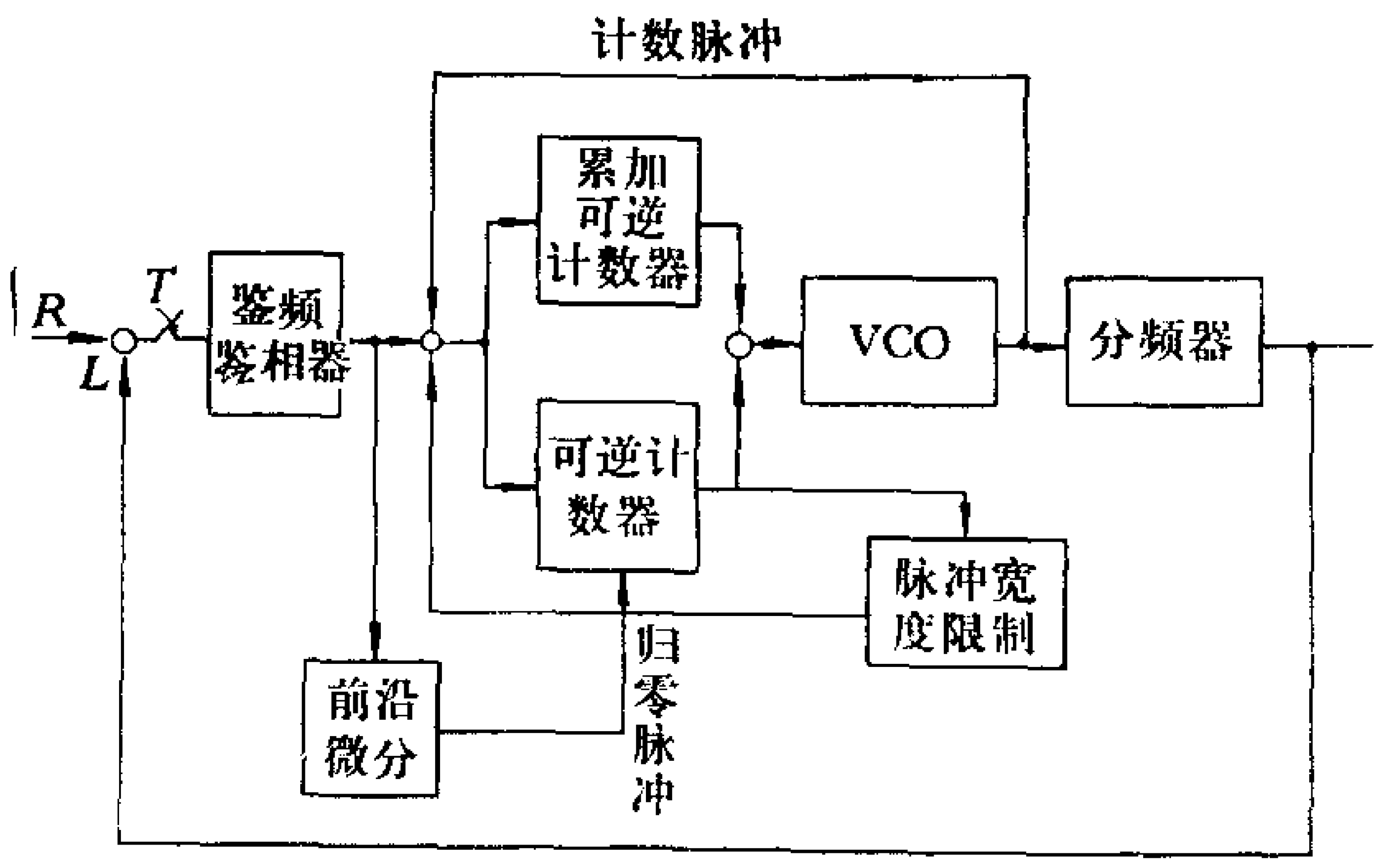

图 1　原理方框图

本文利用采样系统理论分析了系统的稳定性、稳态误差、过渡过程, 利用模拟计算和数值计算选择系统参数,并且用优选法求出过渡过程最短的最佳参数[4,5,6].

本文于 1981 年 1 月 8 日收到.

