第 8 卷 第 2 期 自 动 化 学 报 Vol. 8, No. 2
1982 年 4 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Apr., 1982

最经济控制系统结构综合

涂 序 彦
（中国科学院自动化研究所）

摘 要

本文提出"最经济控制"、"最经济观测"的概念，讨论最经济控制系统结构综合问题. 从多变量协调控制原则出发，提出了"分型能控性"、"分型能观性"的概念，证明了有关定理. 在此基础上，给出了线性定常系统最经济结构综合的直接方法及示例.

一、引 言

本文提出"最经济控制"的概念，讨论最经济控制系统结构综合的问题. 问题的提出基于以下考虑:

1. 通常控制理论的研究主要关心系统的技术性能，如能控性、能观性、稳定性、快速性、准确度等，而对系统的经济性，即为实现控制过程所付出的经济代价，缺乏应有的研究和重视. 但在实际工程设计中，特别是在我国目前的具体情况下，研究最经济控制问题具有重要的意义. "最经济控制"即在给定的控制技术性能要求下，在技术上可行的各种设计中，挑选设备投资最少，系统运行费用最低的方案.

2. 在多变量控制理论中，传统的设计原则是不互相影响的控制原则[1]，即"解耦". 实际上，在许多场合中，控制对象的耦合并不都是有害的，而是有益的或可以利用的，不应当"解耦". 特别是在强耦合的情形下，采用"解耦"原则可能使控制设备复杂化，付出更高的经济代价. 因此，文[2]曾提出多变量系统的"协调控制"原则. 从这个原则出发，可以设法利用对象中的耦合来简化控制设备，从而节约设备投资和运行费用.

3. 能控性、能观性是控制系统基本的技术要求，也是其他技术性能得以实现的前提条件[3]. 如何将有关能控性、能观性的理论研究结果具体应用到控制系统工程设计中去，仍是有待解决的问题[4].

另一方面，在控制系统的设计中，首先遇到的是结构方案设计问题. 目前，主要依靠设计人员的工程经验来解决，特别是多变量控制、大系统的结构方案设计，需要有实用的结构综合方法[5].

将能控性、能观性的研究和系统结构综合问题联系起来，探讨控制系统的最经济结构综合，是本文要讨论的问题.

本文曾在 1979 年 12 月中国自动化学会全国控制理论学术会议上（石家庄）宣读，修改稿于 1981 年 3 月 5 日收到.

二、线性系统最经济结构综合

本文以能控性、能观性为技术性能要求，以控制机构、观测装置的投资为经济指标，讨论线性系统的最经济结构综合问题.

设系统状态方程如下:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}. \end{cases} \tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{x}$ 为状态矢量；$\boldsymbol{u}$ 为控制矢量；$\boldsymbol{y}$ 为输出矢量；A 为对象矩阵；B 为控制矩阵；C 为观测矩阵.

最经济结构综合问题的提法如下:

给定对象阵 A，进行控制阵 B、观测阵 C 的结构综合，要求满足能控性、能观性条件，即 Gram 阵非奇异:

$$W_c(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B(t)B^T(t)\Phi^T(t_0, t)dt, \tag{2}$$

$$W_0(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0)c^T(t)c(t)\Phi(t, t_0)dt. \tag{3}$$

使控制机构、观测装置的投资最少，即相应的经济指标取极小:

$$\$_B = \sum_{i,j=1}^{n,r} \mu_{ij} \cdot \mathrm{Sym}\,(b_{ij}) \to \min, \tag{4}$$

$$\$_C = \sum_{i,j=1}^{m,n} \eta_{ij} \cdot \mathrm{Sym}\,(c_{ij}) \to \min. \tag{5}$$

式中，μ_{ij} 为控制单元 (b_{ij}) 的投资；η_{ij} 为观测单元 (c_{ij}) 的投资. 符号函数

$$\mathrm{Sym}\,(b_{ij}) = \begin{cases} 1 \\ 0, \end{cases} \quad 当\ b_{ij} \begin{cases} \neq 0 \\ = 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$\mathrm{Sym}\,(c_{ij}) = \begin{cases} 1 \\ 0, \end{cases} \quad 当\ c_{ij} \begin{cases} \neq 0 \\ = 0 \end{cases} \tag{7}$$

