第8卷 第2期 自 动 化 学 报 Vol. 8, No. 2
1982 年 4 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Apr., 1982

观测器新结构的理论研究[1)]

陈 文 德
(中国科学院系统科学研究所)

摘 要

本文得到了新结构观测器的一般表达式，并证明了它们和 Luenberger 观测器代数等价，给出了坐标变换阵和极点配置的公式.

观测器的维数大于1时，由于反馈耦合线较多，又缺乏物理意义，因此工程调整困难。为了解决这个问题，高龙等[2]提出了观测器并合法，并通过具体计算验证了用并合法设计的二维观测器与 Luenberger 观测器代数等价. 本文探讨了这种新结构观测器的理论基础，对一般 n 阶系统，给出了 $n-m$ 阶新结构观测器的一般表达式，并证明了它和 Luenberger 观测器代数等价，得到了联系这二类观测器的坐标变换阵，还给出了一个与极点配置有关的公式.

经适当的坐标变换后，r 维输入，m 维输出的 n 阶线性系统总可记为：

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_p \\ \dot{\boldsymbol{x}}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{pp} & A_{ps} \\ A_{sp} & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_p \\ \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p \\ B_s \end{bmatrix} \boldsymbol{u}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_s \tag{2}$$

这里 $\boldsymbol{x}_s$ 为可以测得的 m 维状态（列）向量，$\boldsymbol{x}_p$ 为 $n-m$ 维状态(列)向量。若系统(1),(2)能观测，则 $n-m$ 维 Luenberger 观测器为：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\phi}} = (A_{pp} + M_pA_{sp})\boldsymbol{\phi} + (B_p + M_pB_s)\boldsymbol{u} \\ \qquad + \{A_{ps} + M_pA_{ss} - (A_{pp} + M_pA_{sp})M_p\}\boldsymbol{y} \\ \hat{\boldsymbol{x}}_p = \boldsymbol{\phi} - M_p\boldsymbol{y}. \end{cases} \tag{3}$$

为了使观测器容易进行工程调整，提出观测器的一种新结构，或者说提出一种新的工程设计法，其步骤如下：把 $\boldsymbol{x}_p$ 看成由 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{s-1}$, $s-1$ 个向量并成. $\boldsymbol{x}_i$ 为 p_i 维向量，而 $\sum_{i=1}^{s-1} p_i = n - m$. 于是(1)式可写成：

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{x}}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}A_{12}\cdots A_{1s} \\ A_{21}A_{22}\cdots A_{2s} \\ \vdots \\ A_{s1}A_{s2}\cdots A_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_s \end{bmatrix} \boldsymbol{u}. \tag{4}$$

先取定某一个 i，把 $\boldsymbol{x}_i$ 看作待观测向量，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_s$ 看作已测得的向

本文于 1980 年 8 月 15 日收到.

1) 本文主要结果曾在国际自控联 (IFAC) 第八届世界大会上报告[1]，但未报告结果的证明.

量，(2)式改由下式代替：

$$\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{x}_1^T \cdots \boldsymbol{x}_{i-1}^T \boldsymbol{x}_{i+1}^T \cdots \boldsymbol{x}_s^T]^T. \tag{2a}$$

A^T 表示阵 A 的转置阵．由于已假定(1)，(2)能观测，显然系统(4)，(2a)一定能观测，其 p_i 维降维观测器一定存在．按(3)式设计 p_i 维降维观测器，然后陆续取 $i = 1, 2, \cdots, s-1$，共得到 $s-1$ 个子观测器．最后进行并合，即把各子观测器中假设已测得的向量 $\boldsymbol{x}_i (i = 1, 2, \cdots, s-1)$ 用各子观测器的输出 $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ 来代替，如此得下式：