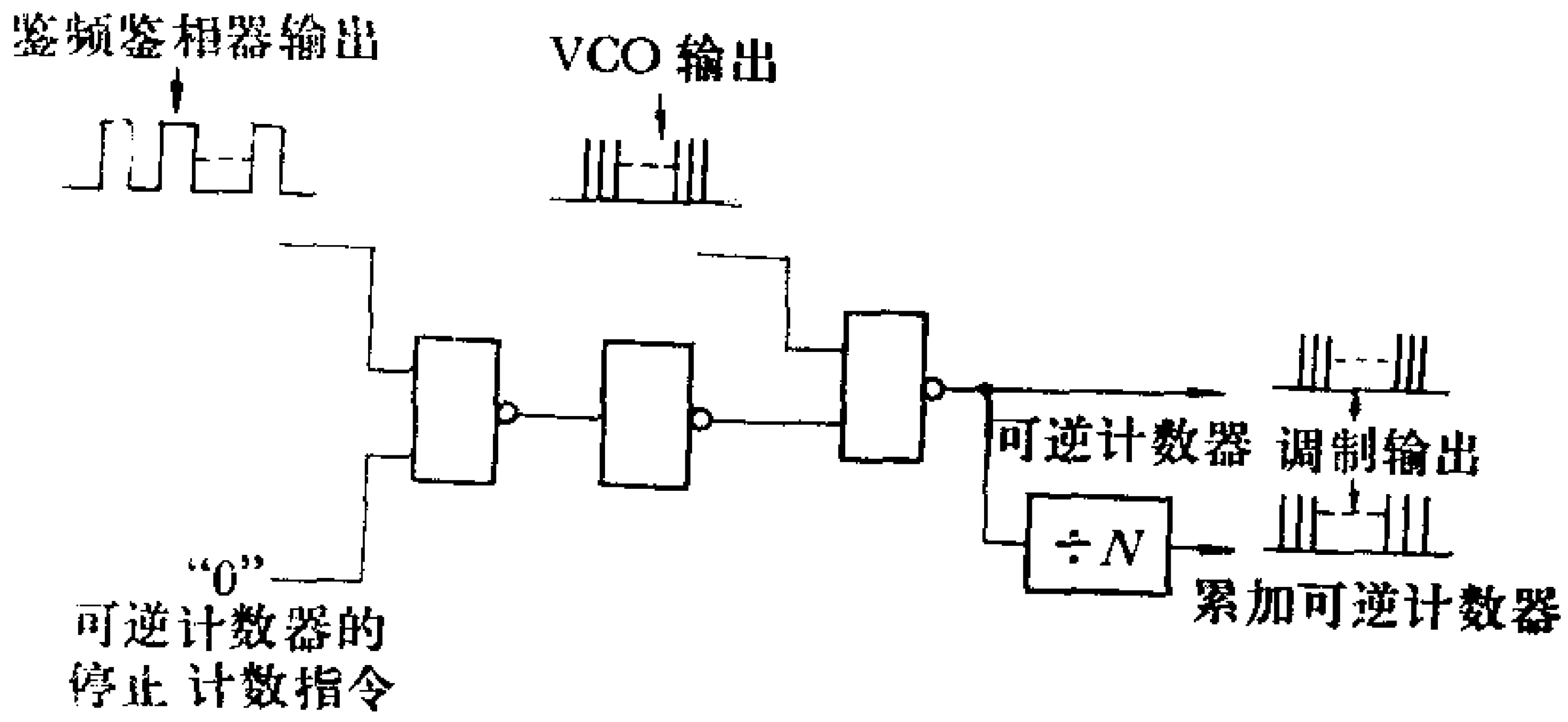

图 2 宽度限制和调制示意图

二、系 统 分 析

1. 预备知识

定理 1 (V. M. Popov) 已知系统如图 3 所示. 其中 $f(\sigma)$ 为非线性函数; $W(z)$ 为系统线性部分传递函数的 z 变换式, 该图如满足下述条件:

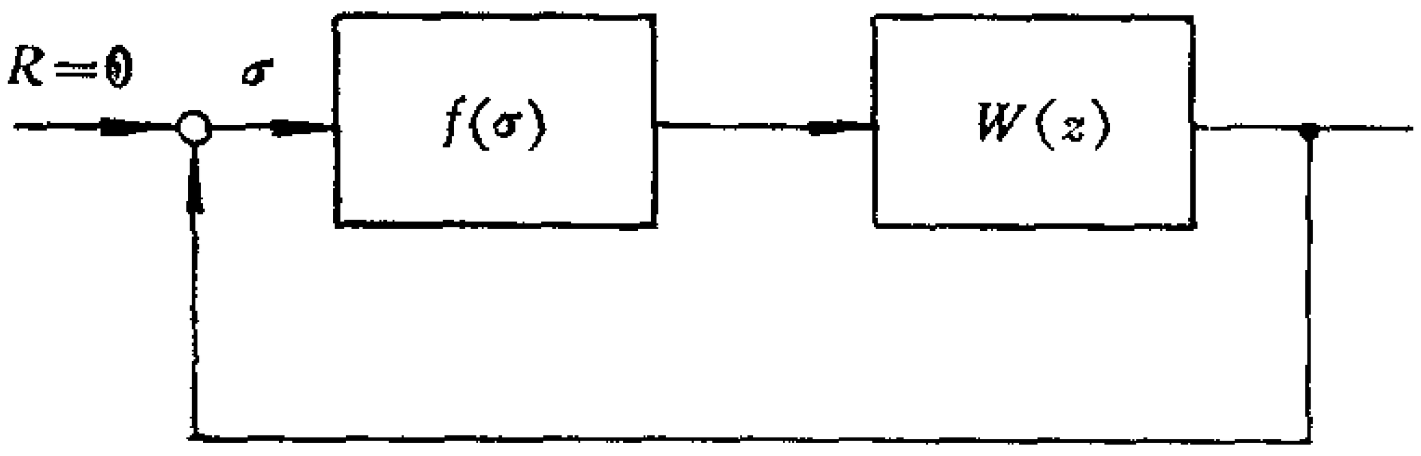

图 3 具有一个非线性函数的系统方框 图

a. $W(z)$ 是稳定的;

b. $f(0)=0$, $0<\dfrac{f(\sigma)}{\sigma}<k$, 当 $\sigma \neq 0$;

c. $Re[W(e^{j\omega T})]>-\dfrac{1}{k}$.

则系统是绝对稳定的.