若所有控制单元投资都相同 $(\mu_{ij} = \mu)$，所有观测单元投资也相同 $(\eta_{ij} = \eta)$，则经济指标函数可简化为:

$$\$_B = \mu \cdot \sum_{i,j=1}^{n,r} \mathrm{Sym}\,(b_{ij}) = \mu \cdot N(b \neq 0), \tag{8}$$

$$\$_C = \eta \cdot \sum_{i,j=1}^{m,n} \mathrm{Sym}\,(c_{ij}) = \eta \cdot N(c \neq 0). \tag{9}$$

这样，最经济结构综合可化为最简单结构综合问题，也就是使控制阵 B、观测阵 C 中的非零元的个数为极小:

$$N(b \neq 0) = \sum_{i,j=1}^{n,r} \mathrm{Sym}\,(b_{ij}) \to \min \tag{10}$$

$$N(c \neq 0) = \sum_{i,j=1}^{m,n} \mathrm{Sym}\,(c_{ij}) \to \min \tag{11}$$

这意味着相应的最经济控制机构、观测装置中采用的控制单元、观测单元最少.

对于 n 维线性定常系统，在控制单元、观测单元投资相同的情形下，最经济结构综合问题提法为：给定对象阵 A，综合控制阵 B、观测阵 C. 满足能控、能观条件：

$$\operatorname{Rank}[B\ \ AB\cdots A^{n-1}B]=n, \tag{12}$$

$$\operatorname{Rank}\begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}=n. \tag{13}$$

使控制阵 B、观测阵 C 中非零元的个数为极小：

$$N(b\neq 0)\to \min, \tag{14}$$

$$N(c\neq 0)\to \min. \tag{15}$$

三、分型能控性、分型能观性

为研究利用控制对象中的耦合，简化控制设备，实现最经济控制和最经济观测，引入分型能控性、分型能观性的概念.

分型能控性的定义如下：

“0-型”能控. 若 n 维线性定常系统的“0-型”能控阵 Q_{co} 的秩为

$$\operatorname{Rank} Q_{co}=\operatorname{Rank}[B]=n, \tag{16}$$

则称系统是“0-型”能控. “0-型”能控的物理意义是：不利用对象 A 的耦合，仅依靠控制机构 B 本身，实现对系统全部状态的控制.

“m-型”能控. 若 n 维线性定常系统的“m-型”能控阵 Q_{cm} 的秩为

$$\operatorname{Rank} Q_{cm}=\operatorname{Rank}[B\ \ AB\cdots A^{m}B]=n,\quad m=1,2,3,\cdots,n-2. \tag{17}$$

则称系统是“m-型”能控.“m-型”能控的物理意义是：利用对象耦合 m 次，即 $(A,A^2,\cdots A^m)$，依靠控制机构 B 与控制对象特性 A 相互匹配，实现对系统全部状态的控制.

“$(n-1)$-型”能控. 若 n 维线性定常系统的“$(n-1)$-型”能控阵 $Q_{c.n-1}$ 的秩为

$$\operatorname{Rank} Q_{c.n-1}=\operatorname{Rank}[B\ \ AB\cdots A^{n-1}B]=n \tag{18}$$

则称系统是“$(n-1)$-型”能控的. 注意到“$(n-1)$-型”能控，就是通常意义下的系统状态完全能控. 能控阵 Q_c 即“$(n-1)$-型”能控阵 $Q_{c.n-1}$. 这里，利用对象特性 $(n-1)$ 次.

关于“分型能控性”，有以下定理：

定理 1. 若 n 维线性定常系统“$(m-1)$-型”能控，

$$\operatorname{Rank} Q_{c.m-1}=n,\quad m=1,2,\cdots,(n-1).$$

则必“m-型”能控. $\operatorname{Rank} Q_{c.m}=n$，即“$(m-1)$-型”能控是“$m$-型”能控的充分条件，而非必要条件，故逆定理不成立.