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\phi}}_i = &\{A_{ii} + [M_{i1} \cdots M_{ii-1} M_{ii+1} \cdots M_{is}][A_{1i}^T \cdots A_{i-1i}^T A_{i+1i}^T \cdots A_{si}^T]^T\} \boldsymbol{\phi}_i \\
&+ \{B_i + [M_{i1} \cdots M_{ii-1} M_{ii+1} \cdots M_{is}][B_1^T \cdots B_{i-1}^T B_{i+1}^T \cdots B_s^T]^T\} \boldsymbol{u} \\
&+ \left\{ [A_{i1} \cdots A_{ii-1} A_{ii+1} \cdots A_{is}] + [M_{i1} \cdots M_{ii-1} M_{ii+1} \cdots M_{is}] \right. \\
&\times \begin{bmatrix} A_{11} \cdots A_{1i-1} A_{1i+1} \cdots\cdots A_{1s} \\ \vdots \\ A_{i-11} \cdots A_{i-1i-1} A_{i-1i+1} \cdots A_{i-1s} \\ A_{i+11} \cdots A_{i+1i-1} A_{i+1i+1} \cdots A_{i+1s} \\ \vdots \\ A_{s1} \cdots A_{si-1} A_{si+1} \quad \cdots A_{ss} \end{bmatrix} \\
&- \left(A_{ii} + [M_{i1} \cdots M_{ii-1} M_{ii+1} \cdots M_{is}] \begin{bmatrix} A_{1i} \\ \vdots \\ A_{i-1i} \\ A_{i+1i} \\ \vdots \\ A_{si} \end{bmatrix} \right) \\
&\left. \times [M_{i1} \cdots M_{ii-1} M_{ii+1} \cdots M_{is}] \right\} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{x}}_{i-1} \\ \hat{\boldsymbol{x}}_{i+1} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{x}}_{s-1} \\ \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots, s-1
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{\phi}_i - [M_{i1} \cdots M_{ii-1} M_{ii+1} \cdots M_{is}][\hat{\boldsymbol{x}}_1^T \cdots \hat{\boldsymbol{x}}_{i-1}^T \hat{\boldsymbol{x}}_{i+1}^T \cdots \hat{\boldsymbol{x}}_{s-1}^T \boldsymbol{x}_s^T]^T, \quad i = 1, 2, \cdots, s-1. \tag{6}$$

下面证明：(5)，(6)式表达的新结构观测器与 $n-m$ 维 Luenberger 观测器代数等价．

注意到(6)式中 $i=1,2,\cdots,s-1$，所以(6)式可写成：

$$\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}_1\\ \hat{\boldsymbol{x}}_2\\ \vdots\\ \hat{\boldsymbol{x}}_{s-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\phi}_1\\ \boldsymbol{\phi}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\phi}_{s-1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & M_{12} & M_{13} & \cdots M_{1s-1} M_{1s}\\ M_{21} & 0 & M_{23} & \cdots M_{2s-1} M_{2s}\\ & \vdots & & \\ M_{s-11} & M_{s-12} & M_{s-13} & \cdots 0 \quad M_{s-1s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}_1\\ \hat{\boldsymbol{x}}_2\\ \vdots\\ \hat{\boldsymbol{x}}_{s-1}\\ \boldsymbol{x}_s\end{bmatrix}, \tag{7}$$

记

$$\begin{bmatrix}I & M_{12} & \cdots M_{1s-1}\\ M_{21} & I & \cdots M_{2s-1}\\ & \vdots & \\ M_{s-11} & M_{s-12} & \cdots I\end{bmatrix}\triangleq\begin{bmatrix}M^{(1)}\\ M^{(2)}\\ \vdots\\ M^{(s-1)}\end{bmatrix}\triangleq M.$$

则(7)式可化为

$$M[\hat{\boldsymbol{x}}_1^T\hat{\boldsymbol{x}}_2^T\cdots\hat{\boldsymbol{x}}_{s-1}^T]^T=[\boldsymbol{\phi}_1^T\boldsymbol{\phi}_2^T\cdots\boldsymbol{\phi}_{s-1}^T]^T-[M_{1s}^TM_{2s}^T\cdots M_{s-1s}^T]^T\boldsymbol{x}_s. \tag{8}$$