定理 2. Sehur-Cohn 稳定准则:

已知线性采样-数字系统的特征方程:

$$Q(z)=a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

取

$$\Delta_k = \left|\begin{array}{cccc|cccc}
a_0, & 0, & \cdots, & 0 & a_n, & a_{n-1}, & \cdots, & a_{n-k+1} \\
a_1, & a_0, & \cdots, & 0 & 0, & a_n, & \cdots, & a_{n-k+2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{k-1}, & a_{k-2}, & \cdots, & a_0 & 0, & 0, & \cdots, & a_n \\
\hline
\bar{a}_n, & 0, & \cdots, & 0 & \bar{a}_0, & \bar{a}_1, & \cdots, & \bar{a}_{k-1} \\
\bar{a}_{n-1}, & \bar{a}_n, & \cdots, & 0 & 0, & \bar{a}_0, & \cdots, & \bar{a}_{k-2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\
\bar{a}_{n-k+1}, & \bar{a}_{n-k+2}, & \cdots, & \bar{a}_n & 0, & 0, & \cdots, & \bar{a}_0
\end{array}\right|$$

其中 $\bar{a}_k$ 是 a_k 的共轭复数 ($k=0, 1, \cdots, n$), 若

$\Delta_k<0$, 当 k 为奇数;

$\Delta_k>0$, 当 k 为偶数;

则特征方程的根处于单位圆内,故系统稳定.

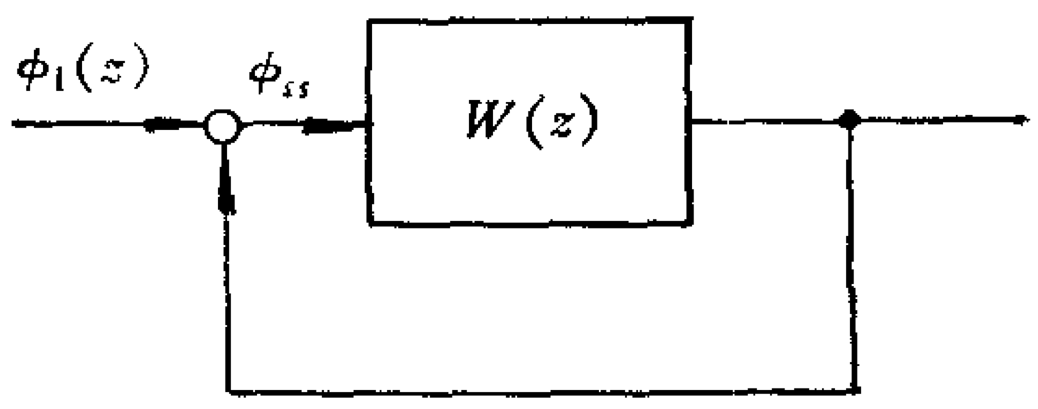

图 4 线性系统

定理 3. 终值定理: 已知线性系统如图 4 所示, 其中 $\phi_1(z)$ 为输入的 z 变换; $\phi_{ss}(z)$ 为误差的 z 变换; $W(z)$ 为系统线性部分传递函数的

z 变换，则系统的稳态误差：

$$\phi_{ss}=\lim_{t\to\infty}\phi(t)=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)\phi_1(z)}{z[1+W(z)]}.$$

为了进行理论分析，图 1 表示的系统可抽象为如图 5 所示的数学模型.

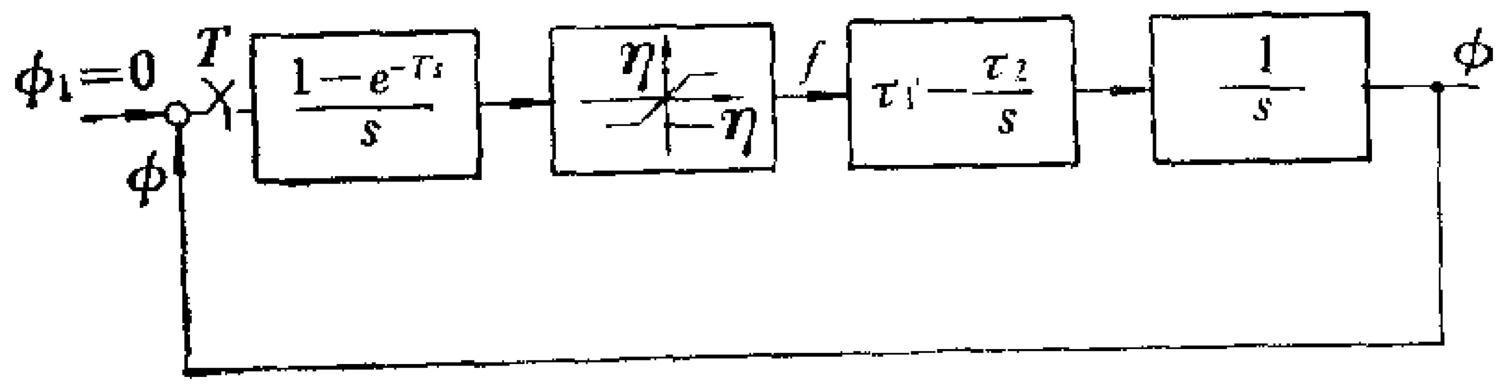

图 5 系统传递函数

则

$$W(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}\times\frac{\tau_1 s+\tau_2}{s^2}, \tag{1}$$

取 z 变换得：

$$W(z)=\frac{\left(\tau_1 T+\frac{\tau_2 T^2}{2}\right)z+\left(-\tau_1 T+\frac{\tau_2 T^2}{2}\right)}{(z-1)^2}. \tag{2}$$

其中 T 为采样周期.

2. 稳定性分析

下面用 Popov 定理证明系统稳定性. 显然和 $W(z)$ 对应的特征方程为：

$$Q(z)=z^2-2z+1=0,$$

则

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}a_0 & a_n\\ \bar{a}_n & \bar{a}_0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0 \not< 0$$

故不满足定理条件，为此引入局部反馈和正馈结构变换，见图 6.