由定理 1 可知：

1) “0-型”能控是最强的能控分型. 若系统“0-型”能控，$\operatorname{Rank} Q_{co}=n$，则所有分型皆能控，$\operatorname{Rank} Q_{cm}=n$，$m=1,2,3,\cdots,(n-1)$.

2) "$(n-1)$-型" 能控是最弱的能控分型. 若系统 "$(n-1)$-型" 能控,

$$\text{Rank}\, Q_{c.n-1} = n,$$

则其余分型不一定能控, $\text{Rank}\, Q_{cm} \leqslant n$, $m = 0, 1, 2, \cdots, (n-2)$.

3) 分型能控是系统能控(通常意义下)的充分条件,而非必要条件. 若系统任一分型能控, $\text{Rank}\, Q_{cm} = n$, $0 \leqslant m \leqslant n-1$ (整数), 则系统能控, $\text{Rank}\, Q_c = n$. 因此, 引入"分型能控性"概念,有助于揭示控制机构与被控制对象特性相互匹配的情况,阐明在状态控制过程中,对控制机构的依赖程度和对象耦合的利用程度. 比如: 在 "0-型" 能控系统中,只依赖控制机构本身,不利用对象耦合. 在同样的对象特性下,所需控制单元最多.在 "$(n-1)$-型"能控系统中,依赖控制机构与对象特性间的多次匹配,利用对象耦合的次数最多,在同样的对象特性下,所需控制单元最少.

由此可知,解决控制机构最经济结构综合的途径是: 从 "0-型" 能控的最经济结构开始,提高对象耦合的利用程度,减少控制单元,获得控制机构的最经济结构方案.

同样,可以定义分型能观性,并证明相应的定理.

四、"0-型" 最经济结构综合

"0-型" 能控最经济结构综合问题如下:

给定对象阵 A, 综合控制阵 B_0, 要求满足 "0-型"能控条件

$$\text{Rank}\, Q_{co} = \text{Rank}[B_0] = n, \tag{19}$$

使控制阵 B 中"非零元"的个数最少:

$$N_0(b \neq 0) \to \min. \tag{20}$$

关于 "0-型" 能控,有以下定理:

定理 2. n 维线性定常系统的 "0-型" 能控最经济结构,最少需要有 n 个控制单元,控制阵 B_0 的最少"非零元"个数等于系统的状态矢量维数:

$$\min N_0(b \neq 0) = n. \tag{21}$$

由定理 2 可知: 不利用对象特性时,最少非零元个数为 n. 如果利用对象特性,那末,最少非零元个数将小于 n. 因此,可以推论, "m-型" 能控最经济结构的控制阵 B_m, 其最少"非零元"个数为

$$\min N_m(b \neq 0) \leqslant n. \tag{22}$$

上式一般情形取不等号,只有在对象无耦合情形下取等号.

定理 3. 若对象中各状态量之间无耦合, 即对象阵 A 为对角线型, 则 "0-型" 能控最经济结构 B_0 与 "m-型" 能控最经济结构 B_m 相同.

$$B_0 = B_m, \quad m = 1, 2, 3, \cdots, (n-1). \tag{23}$$

$$\min N_0(b \neq 0) = \min N_m(b \neq 0) = n. \tag{24}$$

由定理 3 可知,利用对象特性就是利用对象中各状态变量之间的耦合作用,即对象阵 A 中非对角线上的非零元. 若对象无耦合,则控制机构无法简化. 因此,只有当对象有耦合, A 阵非对角线型的情况下,进一步讨论 "m-型" 能控最经济结构综合, 才是有意义的. 同样,可以讨论 "0-型" 能观性最经济结构综合问题.