假定：设计各 p_i 维子观测器时，M_{ij} 选择得使 M 非奇异，即 M^{-1} 存在，于是

$$[\hat{\boldsymbol{x}}_1^T\hat{\boldsymbol{x}}_2^T\cdots\hat{\boldsymbol{x}}_{s-1}^T]^T=M^{-1}[\boldsymbol{\phi}_1^T\boldsymbol{\phi}_2^T\cdots\boldsymbol{\phi}_{s-1}^T]^T-M^{-1}[M_{1s}^TM_{2s}^T\cdots M_{s-1s}^T]^T\boldsymbol{x}_s \tag{9}$$

记

$$M^{-1}[M_{1s}^TM_{2s}^T\cdots M_{s-1s}^T]^T=[M_1^TM_2^T\cdots M_{s-1}^T]^T. \tag{10}$$

经计算，(5)式可化为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\phi}}_i=[M_{i1}\cdots M_{ii-1}IM_{ii+1}\cdots M_{is}]\Bigg\{&[A_{1i}^TA_{2i}^T\cdots A_{si}^T]^T\boldsymbol{\phi}_i+[B_1^TB_2^T\cdots B_s^T]^T\boldsymbol{u}\\ &+\left(\begin{bmatrix}A_{11}\cdots A_{1i-1}\ 0\ A_{1i+1}\cdots A_{1s}\\ A_{21}\cdots A_{2i-1}\ 0\ A_{2i+1}\cdots A_{2s}\\ \vdots\\ A_{s1}\cdots A_{si-1}\ 0\ A_{si+1}\cdots A_{ss}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}A_{1i}\\ A_{2i}\\ \vdots\\ A_{si}\end{bmatrix}[M_{i1}\cdots M_{ii-1}\ 0\ M_{ii+1}\cdots M_{is}]\right)\\ &\times\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}_1\\ \hat{\boldsymbol{x}}_2\\ \vdots\\ \hat{\boldsymbol{x}}_{s-1}\\ \boldsymbol{x}_s\end{bmatrix}\Bigg\},\quad i=1,2,\cdots,s-1.\end{aligned} \tag{11}$$

由(8)式可知，对 $i=1,2,\cdots,s-1$，有

$$\boldsymbol{\phi}_i=M^{(i)}[\hat{\boldsymbol{x}}_1^T\hat{\boldsymbol{x}}_2^T\cdots\hat{\boldsymbol{x}}_{s-1}^T]^T+M_{is}\boldsymbol{x}_s \tag{12}$$