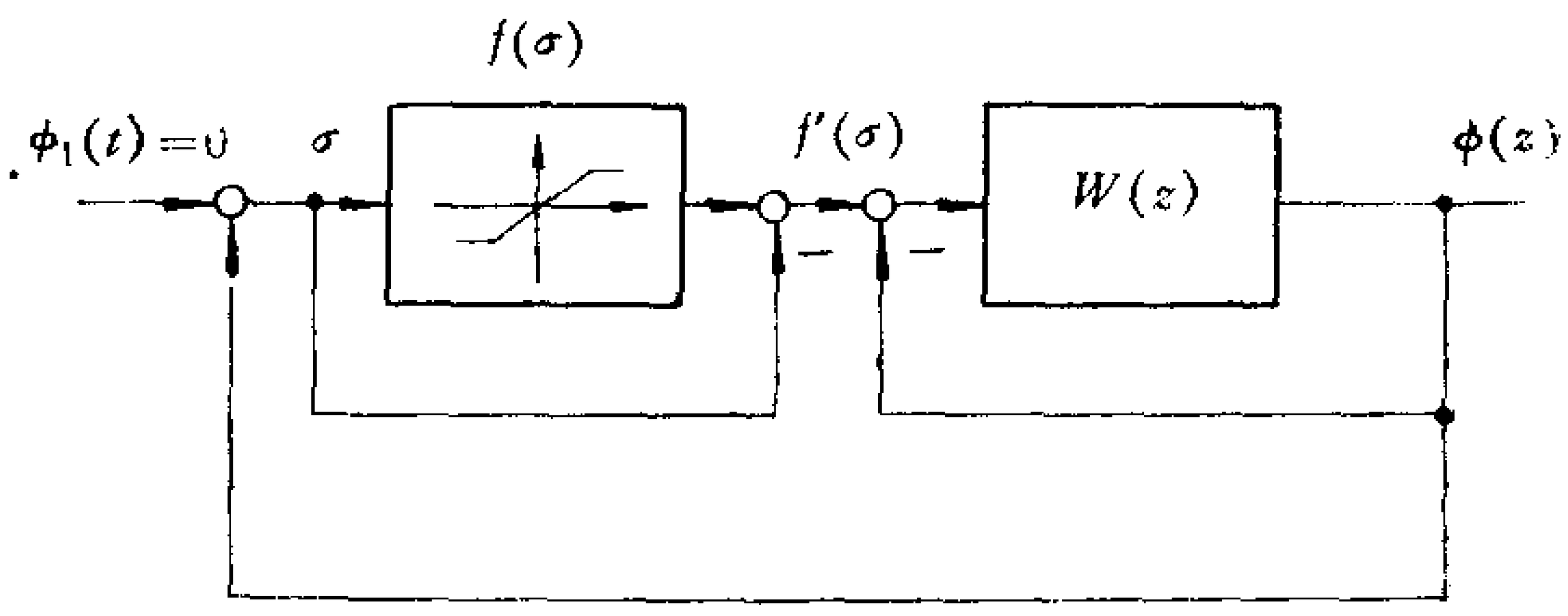

图 6

令

$$\begin{cases}f'(\sigma)=-\sigma+f(\sigma),\\ W'(z)=\dfrac{W(z)}{1+W(z)}.\end{cases} \tag{3}$$

把 (2) 代入 (3) 得：

$$W'(z)=\frac{2\tau_1 T(z-1)+\tau_2 T^2(z+1)}{z^2+\left(\tau_1 T+\frac{\tau_2 T^2}{2}-2\right)z+\left(\frac{\tau_2 T}{2}-\tau_1 T+1\right)}. \tag{4}$$

相应的特征方程是：

$$Q(z)=z^2+\left(\tau_1 T+\frac{\tau_2 T^2}{2}-2\right)z+\left(\frac{\tau_2 T}{2}-\tau_1 T+1\right). \tag{5}$$

根据 Sehur-Cohn 准则，若满足以下条件：

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{\tau_2 T^2}{2} < 2, \quad 或\ 0 < \tau_1 T < 2 \\ -2 < \dfrac{\tau_2 T^2}{2} - \tau_1 T < 0, \end{cases} \tag{6}$$

则 $W'(z)$ 是渐近稳定的. 即定理 1 的条件 a 成立.

由 (3) 的第一式，定理 1 的 b 和 c 相应地变化，选择适当的 k'，使以下两式成立:

b') $0 < \dfrac{f'(\sigma)}{\sigma} < k'$,

c') $R_e[W(e^{j\omega T})] > -\dfrac{1}{k'}$.

因为

$$e^{j\omega} = \cos\omega + j\sin\omega,$$

代入 (4) 得:

$$\begin{cases} Re[W'(e^{j\omega T})] = \Big\{[(2\tau_1 T + \tau_2 T^2)\cos\omega T + (2\tau_1 T - \tau_2 T^2)] \\ \quad \cdot \left[\cos 2\omega T + \left(\tau_1 T + \dfrac{\tau_2 T^2}{2} - 2\right)\cos\omega T \right. \\ \quad \left. + \left(\dfrac{\tau_2 T^2}{2} - \tau_1 T + 1\right)\right] - 2\left(\tau_1 T + \dfrac{\tau_2 T^2}{2}\right)\sin^2\omega T\Big\} \Big/ \\ \quad \Big\{\left[\cos 2\omega T + \left(\tau_1 T + \dfrac{\tau_2 T^2}{2} - 2\right)\cos\omega T \right. \\ \quad \left. + \left(\dfrac{\tau_2 T^2}{2} - \tau_1 T + 1\right)^2\right] - \left(\tau_1 T + \dfrac{\tau_2 T^2}{2}\right)^2 \sin^2\omega T\Big\}, \\ Im[W'(e^{j\omega T})] = \Big\{\left(\tau_1 T + \dfrac{\tau_2 T^2}{2}\right)\Big\{\cos 2\omega T \\ \quad + \left[4\left(\tau_1 T + \dfrac{\tau_2 T^2}{2}\right) - 2\right]\cos\omega T + 1\Big\}\sin\omega T\Big\} \Big/ \\ \quad \Big\{\left[\cos 2\omega T + \left(\tau_1 T + \dfrac{\tau_2 T^2}{2} - 2\right)\cos\omega T \right. \\ \quad \left. + \left(\dfrac{\tau_2 T^2}{2} - \tau_1 T + 1\right)^2\right] - \left(\tau_1 T + \dfrac{\tau_2 T^2}{2}\right)^2 \sin^2\omega T\Big\}. \end{cases} \tag{7}$$