五、"m-型" 最经济结构综合

在大多数实际系统中，对象是有耦合的。因此，可以讨论"m-型"能控最经济结构综合问题。给定非对角线型对象阵 A，综合控制阵 B_m，要求满足"m-型"能控条件：

$$\text{Rank}\ Q_{cm} = \text{Rank}[B\ AB\cdots A^m B] = n, \tag{25}$$

使控制阵 B_m 中的"非零元"个数最少，$N_m(b \neq 0) \to \min$. (26)

关于"m-型"能控最经济结构有：

定理 4. n 维线性定常系统的"m-型"能控最经济结构，最少所需控制单元数，即控制阵 B_m 中最少"非零元"个数

$$\min N_m(b \neq 0) = n/(m+1),\ (\text{取整数}). \tag{27}$$

定理 4 给出了"m-型"能控最经济结构综合的理论限度。它表明利用对象耦合 m 次，将"0-型"简化为"m-型"控制机构，理论上最多可节约的控制单元数为：

$$\max \gamma_m = [\min N_0(b \neq 0) - \min N_m(b \neq 0)] = mn/(m+1), \tag{28}$$

这里，定义节约系数 K_e 及费用系数 K_p 为：

$$K_e = \max \gamma_m / \min N_0,\quad K_p = \min N_m / \min N_0. \tag{29}$$

因此，可以绘出节约系数 K_e、费用系数 K_p 与利用次数 m 的关系曲线如图 1 所示。

由图 1 可知：

1）用利当对象耦合的次数 m 增加，节约系数 K_e 增大。他们之间的关系是非线性的。当 m 较小时，如 $m = 1$—3，利用次数 m 增加，节约系数 K_e 增长较快；当 m 较大时，K_e 趋向于饱和。