把(12)，(9)式代入(11)式可得

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\phi}}_i = {} & [M_{i1}\cdots M_{ii-1} I M_{ii+1}\cdots M_{is}]\Bigg\{[B_1^T B_2^T\cdots B_s^T]^T\boldsymbol{u} \\
& + \left(\begin{bmatrix} A_{11}\cdots A_{1i-1}\ 0\ A_{1i+1}\cdots A_{1s-1} \\ A_{21}\cdots A_{2i-1}\ 0\ A_{2i+1}\cdots A_{2s-1} \\ \vdots \\ A_{s1}\cdots A_{si-1}\ 0\ A_{si+1}\cdots A_{ss-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \\ \vdots \\ A_{si} \end{bmatrix}[M_{i1}\cdots M_{ii-1}\ 0\ M_{ii+1}\cdots M_{is-1}]\right. \\
& \left. + \begin{bmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \\ \vdots \\ A_{si} \end{bmatrix} M^{(i)}\right)\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{x}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{x}}_{s-1} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} A_{1s} \\ A_{2s} \\ \vdots \\ A_{ss} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \\ \vdots \\ A_{si} \end{bmatrix} M_{is} + \begin{bmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \\ \vdots \\ A_{si} \end{bmatrix} M_{is}\right)\boldsymbol{x}_s\Bigg\} \\
= {} & [M_{i1}\cdots M_{ii-1} I M_{ii+1}\cdots M_{is}]\Bigg\{[B_1^T B_2^T\cdots B_s^T]^T\boldsymbol{u} \\
& + \begin{bmatrix} A_{11}A_{12}\cdots A_{1s-1} \\ A_{21}A_{22}\cdots A_{2s-1} \\ \vdots \\ A_{s1}A_{s2}\cdots A_{ss-1} \end{bmatrix}\left(M^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_1 \\ \boldsymbol{\phi}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\phi}_{s-1} \end{bmatrix} - M^{-1}\begin{bmatrix} M_{1s} \\ M_{2s} \\ \vdots \\ M_{s-1s} \end{bmatrix} X_s\right) + \begin{bmatrix} A_{1s} \\ A_{2s} \\ \vdots \\ A_{ss} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_s\Bigg\} \\
= {} & [M_{i1}\cdots M_{ii-1} I M_{ii+1}\cdots M_{is}]\Bigg\{\begin{bmatrix} A_{11}A_{12}\cdots A_{1s-1} \\ A_{21}A_{22}\cdots A_{2s-1} \\ \vdots \\ A_{s1}A_{s2}\cdots A_{ss-1} \end{bmatrix} M^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_1 \\ \boldsymbol{\phi}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\phi}_{s-1} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_s \end{bmatrix}\boldsymbol{u} + \left(\begin{bmatrix} A_{1s} \\ A_{2s} \\ \vdots \\ A_{ss} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11}A_{12}\cdots A_{1s-1} \\ A_{21}A_{22}\cdots A_{2s-1} \\ \vdots \\ A_{s1}A_{s2}\cdots A_{ss-1} \end{bmatrix} M^{-1}\begin{bmatrix} M_{1s} \\ M_{2s} \\ \vdots \\ M_{s-1s} \end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}_s\Bigg\} \\
& i = 1, 2, \cdots, s-1. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

由(10)式可知

$$M_{is} = M^{(i)}[M_1^T M_2^T\cdots M_{s-1}^T]^T, \qquad (14)$$

把(14),(10)式代入(13),可得

$$
\dot{\boldsymbol{\phi}}_i = M^{(i)}\left\{\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots A_{1s-1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots A_{2s-1} \\ & \vdots & \\ A_{s-11} & A_{s-12} & \cdots A_{s-1s-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{s-1} \end{bmatrix}[A_{s1}A_{s2}\cdots A_{ss-1}]\right) M^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_1 \\ \boldsymbol{\phi}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\phi}_{s-1} \end{bmatrix}\right.
$$

$$
+\left(\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{s-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{s-1} \end{bmatrix} B_s\right)\boldsymbol{u} + \left[\begin{bmatrix} A_{1s} \\ A_{2s} \\ \vdots \\ A_{s-1s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{s-1} \end{bmatrix} A_{ss}\right.
$$

$$
\left.-\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots A_{1s-1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots A_{2s-1} \\ & \vdots & \\ A_{s-11} & A_{s-12} & \cdots A_{s-1s-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{s-1} \end{bmatrix} [A_{s1}A_{s2}\cdots A_{ss-1}]\right)\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{s-1} \end{bmatrix}\right]\boldsymbol{x}_s \Bigg\}
$$

$$
i = 1, 2, \cdots, s-1. \tag{15}
$$

注意到(15)式中 $i = 1, 2, \cdots, s-1$，对(15)和(9)式进行坐标变换，

$$
[\boldsymbol{\varphi}_1^T\boldsymbol{\varphi}_2^T\cdots\boldsymbol{\varphi}_{s-1}^T]^T = M^{-1}[\boldsymbol{\phi}_1^T\boldsymbol{\phi}_2^T\cdots\boldsymbol{\phi}_{s-1}^T]^T \tag{16}
$$

