

# 具有可调参数的模型降阶新方法

李祖枢  
(重庆大学)

## 摘 要

本文提出了一种具有可调参数的模型简化新方法。此法从系统动态特性上揭示了简化模型与原系统之间“类等效”的对应关系。由对系统主要频率响应数据的拟合(或最优化方法)确定参数。降阶模型不仅保持高阶系统的稳态特性(低频特性)和稳定性,还能按设计者需要有选择地保持原系统的其它主要性能(例如带宽、相对稳定性等)、保持其它任意频段的特性。最后,文章给出实例。

## 一、引 言

随着控制理论和系统工程的发展,模型简化理论及应用受到广泛重视。众多化简方法中高阶传递函数的有理逼近法尤其引人注目。其中较典型的有: Padé 逼近法<sup>[5]</sup>、时间矩拟合法<sup>[6]</sup>、连分式逼近法<sup>[7]</sup>、Routh 逼近法<sup>[8]</sup>、Чебышев 多项式逼近法<sup>[9]</sup>和其他改进的 Padé 逼近法<sup>[10, 11, 12]</sup>。这些方法各有特点<sup>[1, 4]</sup>,但就同一逼近阶数而言,对简化模型参数的选择都缺乏灵活而简便的手段,更不能对系统设计所要求的主要性能指标和主要频率响应数据进行有选择的逼近。这不利于用简化模型代替高阶对象进行工程设计,因此现有方法在工程应用中受到很大限制。

本文从揭示简化模型与高阶系统之间在动态特性上的“类等效”关系出发,提出具有可调参数的模型简化。所得的同阶简化模型是一族,所提供的方法也是一族。由对系统主要频率响应数据的拟合(或最优化方法)确定参数,从中容易选得既精确拟合原系统,又能对给定的频段或主要频率响应数据作到有选择的逼近,甚至基本重现原系统相对稳定性的简化模型。新方法把简化理论与控制系统的分析和设计有机地联系起来,有利于实际工程应用。

## 二、模型简化的新构思和可调参数的引入

模型简化肯定都要抛弃原系统的一些信息,保留一些信息。但是简化过程中哪些因素可以抛弃,哪些因素必须保留,哪些又可以部分保留,进而能否作到按设计者要求有选择地抛弃和保留,概括起来,就是简化模型与高阶系统之间应有哪些对应关系。

一个单变量线性定常系统的传递函数可以写成:

$$G(s) = \frac{K(1 + a_1s + a_2s^2 + \cdots + a_ms^m)}{1 + b_1s + b_2s^2 + \cdots + b_ns^n}$$

$$= \frac{K \prod_{i=1}^m (1 + \tau_i s)}{\prod_{j=1}^n (1 + T_j s)}, \quad m \leq n \quad (1)$$

其中系数  $K, a_i (i = 1, 2, \dots, m), b_j (j = 1, 2, \dots, n)$  为实数,  $\tau_i (i = 1, 2, \dots, m), T_j (j = 1, 2, \dots, n)$  一般为复数。从反映系统动态特性的主要因素及它们在系统时域响应和频域响应上的表现来分析传递函数中各系数的物理含义,基本上可认为存在四个主要因素:

1) 增益  $K$ : 表示系统对零频(直流)输入信号的放大能力,决定了稳定系统在时域中单位阶跃响应  $y(t)$  的稳态值,即:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = K. \quad (2)$$

2) 等效时滞 (Equivalent Dead Time)<sup>[15]</sup>  $D$ : 表征系统对输入信号响应的滞后特性,由积分:

$$D \triangleq \int_0^{\infty} \left[ u(t) - \frac{y(t)}{K} \right] dt \quad (3)$$

定义。其中  $u(t)$  为单位阶跃输入。 $D$  实质上是系统所有滞后(积分)因素和所有超前(微分)因素之差,且与(1)式之系数存在关系:

$$D = b_1 - a_1 = \sum_{j=1}^n T_j - \sum_{i=1}^m \tau_i. \quad (4)$$

3) 等效支配极点 (Equivalent Dominant Poles): 确定了系统的基本性状(单调、振荡、稳定或不稳定),主要由(1)式中靠近虚轴的极点和具有正实部的极点决定。

4) 频带: 反映系统对不同频率输入信号的通过能力,决定响应曲线各部分的细节。常由一些主要频率响应数据(例如:带宽、截止频率、转角频率、穿越频率及其对应的相角等)来表现。一般与(1)式中所有系数值有关。

简化模型和原高阶系统应在动态特性上具有“类等效”的对应关系。一个成功的简化模型应该保持高阶系统的增益、等效时滞和等效支配极点(不是唯一的),同时也局部反映高阶系统的部分频带。理想的逼近方法,应该在前三个因素等效的情况下,按设计者意愿对高阶系统响应的频段、区段、主要频响数据或主要性能指标作到有选择的逼近。

实现这种选择的途径就是设法在简化模型中设置可调参数。可以从各种不同的途径引入可调参数,这要视与哪一种简化方法结合而定。一般可用恒等于1的因子

$$\frac{1 + \beta s}{1 + \beta s} \quad (5)$$

或

$$\frac{1 + \alpha s + \nu s^2}{1 + \alpha s + \nu s^2} \quad (6)$$

乘以(1)式的右端,则(1)式可改写为

$$G(s) = \frac{K[1 + (\beta + a_1)s + (\beta a_1 + a_2)s^2 + \cdots + \beta a_m s^{m+1}]}{1 + (\beta + b_1)s + (\beta b_1 + b_2)s^2 + \cdots + \beta b_n s^{n+1}}, \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K}{1 + \beta s} \frac{1 + (\beta + a_1)s + (\beta a_1 + a_2)s^2 + \cdots + \beta a_m s^{m+1}}{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_n s^n} \\ &= \frac{K}{1 + \beta s} G'(s, \beta), \end{aligned} \quad (7b)$$

$$G(s) = \frac{K[1 + (\alpha + a_1)s + (\alpha a_1 + a_2 + \nu)s^2 + \cdots + \nu a_m s^{m+2}]}{1 + (\alpha + b_1)s + (\alpha b_1 + b_2 + \nu)s^2 + \cdots + \nu b_n s^{n+2}}, \quad (7c)$$

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K}{1 + \alpha s + \nu s^2} \frac{1 + (\alpha + a_1)s + (\alpha a_1 + a_2 + \nu)s^2 + \cdots + \nu a_m s^{m+2}}{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_n s^n} \\ &= \frac{K}{1 + \alpha s + \nu s^2} G''(s, \alpha, \nu), \end{aligned} \quad (7d)$$