2）当 $m = 1$ 时，$K_e = 1/2$. 仅利用对象耦合一次，但可节约一半控制单元，效果最明显。

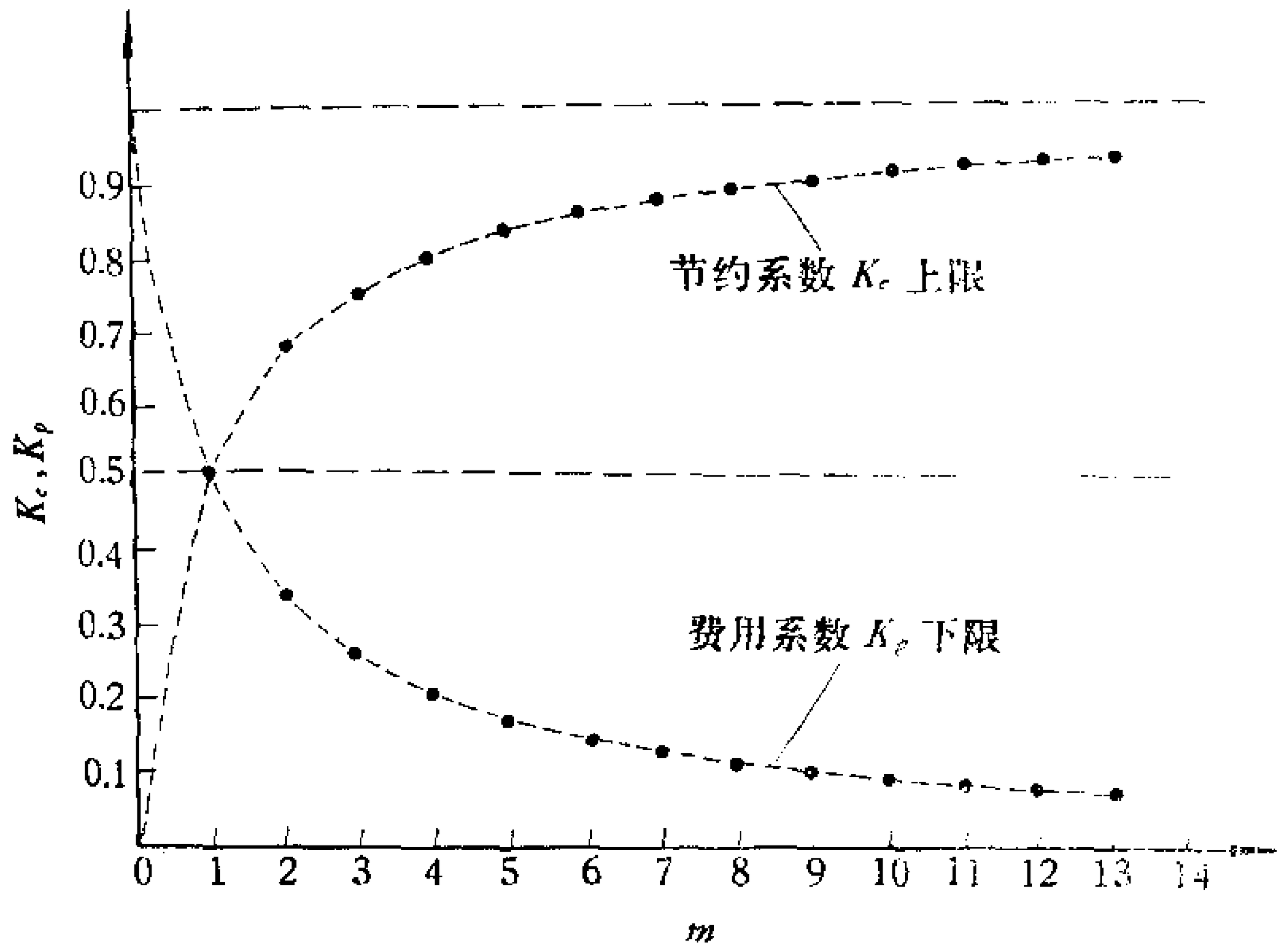

图 1　节约系数 K_e、费用系数 K_p 与利用次数 m 的关系

3）当 $m = n-1$ 时，$K_e = (n-1)/n$，而 $\min N_{n-1}(b \neq 0) = 1$. 在这种情况下，利用对象耦合的次数最多，可节约的控制单元数为 $(n-1)$，已达到物理可实现的结构极限条件：

$$\min N_{n-1}(b \neq 0) = 1. \tag{30}$$

即控制机构只有一个控制单元，控制阵 B_{n-1} 中只有一个非零元。但是，"m-型"能控最经济结构综合是否可达到上述定理 4 的理论限度，还要考虑具体对象耦合的结构特性。为此有：

定理 5. 若给定对象阵 A 中的有耦行数为 N_{AR}，则控制阵 B 中的非零元个数应满足如下条件

$$N_m(b \neq 0) \geqslant n - N_{AR}. \tag{31}$$

定理 5 给出了"m-型"能控最经济结构综合的实际限度。它表明：由于对象耦合特性的限制，实际上可节约的控制单元数应小于或等于对象阵 A 中的有耦行数。

$$\gamma_m = [N_0(b \neq 0) - N_m(b \neq 0)] \leqslant N_{AR}. \tag{32}$$

因此,只有与有耦行相对应的状态量,可以省去其对应的控制单元,而由其他控制单元利用对象中的耦合间接控制. 至于与无耦行对应的状态量,因无耦合可供利用,只能依靠其对应的控制单元直接控制,该控制单元不能节约.

同样,可讨论"m-型"能观最经济结构综合问题.

六、最经济结构综合方法

根据以上讨论,控制机构 B 的最经济结构综合步骤如下:

(1) 由已知对象阵 A,知维数 n,由定理 2 知 $\min N_0(b \neq 0) = n$,取"0-型"能控最经济结构控制阵 B_0 为对角线型:

$$B_0 = \begin{bmatrix} b_1 & & & 0 \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_n \end{bmatrix}. \tag{33}$$

若对象无耦合,则由定理 3 知,"0-型"最经济结构 B_0 即为所求之综合解.

(2) 由已知对象阵 A,知其有耦行数 N_{AR},由定理 5 预定"m-型"能控最经济结构,取控制阵 B_m 的最少非零元的个数为: $\min N_m(b \neq 0) = n - N_{AR}$. (34)
并省去 B_0 中对应于有耦行的控制单元,保留无耦行对应的控制单元,简化后得到"m-型"能控最经济结构控制阵 B_m.