可得

$$
[\hat{\boldsymbol{x}}_1^T\hat{\boldsymbol{x}}_2^T\cdots\hat{\boldsymbol{x}}_{s-1}^T]^T = [\boldsymbol{\varphi}_1^T\boldsymbol{\varphi}_2^T\cdots\boldsymbol{\varphi}_{s-1}^T]^T - [M_1^TM_2^T\cdots M_{s-1}^T]^T\boldsymbol{x}_s. \tag{17}
$$

$$
\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varphi}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}}_{s-1} \end{bmatrix} = \left\{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots A_{1s-1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots A_{2s-1} \\ & \vdots & \\ A_{s-11} & A_{s-12} & \cdots A_{s-1s-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{s-1} \end{bmatrix} [A_{s1}A_{s2}\cdots A_{ss-1}]\right\}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1 \\ \boldsymbol{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_{s-1} \end{bmatrix}
$$

$$
+\left\{\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{s-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{s-1} \end{bmatrix} B_s\right\}\boldsymbol{u} + \left\{\begin{bmatrix} A_{1s} \\ A_{2s} \\ \vdots \\ A_{s-1s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{s-1} \end{bmatrix} A_{ss}\right.
$$

$$
\left.-\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots A_{1s-1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots A_{2s-1} \\ & \vdots & \\ A_{s-11} & A_{s-12} & \cdots A_{s-1s-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{s-1} \end{bmatrix} [A_{s1}A_{s2}\cdots A_{ss-1}]\right)\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{s-1} \end{bmatrix}\right\}\boldsymbol{x}_s. \tag{18}
$$

由(3)式知(17)，(18)就是系统(1)，(2)的 $n-m$ 维 Luenberger 观测器. 根据观测器理论，可知(5)，(6)式确是一个 $n-m$ 维观测器. 由此可得如下定理.

定理 1. 若系统(1)，(2)能观测，且选择 M_{ij} 使 M 非奇异，则用新方法设计出来的(5)，(6)确是一个 $n-m$ 维状态观测器，且和 Luenberger 观测器(17)，(18)代数等价，其坐标变换阵为

$$
M = \begin{bmatrix} I & M_{12} & \cdots M_{1s-1} \\ M_{21} & I & \cdots M_{2s-1} \\ & \vdots & \\ M_{s-11} & M_{s-12} \cdots & I \end{bmatrix}.
$$

决定这二种观测器极点配置的 M_i，M_{ij} 阵之间满足关系

$$\begin{bmatrix} M_{1s} \\ M_{2s} \\ \vdots \\ M_{s-1s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & M_{12} & \cdots M_{1s-1} \\ M_{21} & I & \cdots M_{2s-1} \\ & \vdots & \\ M_{s-11} & M_{s-12} \cdots & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{s-1} \end{bmatrix}.$$

工程中经常取 $p_1 = p_2 = \cdots = p_{s-1} = 1$. 这时 $A_{ij} = a_{ij}$ 是一个标量，$1 \leqslant i, j \leqslant s-1$. 如系统 (4)(2a) 能观测 ($i = 1, 2, \cdots, s-1$)，可证矩阵

$$A \triangleq \begin{bmatrix} A_{pp} & A_{ps} \\ A_{sp} & A_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s-1} & A_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s-1} & A_{2s} \\ & \vdots & & & \\ a_{s-11} & a_{s-12} & \cdots & a_{s-1s-1} & A_{s-1s} \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss-1} & A_{ss} \end{bmatrix}$$

一定满足

$$\mathrm{Rank}[a_{1i} \cdots a_{i-1i} a_{i+1i} \cdots a_{s-1i} A_{si}^T]^T = 1. \quad i = 1, 2, \cdots, s-1.$$

所以它至少含有一个非零元，令其为 $a_{j(i)i}$，则 M_{ij} 可取

$$[M \mid M^{(s)}] \triangleq \begin{bmatrix} 1 & M_{12} & \cdots & M_{1s-1} & M_{1s} \\ M_{21} & 1 & \cdots & M_{2s-1} & M_{2s} \\ & \vdots & & & \\ M_{s-11} & M_{s-12} & \cdots\ 1 & & M_{s-1s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots m_{j(1)1} \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots\ 0\ \cdots & m_{j(2)2} & \cdots \\ & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots\ 1\ \cdots & m_{j(s-1)s-1} & \cdots \end{bmatrix},$$