然后运用 Padé 逼近法<sup>[5]</sup>或各种改进的 Padé 逼近法<sup>[10-14]</sup>可分别求得(7)式中  $G(s)$ ,  $G'(s, \beta)$  和  $G''(s, \alpha, \nu)$  的  $(j, k)$  阶、 $(j, k-1)$  阶和  $(j, k-2)$  阶简化模型。从而与(7)式对应的  $(j, k)$  阶简化模型族分别为:

$$R_{j,k}(s, \beta) = \frac{K[1 + d_1(\beta)s + d_2(\beta)s^2 + \cdots + d_j(\beta)s^j]}{1 + e_1(\beta)s + e_2(\beta)s^2 + \cdots + e_k(\beta)s^k}, \quad (8a)$$

$$R_{j,k}(s, \beta) = \frac{K}{1 + \beta s} \cdot \frac{1 + d_1(\beta)s + d_2(\beta)s^2 + \cdots + d_j(\beta)s^j}{1 + e_1 s + e_2 s^2 + \cdots + e_{k-1} s^{k-1}}, \quad (8b)$$

$$R_{j,k}(s, \alpha, \nu) = \frac{K[1 + d_1(\alpha, \nu)s + d_2(\alpha, \nu)s^2 + \cdots + d_j(\alpha, \nu)s^j]}{1 + e_1(\alpha, \nu)s + e_2(\alpha, \nu)s^2 + \cdots + e_k(\alpha, \nu)s^k}, \quad (8c)$$

$$R_{j,k}(s, \alpha, \nu) = \frac{K}{1 + \alpha s + \nu s^2} \frac{1 + d_1(\alpha, \nu)s + d_2(\alpha, \nu)s^2 + \cdots + d_j(\alpha, \nu)s^j}{1 + e_1 s + e_2 s^2 + \cdots + e_{k-2} s^{k-2}}, \quad (8d)$$

式中分子和分母多项式系数可按以下步骤求得 (仅以 Padé 逼近和基于 Routh 稳定性判据的 Padé 逼近为例):

1) 用长除法计算  $G(s)$  在  $s = 0$  附近的幂级数展开<sup>[6]</sup>.

$$G(s) = K(1 - A_{31}s + A_{41}s^2 - A_{51}s^3 + A_{61}s^4 + \cdots), \quad (9)$$

其中系数由阵列

$$\begin{bmatrix} 1 & A_{12} = b_1 & A_{13} = b_2 & A_{14} = b_3 & \cdots \\ 1 & A_{22} = a_1 & A_{23} = a_2 & A_{24} = a_3 & \cdots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & \cdots \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

计算, 阵列中元素满足递推公式

$$A_{k,l} = A_{k-1,1}A_{1,l+1} - A_{k-1,l+1}. \quad k \geq 3 \quad (10)$$

2) 计算  $G(s)$  分母多项式的 Routh 阵列<sup>[8,10]</sup>.

$$\begin{bmatrix} B_{00} = 1 & B_{02} = b_2 & B_{04} = b_4 & \cdots \\ B_{10} = b_1 & B_{12} = b_3 & B_{14} = b_5 & \cdots \\ B_{20} & B_{22} & B_{24} & \cdots \\ B_{30} & B_{32} & B_{34} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

阵列中元素满足递推公式

$$B_{j,k} = B_{j-2,k+2} - B_{j-2,0}B_{j-1,k+2}/B_{j-1,0}. \quad (11)$$

3) 确定简化模型传递函数分子和分母多项式系数.

① 如  $R_{j,k}(s)$  是  $G(s)$  的  $(j, k)$  阶 Padé 逼近, 则:

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= e_1 + c_1 \\ d_2 &= e_2 + e_1c_1 + c_2 \\ &\dots\dots \\ d_j &= c_{j-k}e_k + c_{j-k+1}e_{k-1} + \dots + c_{j-1}e_1 + c_j \\ &\quad - c_{j-k+1}e_k - c_{j-k+2}e_{k-1} - \dots - c_je_1 = c_{j+1} \\ &\dots\dots \\ &\quad - c_je_k - c_{j+1}e_{k-1} - \dots - c_{j+k-1}e_1 = c_{j+k} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中  $c_i = (-1)^i A_{i+2}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

② 如  $R_{j,k}(s)$  是  $G(s)$  的  $(j, k)$  阶基于 Routh 稳定判据的 Padé 逼近, 则

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= b_1 \\ e_q &= B_{q-2,2} - B_{q-2,0}B_{k-1,2}/B_{k-1,0}, \quad q = 2, 3, \dots, k \\ d_1 &= b_1 - A_{31} \\ d_p &= \sum_{l=2}^p (-1)^l A_{l,1} (B_{p-l,2} - B_{p-l,0}B_{k-1,2}/B_{k-1,0}) \\ &\quad + (-1)^{p+1} A_{p+1,1} b_1 + (-1)^{p+2} A_{p+2,1}, \quad p = 2, 3, \dots, j. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

因为 (5), (6) 式都是恒等于 1 的因子, 容易从 Padé 逼近式和基于 Routh 稳定性判据的 Padé 逼近式随  $j \rightarrow m, k \rightarrow n$  对  $G(s)$  的收敛性, 说明 (8) 式中各式满足  $R_{j,k}(s, \beta)$

$\xrightarrow{j \rightarrow m+1, k \rightarrow n+1} G(s)$  和  $R_{j,k}(s, \alpha, \nu) \xrightarrow{j \rightarrow m+2, k \rightarrow n+2} G(s)$ .

为便于应用, 以下列出几种常用的低阶目标模型公式:

1) 当 (1) 式中  $m \neq 0$ , 对应 (8b) 和 (8d) 由 (13) 式可推得:

$$R_{1,2}(s, \beta) = \frac{K[1 + (\beta + a_1)s]}{(1 + \beta s)(1 + b_1 s)}, \quad (14a)$$

$$R_{1,2}(s, \alpha, \nu) = \frac{K[1 + (\alpha + a_1 - b_1)s]}{1 + \alpha s + \nu s^2}, \quad (14b)$$

$$R_{2,3}(s, \beta) = \frac{K[1 + (\beta + a_1)s + (\beta a_1 + a_2 - b_3/b_1)s^2]}{(1 + \beta s)[1 + b_1 s + (b_2 - b_3/b_1)s^2]}, \quad (14c)$$

$$R_{2,3}(s, \alpha, \nu) = \frac{K[1 + (\alpha + a_1)s + (\nu + \alpha a_1 + a_2 - b_2)s^2]}{(1 + \alpha s + \nu s^2)(1 + b_1 s)}. \quad (14d)$$

2) 当  $m = 0$  时, 对应 (8b) 由 (12) 式可推得:

$$R_{1,2}(s, \beta) = \frac{K\{1 + [(\beta - b_1) + (b_1^2 - b_1\beta + b_2)/(\beta - b_1)]s\}}{(1 + \beta s)\{1 + [(b_1^2 - b_1\beta + b_2)/(\beta - b_1)]s\}}, \quad (15a)$$

$$R_{2,3}(s, \beta) = \frac{K[1 + d_1(\beta)s + d_2(\beta)s^2]}{(1 + \beta s)[1 + e_1(\beta)s + e_2(\beta)s^2]} \quad (15b)$$

其中

$$d_1(\beta) = c_1(\beta) + e_1(\beta),$$

$$d_2(\beta) = c_2(\beta) + e_2(\beta) + c_1(\beta)e_1(\beta),$$

$$e_1(\beta) = \frac{c_1(\beta)c_4(\beta) - c_2(\beta)c_3(\beta)}{c_2^2(\beta) - c_1(\beta)c_3(\beta)},$$

$$e_2(\beta) = \frac{c_3^2(\beta) - c_2(\beta)c_4(\beta)}{c_2^2(\beta) - c_1(\beta)c_3(\beta)},$$

$$c_1(\beta) = -(b_1 - \beta),$$

$$c_2(\beta) = -b_1c_1(\beta) - b_2,$$

$$c_3(\beta) = -b_1c_2(\beta) - b_2c_1(\beta) - b_3,$$

$$c_4(\beta) = -b_1c_3(\beta) - b_2c_2(\beta) - b_3c_1(\beta) - b_4.$$

3) 对应于 (8a) 和 (8c) 由 (13) 式可推得:

$$R_{1,2}(s, \beta) = \frac{K[1 + (\beta + a_1)s]}{1 + (\beta + b_1)s + \left(\beta b_1 + b_2 - \frac{\beta b_2 + b_3}{\beta + b_1}\right)s^2}, \quad (16a)$$

$$R_{1,2}(s, \alpha, \nu) = \frac{K[1 + (\alpha + a_1)s]}{1 + (\alpha + b_1)s + \left(\beta b_1 + b_2 + \nu - \frac{\alpha b_2 + \nu b_1 + b_3}{\alpha + b_1}\right)s^2}, \quad (16b)$$

$$R_{2,3}(s, \beta) = \frac{K\{1 + (\beta + a_1)s + [\beta a_1 + a_2 - B_1(\beta)]s\}}{1 + (\beta + b_1)s + [\beta b_1 + b_2 - B_1(\beta)]s^2 + [\beta b_2 + b_3 - (\beta + b_1)B_1(\beta)]s^3} \quad (16c)$$