(3) 由定理 4,按式(34)所得控制阵 B_m 的最少非零元个数 $\min N_m(b \neq 0)$,计算对象特性的利用次数

$$m = \frac{n - \min N_m(b \neq 0)}{\min N_m(b \neq 0)} \tag{35}$$

(4) 验算"m-型"分型能控性. $\mathrm{Rank}\, Q_{cm} = \mathrm{Rank}[B \ \ AB \cdots A^m B] = n$. (36)
这里,可利用附录中的递推公式简化计算.

例 1. 设对象阵为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{bmatrix}, \quad n = 5, \tag{37}$$

因 $n = 5$, $N_{AR} = 4$, 取 $\min N_m = 2$, 得 $m = 3$. 故可求得"3-型"能控最经济结构的控制阵 B_3 为:

$$B_3 = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_4 & 0 \\ 0 & b_5 \end{bmatrix}. \tag{38}$$

例 2. 设对象阵为:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ -3 & 3 & -5 & 4\\ 8 & -4 & 3 & -4\\ 5 & -10 & 11 & -11\end{bmatrix},\ n=4. \tag{39}$$

因 $n=4$, $N_{AR}=4$，故取 $\min N_m=1$，得 $m=3$. 可求得“3-型”能控最经济结构的控制阵 B_3 为：

$$B_3=\begin{bmatrix}b_1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\0\\b_3\\0\end{bmatrix}. \tag{40}$$

由此可见，就控制阵 B 中非零元的个数而言，所得到的最经济结构综合的解是唯一的. 但是，由于非零元在控制阵 B 中所处的位置不同，可以得到控制阵的几种变型. 这样，可为系统设计提供一定的灵活性.

七、结　束　语

本文提出了“最经济控制”、“最经济观测”的概念，讨论了线性定常系统的最经济结构综合问题. 从多变量“协调控制”原则出发，引入了“分型能控性”、“分型能观性”的概念，给出了有关定义及定理. 在此基础上，以能控性、能观性为技术约束条件，以控制机构、观测装置的投资为经济目标函数，在单元价格相同的情形下，给出了最经济结构综合的直接方法及示例. 最经济控制系统是一个新的研究课题，本文只是初步的工作，还有许多问题有待进一步研究. 如：

1）控制单元、观测单元价格不等的情形下的最经济结构综合.

2）闭环系统的最经济结构综合，最经济反馈、最经济镇定、最经济解耦问题.

3）线性时变系统、离散系统、非线性系统、分布参数系统的最经济控制、最经济观测问题.

4）以稳定性、准确度、快速性、可靠性为技术约束条件的最经济控制系统综合.

5）以系统运行费用为经济指标函数的最经济控制问题.

6）广义经济指标函数的研究，考虑经济收益时的最经济控制问题.

7）被控制对象待设计(非给定)时的最经济控制、最经济观测问题.

8）最经济控制系统分析与综合的频域方法、几何方法.

9）不确定系统、随机系统、模糊系统的最经济控制、最经济观测问题.

10）大系统的最经济结构综合及最经济控制问题.

附　录

1. 定理 1 证明

根据分型能控性定义，“m-型”及“$(m-1)$-型”能控阵为：$Q_{cm}=[B\ AB\cdots A^{m-1}B\ A^mB]$ 及 $Q_{c,m-1}=[B\ AB\cdots A^{m-1}B]$. 可见，$Q_{cm}$ 为 $Q_{c,m-1}$ 的列增广矩阵，故有 $\mathrm{Rank}\,Q_{cm}\geqslant \mathrm{Rank}\,Q_{c,m-1}$.

若“$(m-1)$-型”能控，$\mathrm{Rank}\,Q_{c,m-1}=n$，则必有“$m$-型”能控，$\mathrm{Rank}\,Q_{cm}=n$. 反之，若“$m$-型”能控，$\mathrm{Rank}\,Q_{cm}=n$，则 $\mathrm{Rank}\,Q_{c,m-1}\leqslant n$，即“$(m-1)$-型”不一定能控. 因此，“$(m-1)$-型”能控

是“m-型”能控的充分条件，不是必要条件.