即阵 $[M \mid M^{(s)}]^T$ 在 A 阵的非零元 $a_{j(i)i}$ 处取成非零值 $m_{j(i)i}$，其它非主对角线元均取成零，则每个一维子观测器的极点为

$$\lambda_i = a_{ii} + m_{j(i)i} a_{j(i)i}.$$

把 $m_{j(i)i} = (\lambda_i - a_{ii})/a_{j(i)i}$ 代入阵 $[M \mid M^{(s)}]$ 后得到的阵记为 $[M_\lambda \mid M_\lambda^{(s)}]$. 由此可得以下推论.

推论 1. 若定理 1 的假设条件成立，且 M_{ij} 的取法如上，则 $n-m$ 个一维子观测器的极点 λ_i 与由它们并成的 $n-m$ 维观测器的极点 μ_i 间满足

$$\det(A_{pp} + M_\lambda^{-1} M_\lambda^{(s)} A_{sp} - \mu_i I) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n-m.$$

应用上式可把极点 μ_i 的配置问题转化为极点 λ_i 的配置问题.

关于全维观测器，亦可得到类似的结果. 设系统仍如 (4), (2)所示，把 $\boldsymbol{x}_s$ 看成由 $\boldsymbol{z}_s$, $\boldsymbol{z}_{s+1}$, $\cdots$, $\boldsymbol{z}_l$ 这 $l-s+1$ 个向量并成. 这里 $\boldsymbol{z}_i$ 为 p_i 维向量，而 $\sum_{i=s}^{l} p_i = m$. 于是原系统可写成

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{s-1} \\ \dot{\boldsymbol{z}}_s \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{z}}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} \cdots & A_{2l} \\ & \vdots & \\ A_{l1} & A_{l2} \cdots & A_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_{s-1} \\ \boldsymbol{z}_s \\ \vdots \\ \boldsymbol{z}_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_l \end{bmatrix} \boldsymbol{u}, \tag{19}$$

$$\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{z}_s^T \boldsymbol{z}_{s+1}^T \cdots \boldsymbol{z}_l^T]^T. \tag{20}$$

同样，可以设计新结构的全维观测器如下：

$$\hat{x}_k = \phi_k - [M_{k1} \cdots M_{kk-1} M_{kk+1} \cdots M_{kl}][\hat{x}_1^T \cdots \hat{x}_{k-1}^T \hat{x}_{k+1}^T \cdots \hat{z}_l^T]^T,$$
$$k = 1, 2, \cdots, l. \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_k = {} & \{A_{kk} + [M_{k1} \cdots M_{kk-1} M_{kk+1} \cdots M_{kl}][A_{1k}^T \cdots A_{k-1k}^T A_{k+1k}^T \cdots A_{lk}^T]^T\}\phi_k \\
& + \{B_k + [M_{k1} \cdots M_{kk-1} M_{kk+1} \cdots M_{kl}][B_1^T \cdots B_{k-1}^T B_{k+1}^T \cdots B_l^T]^T\}u \\
& + \Bigg\{ [A_{k1} \cdots A_{kk-1} A_{kk+1} \cdots A_{kl}] + [M_{k1} \cdots M_{kk-1} M_{kk+1} \cdots M_{kl}] \\
& \times \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots A_{1k-1} & A_{1k+1} & \cdots A_{1l} \\ & \vdots & & \\ A_{k-11} & \cdots A_{k-1k-1} & A_{k-1k+1} & \cdots A_{k-1l} \\ A_{k+11} & \cdots A_{k+1k-1} & A_{k+1k+1} & \cdots A_{k+1l} \\ & \vdots & & \\ A_{l1} & \cdots A_{lk-1} & A_{lk+1} & \cdots A_{ll} \end{bmatrix} \\
& - \left(A_{kk} + [M_{k1} \cdots M_{kk-1} M_{kk+1} \cdots M_{kl}] \begin{bmatrix} A_{1k} \\ \vdots \\ A_{k-1k} \\ A_{k+1k} \\ \vdots \\ A_{lk} \end{bmatrix} \right) [M_{k1} \cdots M_{kk-1} M_{kk+1} \cdots M_{kl}] \Bigg\} \\
& \times \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_{k-1} \\ \hat{x}_{k+1} \\ \vdots \\ \hat{z}_l \end{bmatrix} + M_{kk}(z_k - \hat{z}_k). \qquad k = 1, 2, \cdots, l.
\end{aligned} \tag{22}$$