式中

$$B_1(\beta) = \frac{(\beta b_3 + b_4) - (\beta b_4 + b_5)/(\beta + b_1)}{(\beta b_1 + b_2) - (\beta b_2 + b_3)/(\beta + b_1)},$$

$$R_{2,3}(s, \alpha, \nu) = K\{1 + (\alpha + a_1)s + [\alpha a_1 + \nu + a_2 - B_2(\alpha, \nu)]s^2\} / \{1 + (\alpha + b_1)s + [\alpha b_1 + \nu + b_2 - B_2(\alpha, \nu)]s^2 + [\alpha b_2 + \nu b_1 + b_3 - (\alpha + b_1)B_2(\alpha, \nu)]s^3\} \quad (16d)$$

式中

$$B_2(\alpha, \nu) = \frac{(\alpha b_3 + \nu b_2 + b_4) - (\alpha b_4 + \nu b_3 + b_5)/(\alpha + b_1)}{(\alpha b_1 + \nu + b_2) - (\alpha b_2 + \nu b_1 + b_3)/(\alpha + b_1)}.$$

同样可导出运用稳定性方程的可调参数法、具有可调参数的连分式逼近法和具有多可调参数的 Padé 逼近法等简化模型族公式及其低阶目标模型公式, 还可以导出保留主极的可调参数法公式. 限于篇幅, 这里不一一列举.

### 三、逼近标准的建立及可调参数的确定

从系统的频域特性以及它和时域特性之间的对应关系来建立设计者可能采纳的逼近

标准。根据这些标准确定可调参数,从简化模型族中选出设计者需要的低阶模型。

### 1. 对系统主要性能指标或主要频率响应数据的拟合

当设计者要求简化模型保持高阶系统的某些主要频率响应数据(例如截止频率、穿越频率等)和某些主要性能指标<sup>1)</sup>(例如:上升时间、过冲、带宽、相对稳定性等)时,可调参数由以下方程或方程组确定。设欲拟合频率为  $\omega_x$ , 则有

$$|R_{j,k}(j\omega_x, \beta)| = |G(j\omega_x)|, \quad (17a)$$

或

$$\operatorname{tg}^{-1} \frac{\operatorname{Im} [R_{j,k}(j\omega_x, \beta)]}{\operatorname{Re} [R_{j,k}(j\omega_x, \beta)]} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\operatorname{Im} [G(j\omega_x)]}{\operatorname{Re} [G(j\omega_x)]}, \quad (17b)$$

或

$$\left. \begin{aligned} |R_{j,k}(j\omega_x, \alpha, \nu)| &= |G(j\omega_x)| \\ \operatorname{tg}^{-1} \frac{\operatorname{Im} [R_{j,k}(j\omega_x, \alpha, \nu)]}{\operatorname{Re} [R_{j,k}(j\omega_x, \alpha, \nu)]} &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{\operatorname{Im} [G(j\omega_x)]}{\operatorname{Re} [G(j\omega_x)]} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

求解方程或方程组,确定简化模型的具体步骤可归纳如下:

1) 由给定的拟合频率  $\omega_x$  计算  $G(s)$  的幅值和相角,或由给定的拟合响应数据计算该数据下的频率或相角<sup>[17]</sup>。

2) 由欲拟合数据的多少和所需简化模型的阶数按照前述方法导出简化模型族公式。常用的二阶和三阶模型族可直接选用(14)–(16)式。

3) 将所得模型族公式代入(17)或(18)式,并求解方程或方程组。当一个参数时方程可由对分区间套法求解。当参数为二个或二个以上时,方程组可由改进的牛顿迭代法求解。

4) 将求得的可调参数代入所得简化模型族公式,并计算出它们的响应特性供研究。以上过程已被编成了供设计者使用的计算机程序<sup>2)</sup>。

### 2. 在指定频带 $[\omega_a, \omega_b]$ 上,按幅频响应误差平方积分最小的准则,对高阶系统拟合

一个实际的工程系统常常工作于某频带,要求简化模型尽量保持系统在该频段上的特性。因此从简化模型族中挑选最优逼近式的目标函数可写成:

$$J(\beta) = \int_{\omega_a}^{\omega_b} [ |G(j\omega)| - |R_{j,k}(j\omega, \beta)| ]^2 d\omega, \quad (19)$$

进一步运用数学上一元函数求极值的方法和对含参变量的积分求导原则,求得使  $J(\beta)$  最小的  $\beta$  值,即可得最优逼近式。

### 3. 对高阶系统在单位阶跃响应上,按一致逼近误差准则的拟合

文献[18]曾证明逼近传递函数与原传递函数阶跃响应之间的误差,可由下列不等式予以估计:

$$|\varepsilon(t)| = |y(t) - y_k(t)| \leq \frac{2}{\pi} M \int_0^{N\pi} \left| \frac{\sin \omega}{\omega} \right| d\omega. \quad (20)$$

式中  $y(t)$  和  $y_k(t)$  分别为  $G(s)$  和  $R_{j,k}(s)$  的单位阶跃响应,  $M$  为  $\rho(\omega) = \operatorname{Re} [G(j\omega)] - \operatorname{Re} [R_{j,k}(j\omega)]$  的最大值,  $N$  为  $\rho(\omega)$  中所有极大值个数。根据(20)式可建立寻优的目标

1) 时域性能指标可通过一些经验公式,由频率响应数据予以估计<sup>[16]</sup>。

2) 见作者 1980 年研究生毕业论文。

函数:

$$\rho(\omega, \beta) = \operatorname{Re}[G(j\omega)] - \operatorname{Re}[R_{j,k}(j\omega, \beta)]. \quad (21)$$

本优化过程数学上归于求二元目标函数  $\rho(\omega, \beta)$ , 当  $\beta$  固定对  $\omega$  取最大, 当  $\omega$  固定对  $\beta$  取最小的临界点(鞍点)的问题. 可由满足下列方程和判别条件的所有鞍点中选出.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho(\omega, \beta)}{\partial \omega} = 0, \quad \frac{\partial^2 \rho(\omega, \beta)}{\partial \omega^2} < 0 \\ \frac{\partial \rho(\omega, \beta)}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \rho(\omega, \beta)}{\partial \beta^2} > 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

**例 1.** 本例是 Hutton 论文<sup>[8]</sup>中的实例, 后又为 Shamash<sup>[10]</sup> 和 Appiah<sup>[13,14]</sup> 等人引用, 他们异途同归, 化简结果一样.

$$G(s) = \frac{28s^3 + 496s^2 + 1800s + 2400}{2s^4 + 36s^3 + 204s^2 + 360s + 240} = \frac{10(1 + 0.75s + 0.20667s^2 + 0.01167s^3)}{1 + 1.5s + 0.85s^2 + 0.15s^3 + 0.00833s^4}.$$