2. 定理 2 证明

根据“0-型”能控的定义，其充分必要条件是“0-型”能控阵满秩 $\mathrm{Rank}\, Q_{co} = \mathrm{Rank}\, B_0 = n$. 而满秩矩阵 B_0 中，应有 n 行线性独立，每行至少有一个非零元；应有 n 列线性独立，每列至少有一个非零元.

在相应行、列公共一个非零元的情况下，控制阵 B_0 中至少需有 n 个不同行、不同列的非零元，因此，“0-型”能控最经济结构控制阵 B_0 中，最少非零元个数为 n. $\min N_0(b \neq 0) = n$. 取 B_0 为对角线型，$B_0 = [b_i]_{n\times n}$.

3. 定理 3 证明

当对象无耦合，A 为对角线型矩阵：$A = [a_{ij}]_{n\times n}$，而“m-型”最经济控制阵 B_m 可由“0-型”最经济控制阵 B_0 简化而得到，这里不妨取 B_m 亦为对角线型，$B_m = [b_{ii}]_{n\times n}$. 由此，“$m$-型”能控阵 Q_{cm} 为：

$$Q_{cm} = [B_m, AB_m, \cdots A^m B_m] = \begin{bmatrix} b_{11} & & 0 & a_{11}b_{11} & & 0 & & \overset{m}{a}_{11}b_{11} & & 0 \\ & b_{22} & & & a_{22}b_{22} & & \cdots & & \overset{m}{a}_{22}b_{22} & \\ 0 & & \ddots & 0 & & \ddots & & 0 & & \ddots \\ & & b_{nn}, & & & a_{nn}b_{nn}, & & & & \overset{m}{a}_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}.$$

可见，$\mathrm{Rank}\, Q_{cm} = \mathrm{Rank}\, B_m$. 因此，若 $\mathrm{Rank}\, Q_{cm} = n$，则必有 $\mathrm{Rank}\, B_m = n$，即：

$$B_m = B_0, \quad \min N_m(b \neq 0) = n = \min N_0(b \neq 0).$$

4. 定理 4 证明

设 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$，而 $B_m = [b_{ij}]_{n\times n}$，则“$m$-型”能控阵 Q_{cm} 可展开为：

$$Q_{cm} = [B_m, AB_m, \cdots, A^m B_m] = \begin{bmatrix} b_{11} & & 0 & a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{nn} & & \overset{m}{a}_{11}b_{11} & \overset{m}{a}_{12}b_{22} & \cdots & \overset{m}{a}_{1n}b_{nn} \\ & b_{22} & & a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{nn} & & \overset{m}{a}_{21}b_{11} & \overset{m}{a}_{22}b_{22} & \cdots & \overset{m}{a}_{2n}b_{nn} \\ 0 & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & b_{nn}, & a_{n1}b_{11} & a_{n2}b_{22} & \cdots & a_{nn}b_{nn}, & & \overset{m}{a}_{n1}b_{11} & \overset{m}{a}_{n2}b_{22} & \cdots & \overset{m}{a}_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}.$$

式中 $\overset{m}{a}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \overset{m-1}{a}_{ik}\, a_{kj}$，见附录 6.

设 B_m 由 B_0 节约 r_m 个非零元得到，$r_m = [N_0(b \neq 0) - N_m(b \neq 0)]$，故控制阵 B_m 中可取 r_m 个对角线元为零，则能控阵 Q_{cm} 将由 n 行 $n(m+1)$ 列退化为 n 行 $(n - r_m)(m+1)$ 列. 其秩

$$\mathrm{Rank}\, Q_{cm} \leqslant \min[(n - r_m)(m+1), n].$$

若欲“m-型”能控，$\mathrm{Rank}\, Q_{cm} = n$，则必须满足 $(n - r_m)(m+1) \geqslant n$. 因此，利用对象耦合 m 次，理论上最多可节约的控制单元数 $\max r_m = mn/(m+1)$ 故“m-型”最经济控制阵 B_m 的最少非零元个数 $\min N_m(b \neq 0) = n/(m+1)$.