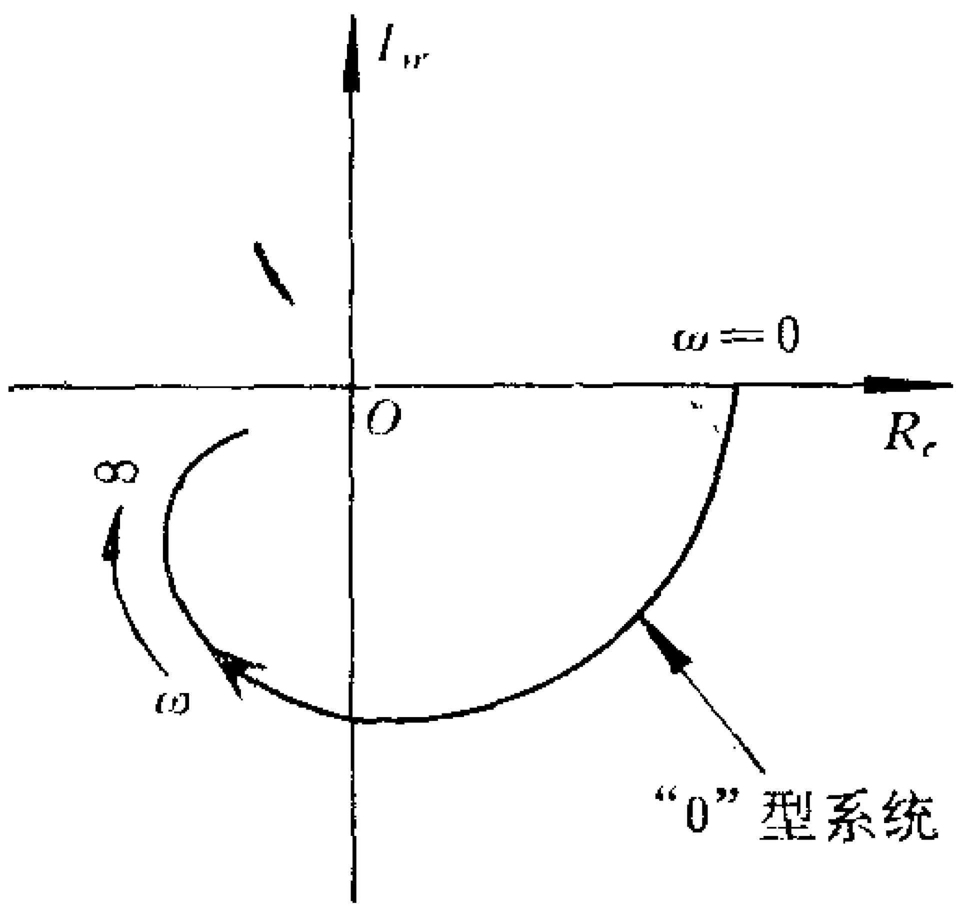

图　7

显然 $W'(z)$ 是 “0” 型系统 (图 7)，且非线性限幅器的线性段斜率可选得任意小，所以总能存在 τ_1，τ_2 及 k' 使得

$$Re[W'(e^{j\omega T})] > -\frac{1}{k'}$$

成立，即系统满足绝对稳定条件.

例如，根据模拟计算及数值计算，当 $T=1$ 秒，取限幅器线性段斜率 $k=1$，$\tau_1=1.31$，$\tau_2=0.25$，脉冲宽度限制为 48—96° 时为最佳参数(指过渡过程时间最短).

3. 稳态误差

以下利用终值定理，计算系统的稳态误差.

1）输入为单位阶跃函数

即

$$\phi_1(t) = u(t),$$

则

$$\phi_1(z) = Z[\phi_1(t)] = \frac{z}{z-1},$$

所以

$$\phi_{ss} = \lim_{z\to 1} \frac{1}{1+W(z)} = 0.$$

即位置无差.

2）输入为单位速度函数

即

$$\phi_1(t) = t,$$

则

$$\phi_1(z) = Z[\phi_1(t)] = \frac{Tz}{(z-1)^2},$$

所以

$$\phi_{ss} = \lim_{z\to 1} \frac{T}{(z-1)[1+W(z)]} = 0$$

即速度无差.

3）当输入为加速度时

即

$$\phi_1(t) = t^2,$$

则

$$\phi_1(z) = Z[\phi_1(t)] = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3},$$

所以

$$\phi_{ss} = \frac{T^2}{2} \lim_{z\to 1} \frac{z+1}{(z-1)^2[1+W(z)]} = \frac{1}{\tau_2}$$

即加速度有差.