由 (14a) 和 (14b) 式可直接写出其二阶简化模型族:

$$R_{1,2}(s, \beta) = \frac{10[1 + (\beta + 0.75)s]}{(1 + \beta s)(1 + 1.5s)},$$

$$R_{1,2}(s, \alpha, \nu) = \frac{10[1 + (\alpha - 0.75)s]}{1 + \alpha s + \nu s^2}.$$

由 (17) 或 (18) 式可求得在带宽频率  $\omega_b$ 、穿越频率  $\omega_c$ 、增益下降 10 分贝频率  $\omega_0$  等处拟合  $G(s)$  的二阶简化模型分别为

$$R_{1,2}^{\omega_b}(s) = \frac{10(1 + 1.8714s)}{1 + 2.6214s + 1.5908s^2}, \quad \begin{aligned} \alpha &= 2.6214 \\ \nu &= 1.5908 \end{aligned}$$

$$R_{1,2}^{\omega_c}(s) = \frac{10(1 + 1.3530s)}{(1 + 0.6030s)(1 + 1.5s)}, \quad \beta = 0.6030$$

$$R_{1,2}^{\omega_0}(s) = \frac{10(1 + 1.7742s)}{(1 + 1.0242s)(1 + 1.5s)}, \quad \beta = 1.0242$$

而由 Hutton、Shamash 和 Appiah 等人的方法求得的二阶简化模型为:

$$R_{1,2}^H(s) = \frac{30s + 40}{3s^2 + 6s + 4}.$$

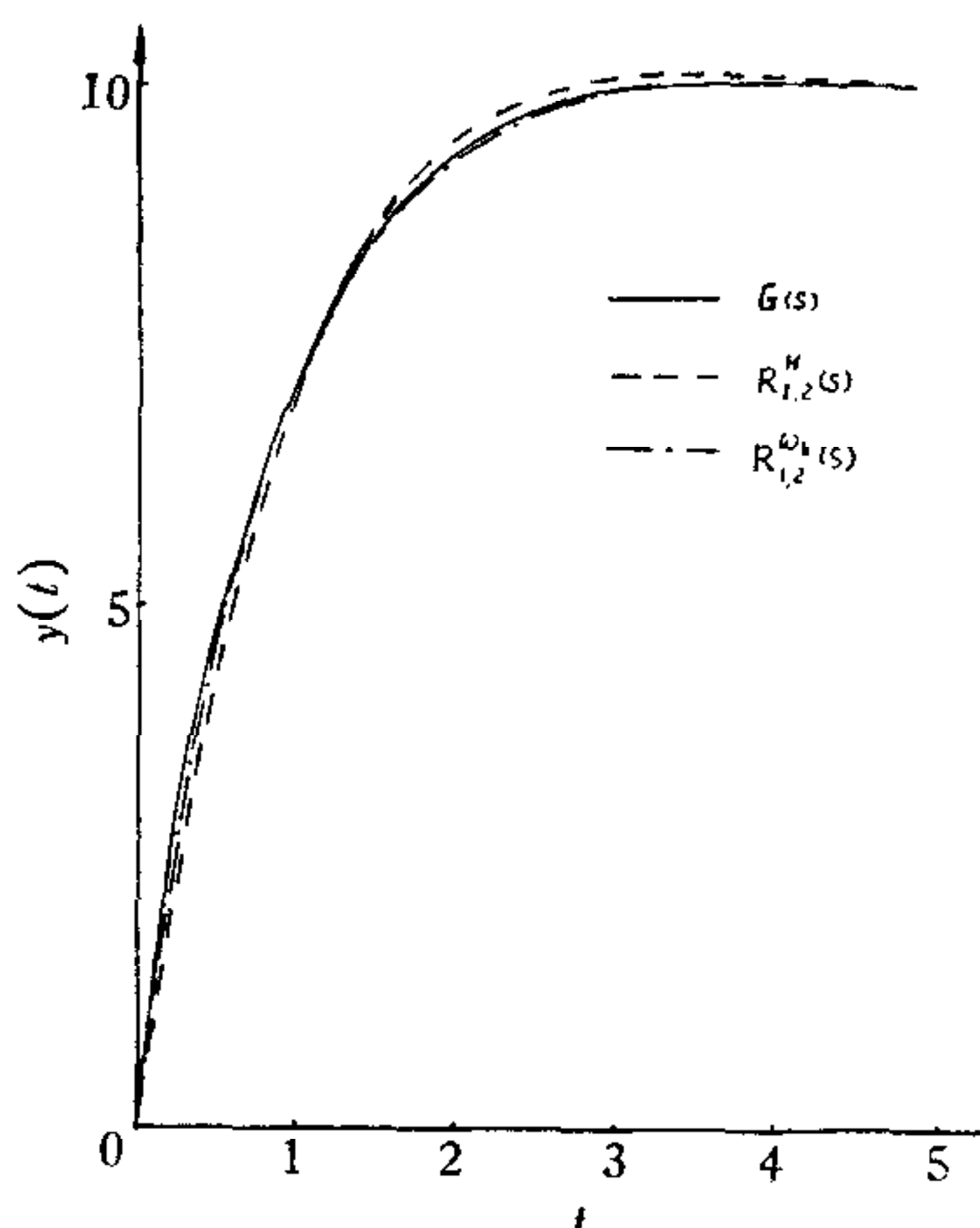


图 1 可调参数法与 Routh 逼近法二阶简化模型在单位阶跃响应上对高阶模型的逼近对照

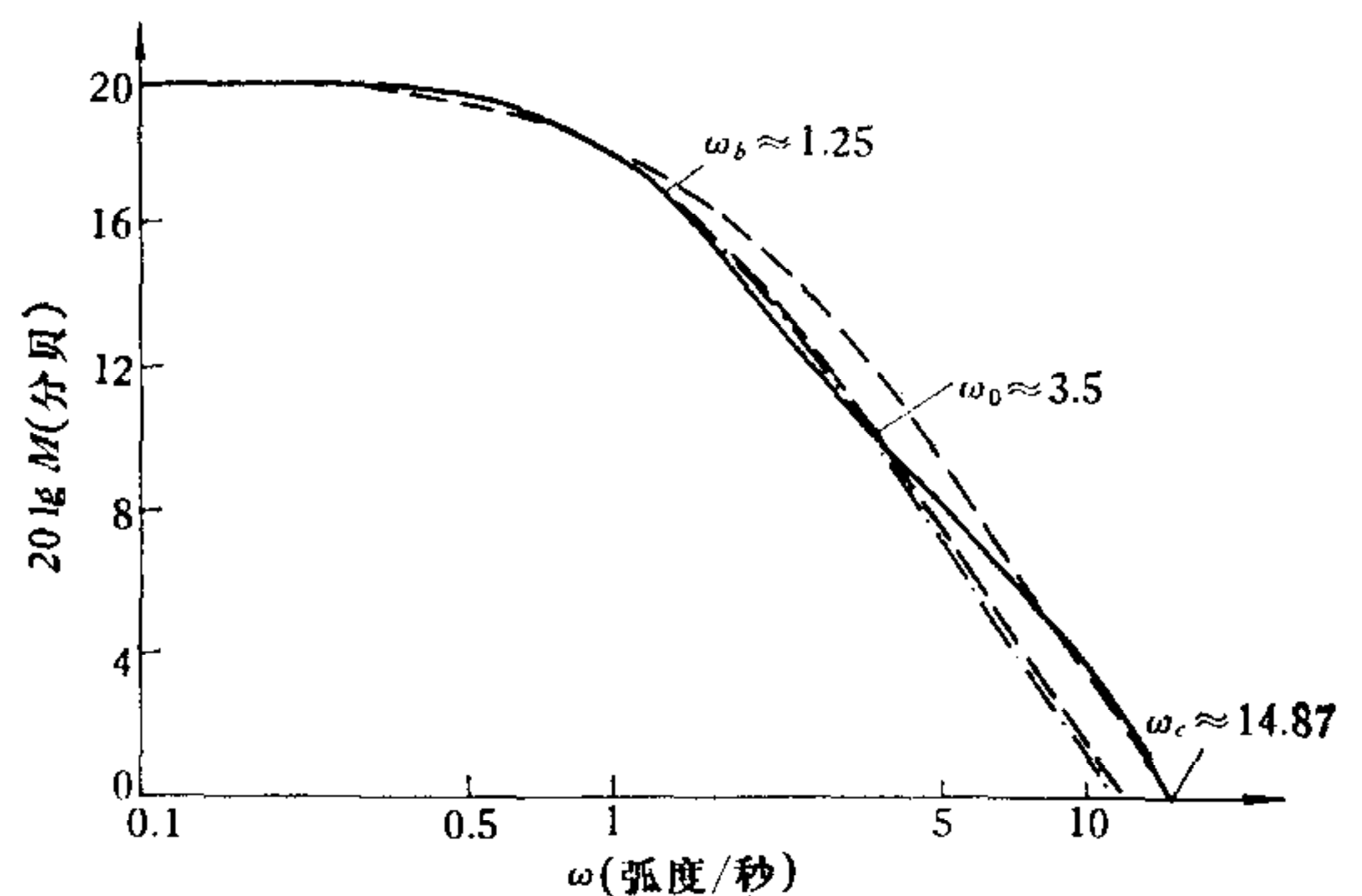


图 2 可调参数法在频率特性上的选择逼近功能及与 Routh 逼近法对高阶模型的逼近对照

图 1 和图 2 分别把它们对  $G(s)$  的单位阶跃响应和对数幅频响应的逼近情况作了比较。

#### 四、应用与系统设计的关系

由本法得到的简化模型，在保持了原系统的增益、等效时滞和等效支配极点的前提下，依照设计者意愿对系统的某些主要性能指标或主要频率响应数据进行有选择地拟合，从而为设计者提供了按照系统分析和设计要求选择简化模型的灵活性；也使得设计者能在感兴趣的性能指标下，用尽可能低阶的模型代替原系统进行分析、研究和工程设计。例如，对于高阶低通滤波器，简化模型可以同它具有一样的带宽或剪切率；对于高阶带通滤波器，则可以在它的通过频带上在误差平方积分最小的准则下实现最优逼近；对于高阶调节系统，简化模型能做到同它基本一样的上升时间、超调量、调节时间和振荡周期等；对高阶开环对象，则能基本重现其相对稳定性，即可具有同其一样的相角裕度或增益裕度。

**例 2.** 应用本文方法确定一维分布参数系统较为理想的低阶模型。众所周知，如用网络模拟，一维分布参数系统对应于无穷阶  $RLC$  梯形网络，但如将分布参数离散成集中参数，则对应于有限阶  $RLC$  梯形网络，且离散段愈小，级数愈多，愈精确。为简明起见，以一个 10 级均匀  $RC$  梯形网络(图 3)为例。运用文献 [4] 提出的“有限级梯形网络解耦分析法”，容易求得任意两节点之间的传递函数。从输入端到第一个节点和终端的传递函数分别为：

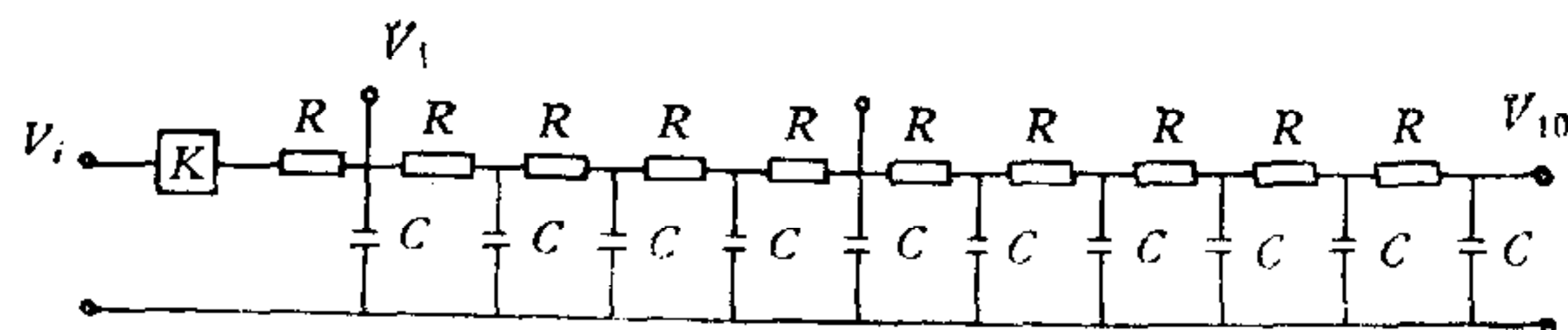


图 3 10 阶  $RC$  梯形网络电路。

