第8卷 第1期 自动化学报 Vol. 8, No. 1
1982年1月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1982

研究简报

随机大系统的稳定性

胡宣达
(南京大学)

一、概述

关于大系统稳定性理论的研究，最近几年在确定性系统方面工作较多，在随机系统方面还刚开始，迄今所见到的主要是 R. D. Rasmussen 和 A. N. Michel 的工作，他们试图将比较原理方法推广到随机大系统中，然而所得到的比较系统仍是一个随机系统. 本文的结果是用类似于确定性大系统稳定性分析中的向量 Liapunov 函数的加权模和比较原理相结合的方法，建立以一般非时齐 Itô 随机微分方程所描述的随机大系统与常微辅助大系统之间的比较定理，并在此基础上建立随机大系统解过程样本轨道的随机指数渐近稳定性、随机完全稳定性、随机一致完全稳定性的比较准则. 这样就在随机大系统的稳定性与确定性常微大系统的稳定性间建立了直接的联系，从而就有可能将确定性大系统中的结果直接应用于随机大系统。

给出 Itô 随机微分方程所描述的大系统：

$$d\boldsymbol{x}_t^i = \boldsymbol{b}^i(\boldsymbol{x}_t^i, t)dt + \boldsymbol{R}^i(\boldsymbol{x}_t, t)dt + \sum_{j=1}^{l} \boldsymbol{\sigma}^{ij}(\boldsymbol{x}_t^j, t)d\boldsymbol{w}_t^j, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{x}_{t_0}^i = \boldsymbol{x}_0^i(\in R^{n_i}), \qquad \text{a. s. } i = 1, 2, \cdots, l$$

这里 $\boldsymbol{x}_t^T = ((\boldsymbol{x}_t^1)^T, (\boldsymbol{x}_t^2)^T, \cdots, (\boldsymbol{x}_t^l)^T) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$,

$$\boldsymbol{x}^i \in R^{n_i},\ \boldsymbol{b}^i(\cdot): R^{n_i} \times R_+ \to R^{n_i},\ \boldsymbol{R}^i(\cdot): R^n \times R_+ \to R^{n_i};$$

$\boldsymbol{\sigma}^{ij}(\cdot): R^{n_j} \times R_+ \to R^{n_i m_j}$, $\boldsymbol{w}_t^T \in R^{m_j}$ 为一 Wiener 过程

$$n = \sum_{i=1}^{l} n_i, \quad m = \sum_{j=1}^{l} m_j, \quad \boldsymbol{w}_t^T = ((\boldsymbol{w}_t^1)^T, \cdots, (\boldsymbol{w}_t^l)^T).$$

假设系统 (1) 对每一 $\boldsymbol{x}_{t_0} = \boldsymbol{x}_0(\in R^n)$ 满足一般的解过程 $\{\boldsymbol{x}_t, t \in R_+\}$, 按概率 1 存在唯一性定理的条件，再引进确定性的常微辅助大系统：

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(u_i, t) + g_i(\boldsymbol{u}, t),$$

$$\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u}_0 \geqslant 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, l) \tag{2}$$

这里 $\boldsymbol{u}^T(t) = (u_1(t), u_2(t), \cdots, u_l(t))$,

$f_i \in C[R_+ \times R_+, R]$ 且对每个 $t \in R_+$ 为关于 u_i 的凹函数，

本文于 1980 年 9 月 15 日收到

$g_i \in C[R_+^l \times R_+, R]$ 且对每个 $t \in R_+$ 关于 $\boldsymbol{u}$ 为拟单调非降的凹函数.

二、主要结果

设

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t) \triangleq (V_1(\boldsymbol{x}^1, t), \cdots, V_l(\boldsymbol{x}^l, t))^T, \quad \boldsymbol{x}^i \in R^{n_i}, \quad (i = 1, 2, \cdots, l)$$

令

$$L_i V_i(\boldsymbol{x}^i, t) \triangleq \nabla_t V_i(\boldsymbol{x}^i, t) + [\nabla_{x^i} V_i(\boldsymbol{x}^i, t)]^T \cdot \boldsymbol{b}^i(\boldsymbol{x}^i, t) + \frac{1}{2} \operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{ii}(\boldsymbol{x}^i, t)^T \cdot \nabla_{x^i x^i} V_i(\boldsymbol{x}^i, t) \cdot \boldsymbol{\sigma}^{ii}(\boldsymbol{x}^i, t)]$$

定理 1 (比较定理). 假设存在一个满足下列条件的函数 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)$:

(H_1). $\boldsymbol{V} \in C[R^n \times R_+, R_+^l]$, $\boldsymbol{V}_t$、$\boldsymbol{V}_x$、$\boldsymbol{V}_{xx}$ 存在且连续, 对于 $(\boldsymbol{x}, t) \in R^n \times R_+$.

(H_2). 对任一 $T > t_0$ 有 $E\int_{t_0}^{T} \|\nabla_{x^i} V_i(\boldsymbol{x}_t^i, t)^T \cdot \boldsymbol{\sigma}^{ij}(\boldsymbol{x}_t^j, t)\|^2 dt < \infty$

这里 $\boldsymbol{x}_t$ 为随机大系统 (1) 的解过程.