其中，当 $s \leqslant i \leqslant l$, $1 \leqslant j \leqslant s-1$, $1 \leqslant i = j \leqslant s-1$ 时，$M_{ij} = 0$. 另外，当 $k \geqslant s$ 时，(21)，(22)式中的 $\hat{x}_k$ 改为 $\hat{z}_k$.

定理 2. 若系统(19)，(20)能观测，且选择 M_{ij} 使下面(23)式中定义的阵 $\widetilde{M}$ 为非奇异阵，则用新方法设计的(21)，(22)是一个全维观测器，且与 Luenberger 全维观测器代数等价. 其坐标变换阵就是(23)中的 $\widetilde{M}$. 决定这二种观测器极点配置的 M_i, M_{ij} 阵之间满足如下关系式

$$
\widetilde{M}\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{s-1} \\ \hline M_s \\ M_{s+1} \\ \vdots \\ M_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline M_{ss} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_{s+1s+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & M_{ll} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{M} = \begin{bmatrix} I & M_{12} & \cdots M_{1s-1} & M_{1s} & M_{1s+1} & \cdots M_{1l} \\ M_{21} & I & \cdots M_{2s-1} & M_{2s} & M_{2s+1} & \cdots M_{2l} \\ & \vdots & & & \vdots & \\ M_{s-11} & M_{s-12} & \cdots I & M_{s-1s} & M_{s-1s+1} & \cdots M_{s+e} \\ 0 & 0 & \cdots 0 & I & M_{ss+1} & \cdots M_{se} \\ 0 & 0 & \cdots 0 & M_{s+1s} & I & \cdots M_{s+1l} \\ & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots 0 & M_{ls} & M_{ls+1} & I \end{bmatrix}. \tag{23}
$$

定理 2 的证明类似于定理 1.

类似推论 1，把前 $n-m$ 个子观测器极点取为

$$\lambda_i = a_{ii} + m_{j(i)i}a_{j(i)i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-m. \tag{24}$$

对后 m 个“子观测器”，取 $m_{ij} = 0\,(i \neq j$ 时)，并令

$$\lambda_k = a_{kk} - m_{kk}, \quad k = n-m+1, \cdots, n. \tag{25}$$

由此可得推论 2.

推论 2. 若定理 2 的假设条件成立，且 M_{ij} 取法如上，则二组观测器极点间满足下式

$$\det(A - [M_1^T M_2^T \cdots M_l^T]^T [\,0 \cdots 0\; I\,] - \mu_i I) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n;$$

这里 M_i 可由(23—25)式算出.

参　考　文　献

[1] L. Gao, G. L. Xiong, W. D. Chen, D. Q. Liang, A New Structure of State Observers and Its Application, Preprints of the 8th Triennial World Congress of IFAC, I (1981), pp. I-102—I-107.

[2] 高龙，熊光楞，梁德全，电气传动系统中两维状态观测器的工程设计，自动化学报，本期.

THE THEORETICAL BASIS FOR A NEW STRUCTURE OF STATE OBSERVERS

CHEN WENDE

(Institute of Systems Science, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper, we have obtained the general expressions of state observers with a new structure, which are proved to be algebraically equivalent to the Luenberger observers, and have given the coordinate transformation matrices and the formulas about pole-assignment.