$$G_1(s) = [10(1 + 45Ts + 330T^2s^2 + 924T^3s^3 + 1287T^4s^4 + 1001T^5s^5 + 455T^6s^6 + 120T^7s^7 + 17T^8s^8 + T^9s^9)] / (1 + 55Ts + 495T^2s^2 + 1716T^3s^3 + 3003T^4s^4 + 3003T^5s^5 + 1820T^6s^6 + 680T^7s^7 + 153T^8s^8 + 19T^9s^9 + T^{10}s^{10}),$$

$$G_{10}(s) = 10 / (1 + 55Ts + 495T^2s^2 + 1716T^3s^3 + 3003T^4s^4 + 3003T^5s^5 + 1820T^6s^6 + 680T^7s^7 + 153T^8s^8 + 19T^9s^9 + T^{10}s^{10}),$$

式中  $T = RC \approx 1.192(\text{sec})$ 。与  $G_1(s)$  在带宽频率  $\omega_b$  处拟合的二阶简化模型和 Routh 逼近法，Padé 逼近法的二阶模型分别为：

$$R_{1,2}^{(1)\omega_b}(s) = \frac{10(1 + 23.49774Ts)}{1 + 33.49774Ts + 40.48613T^2s^2},$$

$$R_{1,2}^{(1)H}(s) = \frac{10(1 + 45Ts)}{1 + 55Ts + 463.8T^2s^2},$$

$$R_{1,2}^{(1)P}(s) = \frac{10(1 + 36.2Ts)}{1 + 46.2Ts + 77T^2s^2}, \quad T \approx 1.192(\text{sec}).$$

显然图 4、图 5 表明  $R_{1,2}^{(1)\omega_b}(s)$  具有  $G_1(s)$  一样的带宽和相近的上升时间。

与  $G_{10}(s)$  在穿越频率  $\omega_c$  处拟合的二阶简化模型和 Padé 逼近的二阶模型分别为：

$$R_{1,2}^{(10)\omega_c}(s) = \frac{10(1 - 3.99912Ts)}{1 + 51.00088Ts + 379.44277T^2s^2},$$

$$R_{1,2}^{(10)P}(s) = \frac{10(1 - 3.4667Ts)}{1 + 51.53333Ts + 304.33333T^2s^2}, \quad T \approx 1.192(\text{sec}).$$