通过以上研究可知，本系统是速度无差系统，加速度误差正比于 $1/\tau_2$. 因此，当参考信号为恒定频率的信号时，系统的稳态误差仅取决部件本身的性能指标. 跟踪频率变化的能力将取决于 τ_2 的大小.

4. 暂态过程

假定非线性段的线性区充分宽，以下给出暂态过程的近似表达式.

因为

$$\frac{\phi}{\phi_1}(z) = \frac{(z-1)^2}{z^2+\alpha z+\beta}, \tag{8}$$

所以

$$\phi(z) = \frac{(z-1)^2}{z^2+\alpha z+\beta}\phi_1(z). \tag{9}$$

其中

$$
\begin{cases}
\alpha = \tau_1 T + \dfrac{\tau_2 T^2}{2} - 2, \\
\beta = \dfrac{\tau_2 T}{2} - \tau_1 T + 1,
\end{cases}
\tag{10}
$$

1）阶跃输入

即

$$\phi_1(t) = \varphi_1 u(t), \quad (\varphi_1 = \text{常数})$$

则

$$\phi_1(z) = z[\varphi_1 u(t)] = \frac{\varphi_1 z}{z-1},$$

所以

$$
\begin{aligned}
\phi(z) &= \frac{(z-1)^2}{z^2+\alpha z+\beta} \cdot \frac{\varphi_1 z}{z-1} \\
&= \varphi_1[1-(1+\alpha)z^{-1}+(\alpha-\beta+\alpha^2)z^{-2}-(\beta-\alpha^2+2\alpha\beta-\alpha^3)z^{-3}+\cdots].
\end{aligned}
$$

取反变换，求得暂态过程表达式

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) = z^{-1}[\phi(z)] = \varphi_1[\delta(t)-(1+\alpha)\delta(t-T)+(\alpha-\beta+\alpha^2)\delta(t-2T) \\
-(\beta-\alpha^2+2\alpha\beta-\alpha^3)\delta(t-3T)+\cdots]
\end{aligned}
\tag{11}
$$

例. 取 $T=1$ 秒，$\tau_1=1.31$，$\tau_2=0.25$. 则由式 (10) 求得 $\alpha=-0.565$，$\beta=-0.185$，再代入式(11)得:

$$\varphi(t) = \varphi_1[\delta(t)-0.435\delta(t-1)-0.560\delta(t-2)-0.534\delta(t-3)+\cdots].$$

2）速度输入

即

$$\phi_1 = vt,$$

则

$$\phi_1(z) = Z[vt] = \frac{vTz}{(z-1)^2}, \tag{12}$$

把 (12) 代入 (9) 得

$$
\begin{aligned}
\phi(z) &= \frac{(z-1)^2}{z^2+\alpha z+\beta}\frac{vTz}{(z-1)^2} \\
&= vT[z^{-1}-\alpha z^{-2}+(\alpha^2-\beta)z^{-3}+(2\alpha\beta-\alpha^3)z^{-4}+\cdots]
\end{aligned}
$$

取反变换，即求得暂态过程:

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) = v[\delta(t-T)+\alpha\delta(t-2T)+(\alpha^2-\beta)\delta(t-3T) \\
+(2\alpha\beta-\alpha^3)\delta(t-4T)+\cdots].
\end{aligned}
\tag{13}
$$

例. 取 $T=1$ 秒，$\tau_1=1.31$，$\tau_2=0.25$ 则由式 (13) 得 $\alpha=-0.565$，$\beta=-0.185$ 再代入 (13) 得:

$$\varphi(t) = v[\delta(t-1)-0.565\delta(t-2)+0.504\delta(t-3)+0.389\delta(t-4)+\cdots].$$

三、计 算

1. 模拟计算

利用模拟计算机按图 8 的模拟线路，进行了模拟计算.