(H_3). $L_i V_i(\boldsymbol{x}^i, t) \leqslant f_i(V_i(\boldsymbol{x}^i, t), t)$, $(\boldsymbol{x}^i, t) \in R^{n_i} \times R_+$, $i = 1, 2, \cdots, l$

(H_4). $$[\nabla_{x^i} V_i(\boldsymbol{x}^i, t)]^T \cdot R^i(\boldsymbol{x}, t) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{l} \operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{ij}(\boldsymbol{x}^j, t)^T \cdot \nabla_{x^i x^i} V_i(\boldsymbol{x}^i, t) \cdot \boldsymbol{\sigma}^{ij}(\boldsymbol{x}^j, t)] \leqslant g_i(V(\boldsymbol{x}, t), t), \quad (i = 1, 2, \cdots, l), \ (\boldsymbol{x}, t) \in R^n \times R_+$$

则由 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}_0, t_0) \leqslant \boldsymbol{u}_0$ 就有 $E_{x_0 t_0} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}_t, t) \leqslant \boldsymbol{r}(t, \boldsymbol{u}_0, t_0)$, $t \geqslant t_0$

这里 $\boldsymbol{r}(t, \boldsymbol{u}_0, t_0)$ 为系统 (2) 存在于 $t \geqslant t_0$ 的最大解, $\boldsymbol{x}_t$ 为随机大系统 (1) 的解过程.

为了大系统 (1) 有解 $\boldsymbol{x}_t \equiv 0$, 还假设:

$$\boldsymbol{b}^i(0, t) \equiv 0, \quad \boldsymbol{\sigma}^{ij}(0, t) \equiv 0, \quad \text{对于 } t \geqslant 0, \ i, j = 1, 2, \cdots, l.$$

亦即原点是随机大系统 (1) 的唯一平衡点.

同样对于辅助系统 (2) 也假设:

$$f_i(0, t) = g_i(0, t) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, l, \ t \geqslant 0,$$

这一假设也意味着系统 (2) 的解是非负的.

定理 2 (随机指数渐近稳定性的比较准则).

假设存在一个函数 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)$, 除满足比较定理中的条件 (H_1)—(H_4) 外, 还满足

(H_5). $\sum_{i=1}^{l} [f_i(u_i, t) + g_i(\boldsymbol{u}, t)] \leqslant 0$, $\quad (\boldsymbol{u}, t) \in R^l \times R_+$,

(H_6). $\boldsymbol{V}(0, t) \equiv 0$, 并且 $\alpha(\|\boldsymbol{x}\|) \leqslant \sum_{i=1}^{l} V_i(\boldsymbol{x}^i, t) \leqslant C\|\boldsymbol{x}\|$ 对于 $(\boldsymbol{x}, t) \in R^n \times R_+$,

这里 $\alpha(r)$ 是关于 r 严格单调递增函数, $\alpha(0) = 0$, C 为一正常数.

则由常微辅助大系统 (2) 平凡解的等度指数渐近稳定性, 就有随机大系统 (1) 平凡解的随机指数渐近稳定性.

定理 3 (随机完全稳定性的比较准则).

假设存在一个函数 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)$ 除满足定理 2 中的条件 (H_1)—(H_5) 外, 条件 (H_6) 以

下的条件用 (H_6^*) 替代，

$$(H_6^*).\ \boldsymbol{V}(0, t) \equiv 0,\ \text{并且}\ \alpha(\|\boldsymbol{x}\|) \leqslant \sum_{i=1}^{l} V_i(\boldsymbol{x}^i, t) \leqslant \beta(\|\boldsymbol{x}\|),$$

$$\text{对于}\ (\boldsymbol{x}, t) \in R^n \times R_+,$$

这里的 $\alpha(r)$，$\beta(r)$ 与定理 2 中的 $\alpha(r)$ 属于同一函数类，则由常微辅助大系统(2)平凡解的拟完全稳定性(拟一致完全稳定性)就有随机大系统 (1) 平凡解的随机完全稳定性(随机一致完全稳定性)。

参 考 文 献

[1] 胡宣达、俞中明，比较定理与随机微分方程 (I)，南京大学学报(自然科学版) (1980) 第 3 期，1—13.

[2] 胡宣达、俞中明，比较定理与随机微分方程 (II)，南京大学学报(自然科学版)数学专刊 (1980) 78—85，

[3] Rasmussen R. D., Michel, A. N. On Vector Lyapunov functions for Stochastic Dynamical Systems, *IEEE. Trans. Automat. Contr.* AC-**21** (1976), 250—254.

STABILITY OF STOCHASTIC LARGE SYSTEMS

Hu Xuanda

(*Nanjing University*)

7 卷 4 期 更 正

310 页图 3 均热炉计算机控制框图中，“计算机按公式 (5—18)，(4—8)……”应为“计算机按公式 (3.8)，(4.2)……”