图 6、图 7 表明  $R_{1,2}^{(10)\omega_c}(s)$  具有与  $G_{10}(s)$  同样的相角裕度和基本一样的相对稳定性。值得注意的是图 5



和图 7 中原系统的开环和闭环阶跃响应理论计算曲线和实验吻合。

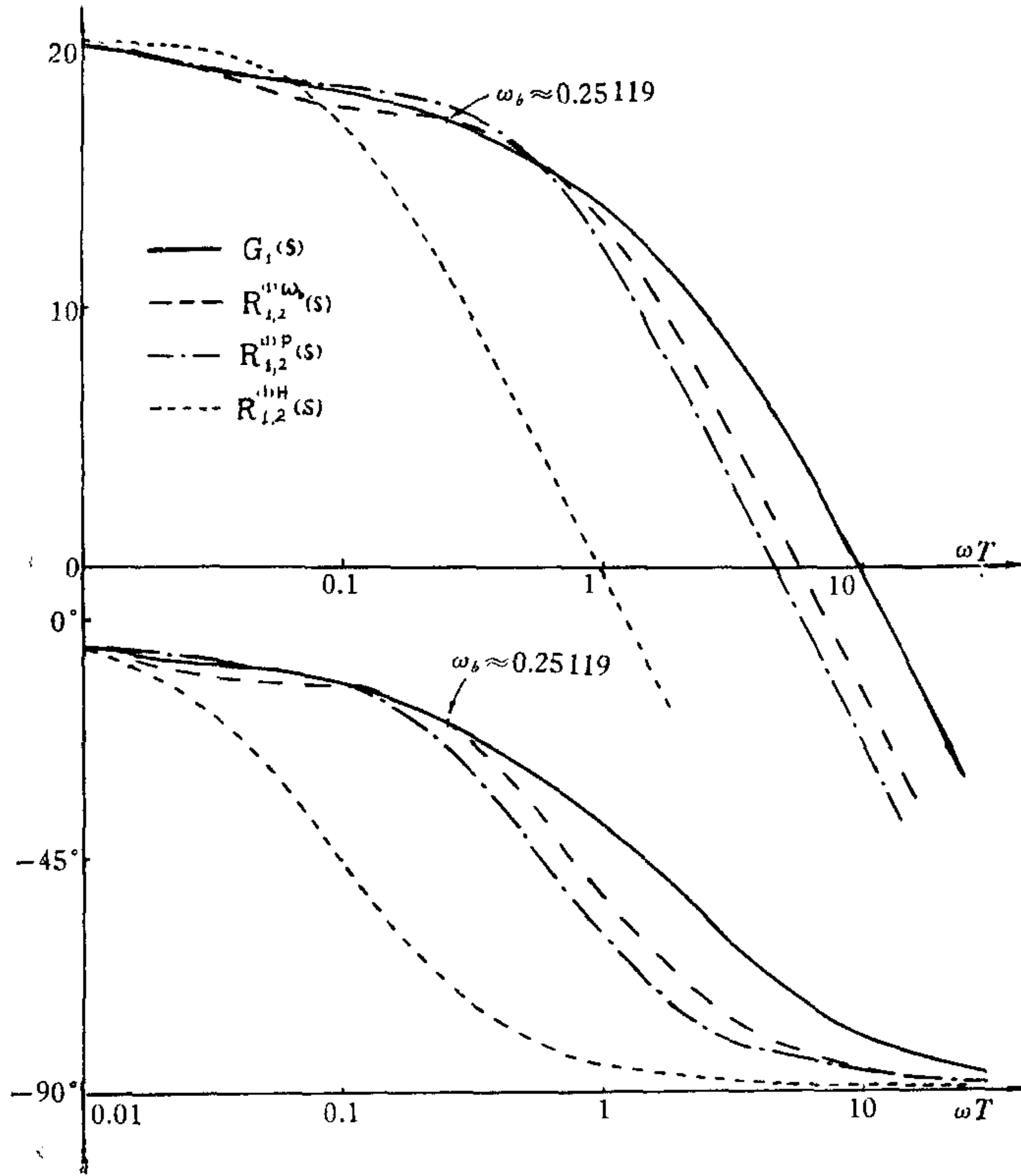


图 4 可调参数法、Routh 逼近和 Padé 逼近的二阶简化模型对 10 阶 RC 梯形网络输入至第一节点的频响曲线逼近对照。

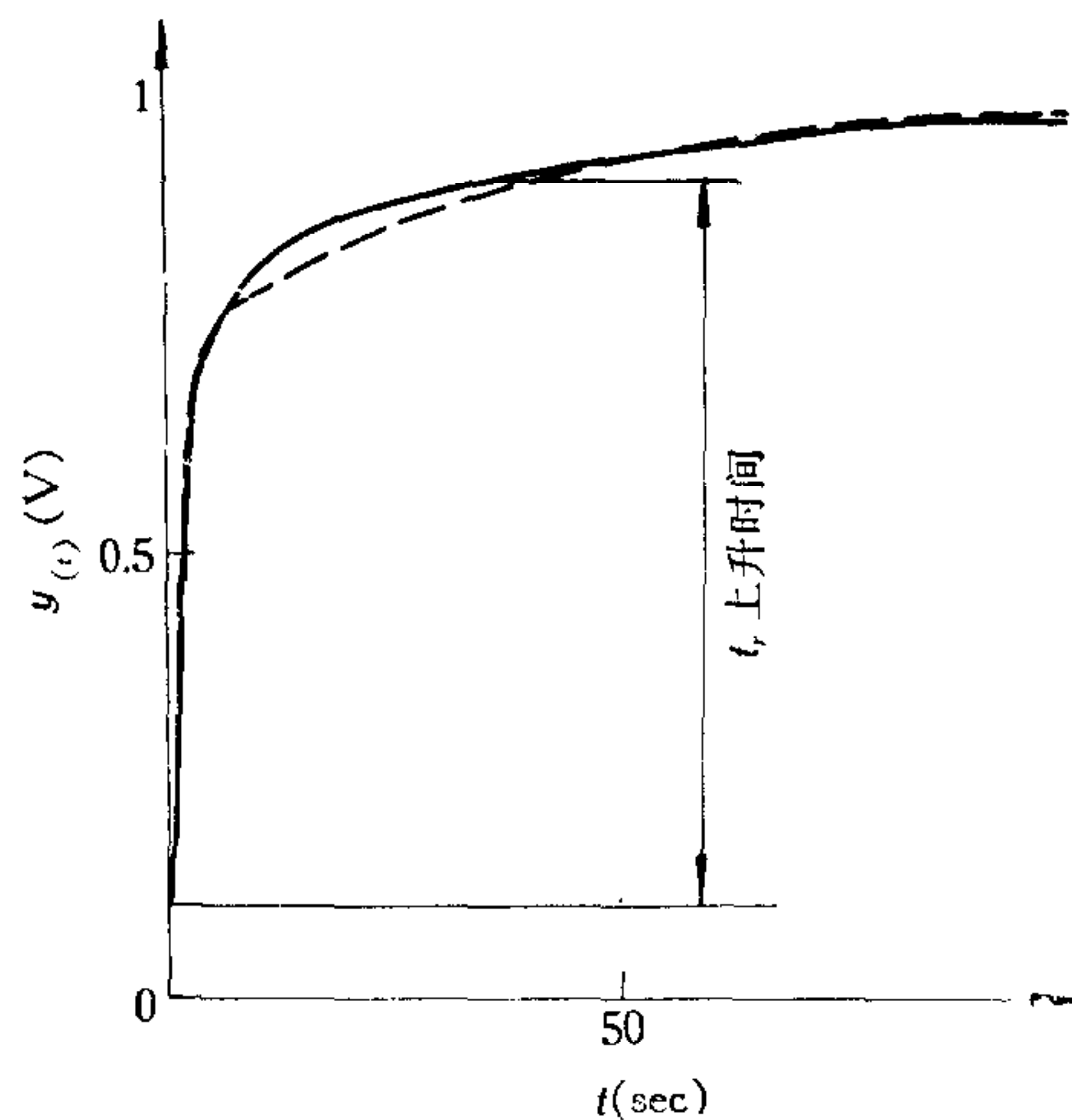


图 5 10 阶 RC 梯形网络输入至第一节点实验阶跃响应曲线和其二阶简化模型计算曲线比较。开环  $K = 10$ ，输入 100mv 阶跃。记录 10sec/cm, 100mv/cm, 1980, 7, 20, 11:20。