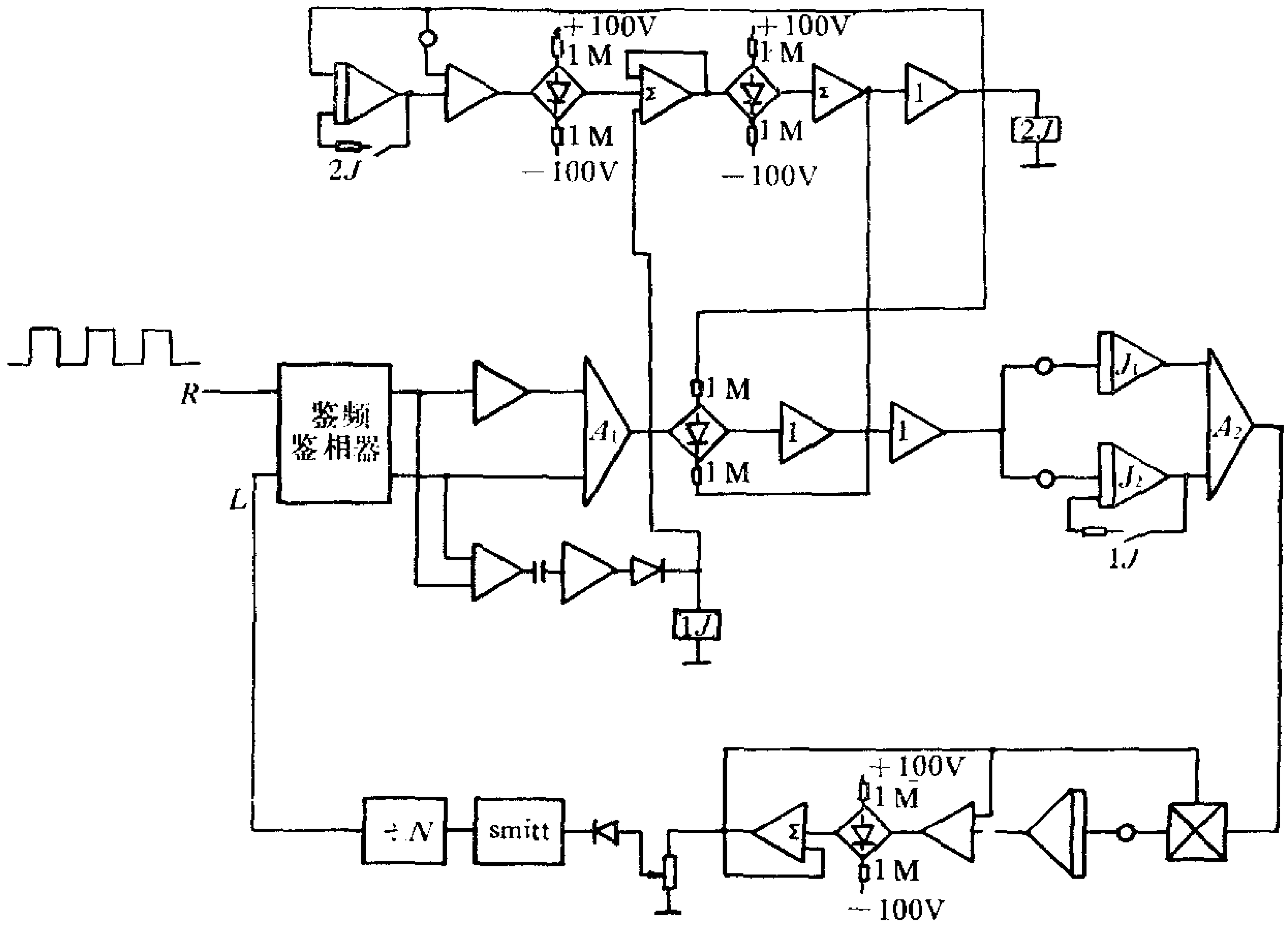

图 8　模拟线路图

在模拟计算中利用优选法[6]进行了最佳参数选择. 最优指标是过渡过程时间最短. 计算步骤是：第一步利用式(6)估算出参数变化范围；第二步固定 τ_2 和对脉冲宽度限制，对 τ_1 取最优，设为 τ_1^0；第三步取定 τ_1^0 和对 τ_2 取最优，设为 τ_2^0；最后取定 τ_1^0 和 τ_2^0，对宽度