5. 定理 5 证明

设对象阵 A 中第 i 行为无耦行，即无非零耦合元. $a_{ij} = 0$，当 $i \neq j$. 则由附录 6 中递推公式可知矩阵 A^m 中第 i 行亦为无耦行. 故“m-型”能控阵 Q_{cm} 为：

$$Q_{cm} = \begin{bmatrix} b_{11} & & & a_{11}b_{11} & \cdots\cdots & a_{1n}b_{nn} & & \overset{m}{a}_{11}b_{11} & \cdots\cdots & \overset{m}{a}_{n1}b_{nn} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & b_{ii} & & 0 & a_{ii}b_{ii} & 0 & \cdots & 0 & \overset{m}{a}_{ii}b_{ii} & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & b_{nn}, & a_{n1}b_{11} & \cdots\cdots & a_{nn}b_{nn}, & & \overset{m}{a}_{n1}b_{11} & \cdots\cdots & \overset{m}{a}_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}.$$

可见，Q_{cm} 中第 i 行仅与 b_{ii} 及 a_{ii} 有关. 若令 $b_{ii} = 0$，则 Q_{cm} 中第 i 行为零，$\mathrm{Rank}\, Q_{cm} < n$. 因此，为了将 B_0 简化为 B_m，令其中某些元为零时，要受到 A 中无耦行的限制，不能令与无耦行 $(a_{ij} = 0,\ i \neq j)$ 对应的 (b_{ii}) 为零.

设 A 中有耦行(至少有一个非零耦合元)数为 N_{AR}. 则无耦行数为 $(n-N_{AR})$. 实际所需控制单元数 $N_m(b \neq 0)$ 不能小于 $(n-N_{AR})$. 实际可节约的控制单元数 r_m 不能大于 N_{AR}.

6. 求 A^m 的递推公式

设矩阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$, 则矩阵 A 的 m 次幂 $A^m=[\overset{m}{a}_{ij}]_{n\times n}$. 其中, $\overset{m}{a}_{ij}$ 不是 a_{ij}^m (a_{ij} 的 m 次幂), 而是按下面的递推公式计算的"m 元乘积之和":

$$\overset{m}{a}_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\overset{m-1}{a}_{ik}\cdot a_{kj},\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

$$\overset{m-1}{a}_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\overset{m-2}{a}_{ik}\cdot a_{kj},\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

$$\vdots$$

$$\overset{2}{a}_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot a_{kj},\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

参 考 文 献

[1] 钱学森、宋健，工程控制论(原版)，科学出版社，1958 年，修订版，1980 年.
[2] 涂序彦，多变量协调控制问题，第一届国际自动化学术会议(IFAC)论文选集，上海科学技术出版社，1963 年.
[3] 关肇直、陈翰馥，线性系统的能控性和能观测性，科学出版社，1975 年.
[4] 涂序彦，可控性、可观性的实用价值与"最经济结构"综合问题，全国控制理论及应用学术交流会(厦门)论文集，1979 年.
[5] 涂序彦，关于大系统理论的几个问题，自动化学报，1979 年 5 卷 3 期.

THE PROBLEM ON THE STRUCTURAL SYNTHESIS OF THE MOST ECONOMICAL CONTROL SYSTEMS

Tu Xuyen
(*Institute of Automation, Academia Sinica*)

Abstract

In this paper, the ideas on "the Most Economical Control" and "the Most Economical Observation" are proposed, and the problem on the structural synthesis of the Most Economical Control System is discussed in detail. Starting from the multivariable "Harmonic Control" principle, the concepts on the "Subtypes" of controllability and observability are introduced, and the related definitions and theorems are obtained. Based on them, the direct method of the Most Economical Structural Synthesis of linear time-invarying system is given and illustrated by two examples. Then, the open problems in the theory of the Most Economical Control Systems are mentioned.