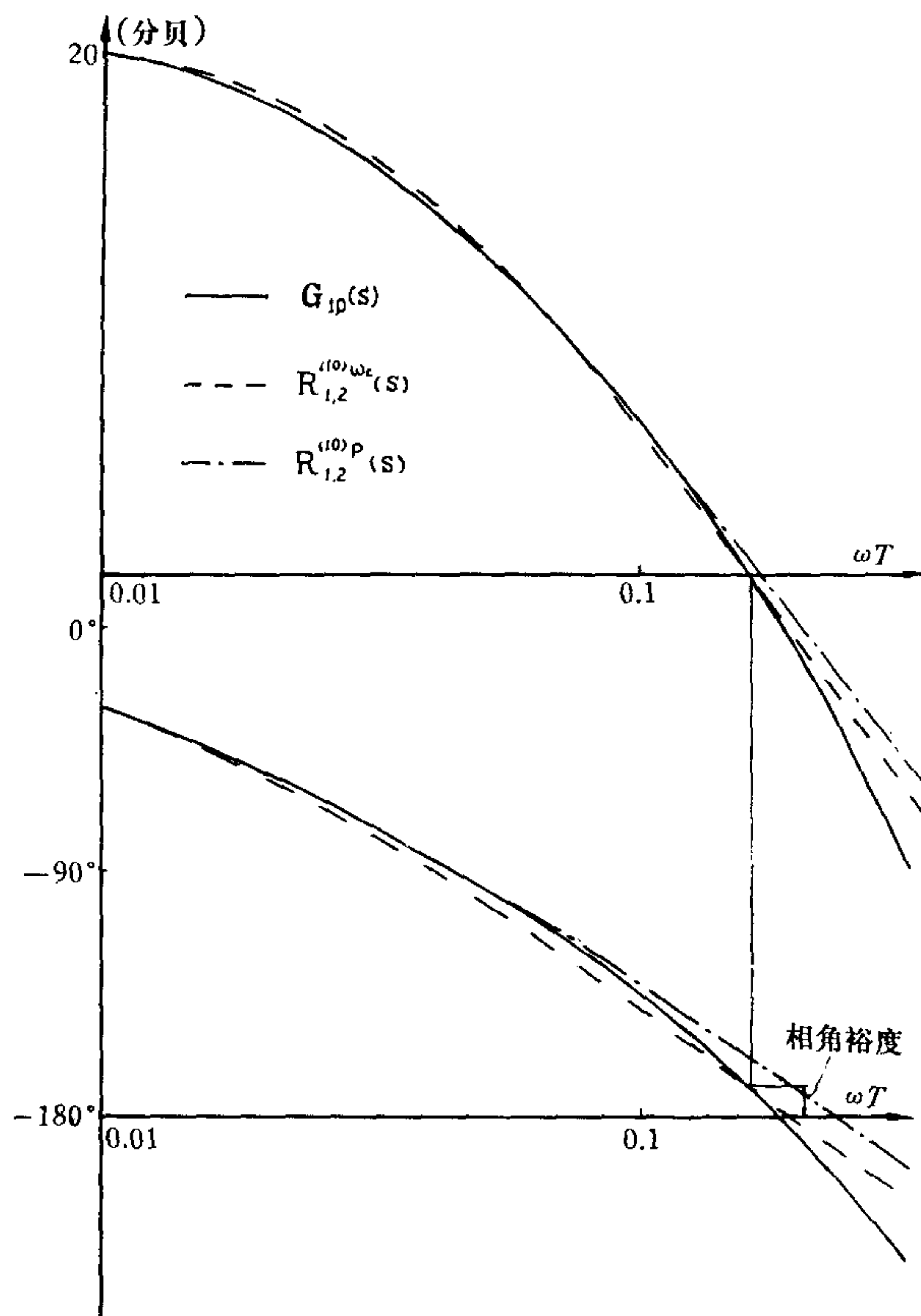


图6 可调参数法和 Padé 逼近的二阶简化模型对 10 阶 RC 梯形网络输入至终端的频响曲线逼近对照

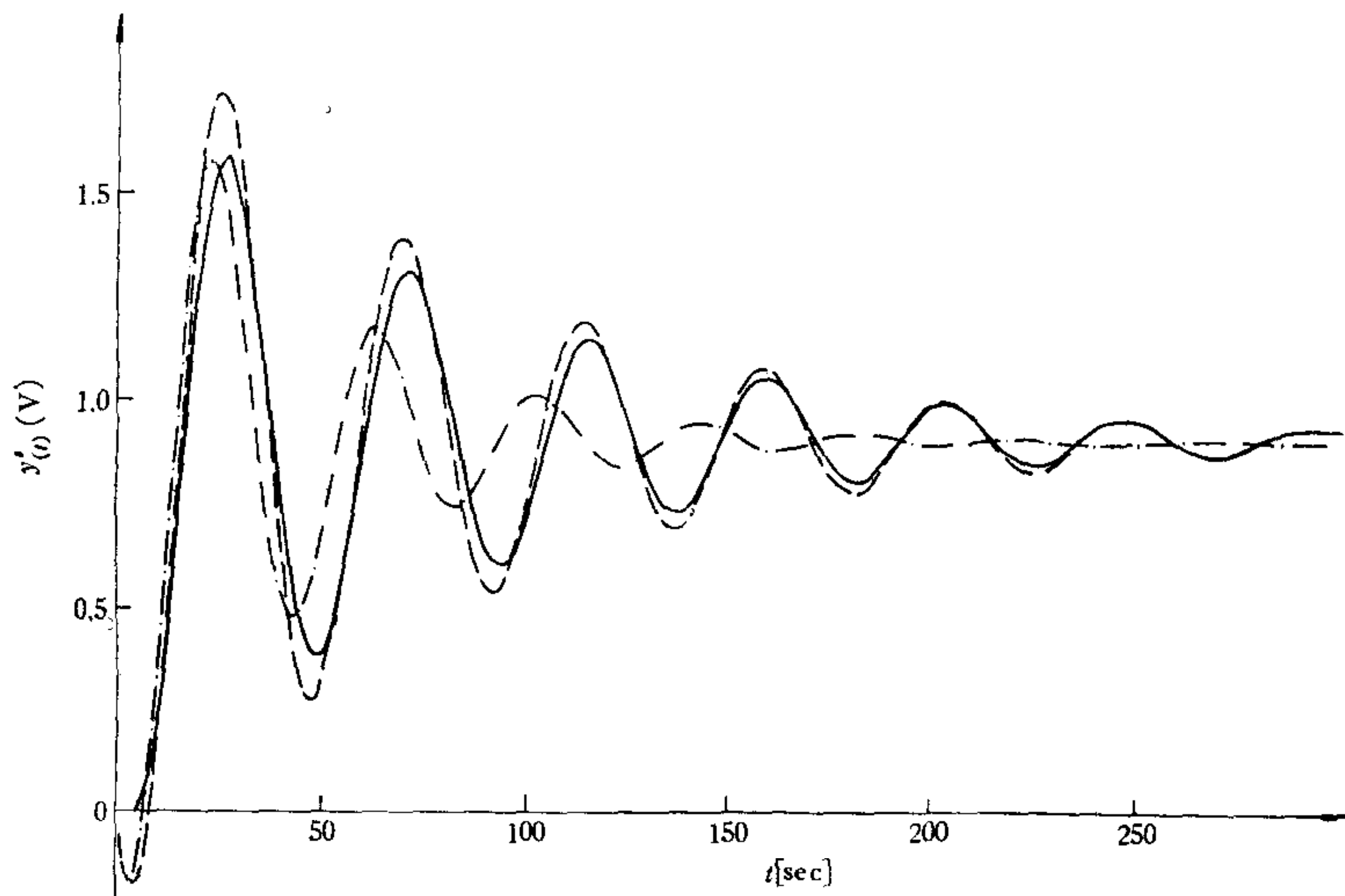


图7 10 阶 RC 梯形网络输入至终端实验闭环阶跃响应曲线和其可调参数法、Padé 逼近法二阶模型闭环计算曲线比较。

$$\text{---} G_{10}^c(s) = \frac{G_{10}(s)}{1 + G_{10}(s)} \quad \text{---} R_{1,2}^{(10)\omega_c}(s) = \frac{R_{1,2}^{(10)\omega_c}(s)}{1 + R_{1,2}^{(10)\omega_c}(s)} \quad \text{---} R_{1,2}^{(10)P}(s) = \frac{R_{1,2}^{(10)P}(s)}{1 + R_{1,2}^{(10)P}(s)}$$

闭环  $K_f = 1$ ,  $K = 10$ , 输入 1v 阶跃  
记录 10sec/cm, 100mv/cm. 1980, 7.20, 15:20.

## 五、结 语

具有可调参数的模型简化是得到高阶系统较理想的低阶近似模型的有力手段。由它得到的同阶简化模型是一族。它几乎可以同所有频域化简方法结合在一起,因而提供的方法也是一族。如果视现有方法为简化过程的粗调,可调参数的确定则可视为粗调后的细调。从频率特性入手,不难从某一族模型中选出既精确拟合原系统的稳态特性(低频特性),保持原系统稳定性,又对给定频段和主要频响数据有选择地逼近,甚至基本重现原系统相对稳定性的简化模型。简化模型与高阶系统之间具有“类等效”的对应关系,无论高阶系统极零点分布怎样,也无论对象开环还是闭环,方法均有效。可调参数法还可以实现时域和频域上的最优逼近,并在理论上进行误差上限估计。它同与它结合的各种逼近方法一样易于拓广到多变量、离散和非稳定系统。

更有意义的是可调参数把模型简化理论和控制系统的工程设计有机地联系在一起。其方法在控制系统分析和设计上的作用已得到实验验证。可调参数的思想如何在状态方程的简化中发挥作用,例如:集结矩阵的确定等,是进一步研究的方向。本文方法的缺点是计算上较一般的 Padé 类方法略繁。

本研究工作一直在周其鉴教授指导下进行。论文初稿曾由周先生多次审阅并提出了许多宝贵建议,在此致以衷心的感谢。

## 参 考 文 献

- [1] 万百五、吴受章,大系统的模型简化,自动化学报,6(1980), No. 1, 57—66.
- [2] 前田肇,大規模な線形システムの低次元モデルとシステム構造,システムと制御,22(1978), No. 11, 655—664.
- [3] 张启人,大系统的模型降阶理论,信息与控制,9(1980), No. 4, 2—25.
- [4] 周其鉴、李祖枢,数学模型简化及其在工程系统中的应用,重庆大学学报,(1980), No. 4, 1—35.
- [5] G. A. Baker, Jr., Essentials of Padé Approximants, Acad. Press, New York, San Francisco London, (1975).
- [6] M. Lal, Mitra, R., Simplification of Large System Dynamics Using A Moment Evaluation Algorithm, IEEE Trans. Aut. Contr., AC-19 (1974), 602—603.
- [7] Chen, C. F., Shieh, L. S., A Novel Approach to Linear Model Simplification, Int. J. Control, 8(1968), 561—570.
- [8] Hutton, M. F., Friedland, B., Routh Approximations for Reducing Order of Linear, Time-Invariant Systems, IEEE Trans. Aut. Contr., AC-20 (1975), 329—337.
- [9] Bistritz, Y., Langholz, G., Model Reduction by Chebyshev Polynomial Techniques, IEEE Trans. Aut. Contr., AC-24 (1979), 741—747.
- [10] Shamash, Y., Model Reduction Using the Routh Stability Criterion and Padé Approximation Technique, Int. J. Control, 21(1975), 475—484.
- [11] Shamash, Y., Linear System Reduction Using Padé Approximation on Allow Retention of Dominant Modes, Int. J. Control, 21(1975), 257—272.
- [12] Chen, T. C. and Chang, C. Y., Stable Reduced-order Padé Approximants Using Stability-equation Method, Electron. Lett., 16(1980), 345—346.
- [13] Appiah, R. K., Cauchy Interpolation in Linear System Reduction, IEEE Trans. Aut. Contr., AC-22 (1977), 974—976.
- [14] Appiah, R. K., Linear Model Reduction Using Hurwitz Polynomial Approximation, Int. J. Control, 28(1978), 477—488.
- [15] Matsubura, M., On the Equivalent Dead-time, IEEE Trans. Aut. Contr., AC-10 (1965), 464—466.
- [16] Mitchell, E. E., Olsen, C. F., Digital Computation of Frequency Response, Simulation (1975),

No. 11, 137—145.

[17] 李友善主编,自动控制原理(上册),国防出版社,(1980),281—306.

[18] Солодовников, В. В. О частотных условиях монотонности и об оценке погрешности в определении переходного процесса по частотным характеристикам, автоматикам и телемеханика, том XI (1950), №1, 11—38.

## A NOVEL METHOD OF MODEL REDUCTION WITH ADJUSTABLE PARAMETERS

LI ZUSHU

(*Chongqing University*)

### ABSTRACT

This paper presents a novel method with adjustable parameters for the reduction of high order linear time invariant dynamic system. The method emphasizes the “quasi-equivalent” relation between the reduced order model and the prototype from the dynamic characteristics view of the systems. The desirable values of the adjustable parameters are selected closely to approximate the dominant frequency response data of the prototype system. The approximants not only can retain steady state characteristics and stability, but also can selectively retain other dominant performance specifications of the prototype system (such as bandwidth and relative stability) and other characteristics over a desired frequency range. Finally, it is shown by examples that this method has established a relation between the theory of model reduction and the design of control systems.