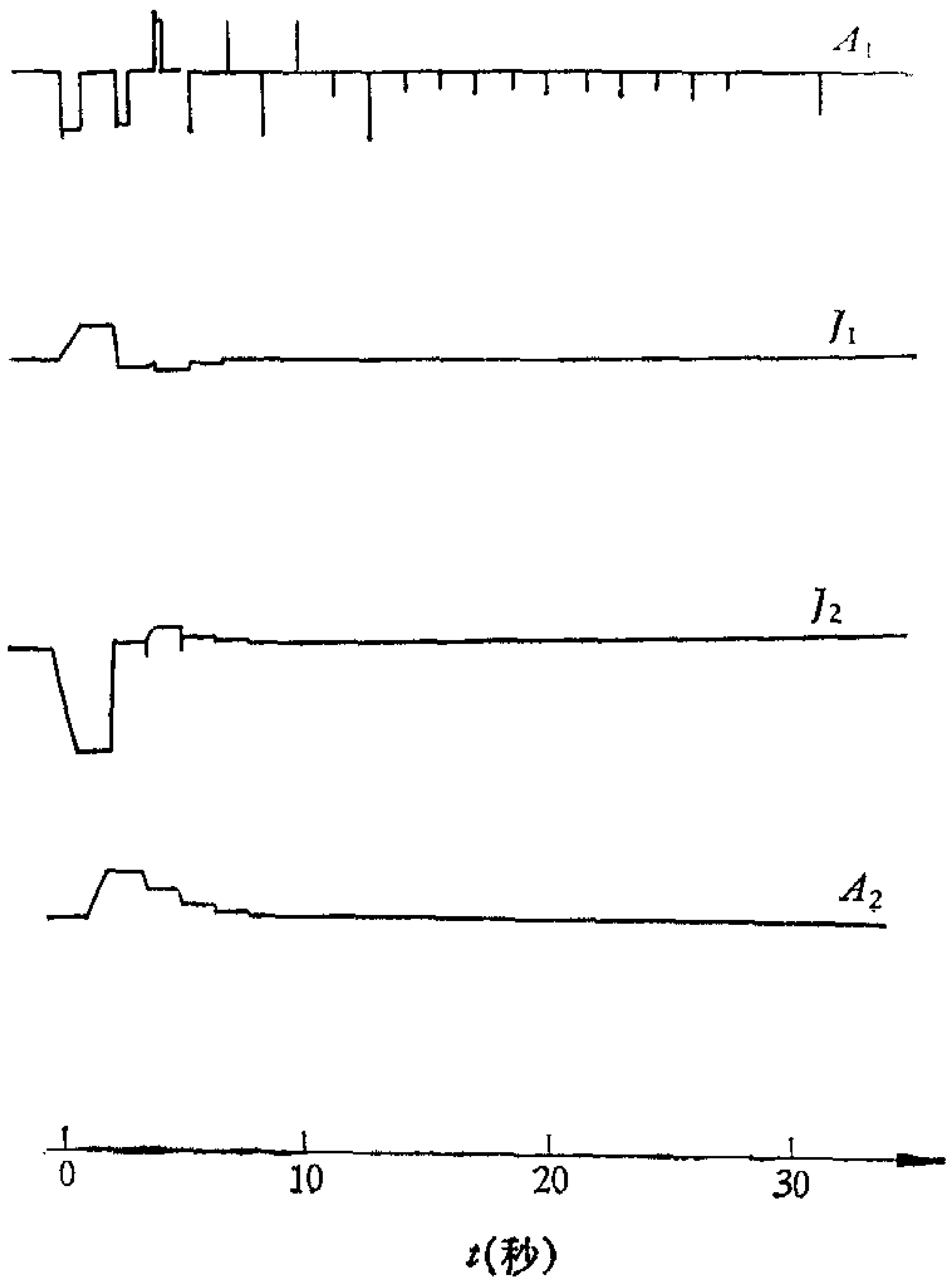

图 9　模拟计算结果

脉冲宽度限制为 48°，$\tau_1 = 1.31$，$\tau = 0.25$，初始相位误差 $\varphi_{i_0} = -180°$

限制取优. 计算结果见图 9.

2. 数值计算

对上面讨论的系统，在模拟计算基础上又进行了数值计算和最优参数选择. 计算中采用下述数学模型:

鉴频-鉴相器的逻辑关系:

若: ① $R = L = 0$, 则 $RA = LW = 0$;

② $R = L = 1$, 则 $RA = LW = 0$;

③ $t = t_{-0}$时, $R = L = 0$, 当 $t > t_{+0}$时,

$$\begin{cases} RA = 1, LW = 0, 若\ R = 1, L = 0 \\ LW = 1, RA = 0, 若\ R = 0, L = 1; \end{cases}$$

④ $t = t_{-0}$时, $R = L = 1$, 当 $t > t_{+0}$时,

$$\begin{cases} RA = 1, LW = 0, 若\ R = 0, L = 1 \\ RA = 0, LW = 1, 若\ R = 1, L = 1. \end{cases}$$

其中 R 为参考信号; L 为反馈信号; RA, LW 为鉴频-鉴相器的两路输出.

参考信号

$$R = \sum_{n=0}^{\infty}\left[u\left(t - n\frac{2\pi}{\omega_0}\right) - u\left(t - (n+1)\frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right],$$

校正网络输出电压

$$v(t) = a\left[\sum_{n=0}^{i-1}\int_{T_n}^{T_{n+1}}(RA - LW)dt + \int_{T_i}^{t}(RA - LW)dt\right]$$

$$+ b\int_{T_i}^{t}(RA - LW)dt,$$

其中 T_j 满足以下条件:

$$RA + LW = 0, 当\ T_{j-0},$$
$$RA + LW = 1, 当\ T_{j+0}.$$

T_{j+1} 的值取为限幅器的限幅值. $T_j \leqslant t \leqslant T_{j+1}$ $(j = 1, 2, \cdots)$.

VCO 的频率为

$$\omega(t) = cv(t).$$

其中 c 为转换系数.

迴路反馈相位 $L = \sum_{n=0}^{\infty}[u(t - t_n) - u(t - t_{n+1})]$,

其中 $t_n = \int_0^{t_n}[\omega_1(t) + \omega(t)]dt + \varphi_{l_0} = 2n\pi$.

$\omega_1(t)$ 对应 VCO 的中心频率; φ_{l_0} 是初始相位差.

例. 取 $T = 1$ 秒, 脉冲宽度限制为 48°—96°, $\tau_1 = cb = 1.57$, $\tau_2 = ac = 0.29$ 及 $\varphi_{l_0} = 180°$, 经计算达到稳态时间是 34.55 秒, 稳态误差为零.

通过计算证实了理论分析是正确的, 可得出以下结论:

① 系统是稳定的；

② 当 R 的频率固定不变时，系统的稳态误差为零；

③ 当 R 的频率在一定范围内变化时，系统的稳态误差仍为零；

④ 当 ω_0 具有固定变化率时，系统出现稳态误差，且反比于 $1/\tau_2$.

四、讨　论

通过理论分析、仿真试验和实际应用，充分说明本方案是可行的，其优点也十分明显．本方案既适用于全数字化线路也适用于模拟线路．一般说来，采用全数字化线路，其稳态误差取决于量化误差，因此容易实现高精度．采用模拟线路比较容易实现，但因受到元、部件等性能指标影响，其稳态精度比之数字化线路要差．因为要求高的稳态精度，必然要求 VCO 有高的频率稳定度，为此，要求有高稳定度的电源，而稳定度为 10^{-3} 以上的电源，实现上比较困难；此外放大器、积分器的零漂和噪声干扰等都是影响稳态精度的因素．

参　考　文　献

[1] Cupta, S. C., 锁相环综述，国外电子技术 (1975) 第四期，赵洪译，丁锡鹏、王合校.
[2] "锁相技术"编译组译，锁相技术，科学出版社，1971.
[3] Brow, J. L., A Digital Phase and Frequency Sensitive Detector, Proc. IEEE, **59**(1971), 717—718.
[4] David, P. L., Theory of Sampled-data Control Systems, New York, Wiley, 1965.
[5] Kuo, T. I., Aanlysis and Systhesis of Sampled-data Control Systems, Prentice-Hall, 1963.
[6] 齐念一，优选法平话，科学出版社，1971.

THE DESIGN OF DIGITAL PLL

GUO ZHAOZENG
(*Beijing Institute of Control Engineering*)

ABSTRACT

In this paper a kind of the digital PLL (phase look-loop) with a new compensating network is presented which can be used in the low frequency (<1 H) phase locking system. The features of PLL are high precision, quick dynamic response and large locking range.