第 8 卷 第 1 期 自 动 化 学 报 Vol. 8, No. 1
1982 年 1 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1982

无静差和结构无静差系统的结构特征

钱唯德
（北京控制与电子技术研究所）
王恩平 王朝珠
（中国科学院系统科学研究所）

摘 要

本文用频域方法讨论了无静差和结构无静差系统的结构特征。给出了结构无静差系统设计的传递函数方法.

一、问题的叙述及准备知识

在调节、跟踪系统理论中，除了稳定性之外，人们关心的问题之一是系统的抗干扰能力，或者说系统的被调整变量或跟踪误差对外部干扰的依赖关系. 本文用频域方法讨论了一类跟踪系统的抗干扰特性，研究了无静差和结构无静差系统的结构特征，以及结构无静差系统的设计方法.

设给定开环系统

$$\Sigma_0:\quad \begin{aligned} &P_0(D)\boldsymbol{z}(t) = R_0(D)\boldsymbol{u}(t) + M(D)\boldsymbol{f}(t), \\ &\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{z}_0(t) - \boldsymbol{z}(t). \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{z}(t)$, $\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{f}(t)$ 和 $\boldsymbol{z}_0(t)$ 分别表示系统的输出、控制输入、干扰输入和参考输入矢量，其维数分别为 m, r, q 和 m; $\boldsymbol{e}(t)$ 表示跟踪误差矢量; $P_0(D)$, $R_0(D)$ 和 $M(D)$ 分别表示 $m\times m$, $m\times r$, 和 $m\times q$ 阶多项式阵，D 表示微分算子. 且假定 $P_0(D)$ 行正则; $P_0(D)$ 和 $R_0(D)$ 左互质. $P_0^{-1}(D)\,R_0(D)$ 为真有理分式阵 $\boldsymbol{f}(t)$, $\boldsymbol{z}_0(t)$ 分别满足下列微分方程:

$$N_1(D)\boldsymbol{f}(t) = 0, \tag{1.1}$$

$$N_2(D)\boldsymbol{z}_0(t) = 0. \tag{1.2}$$

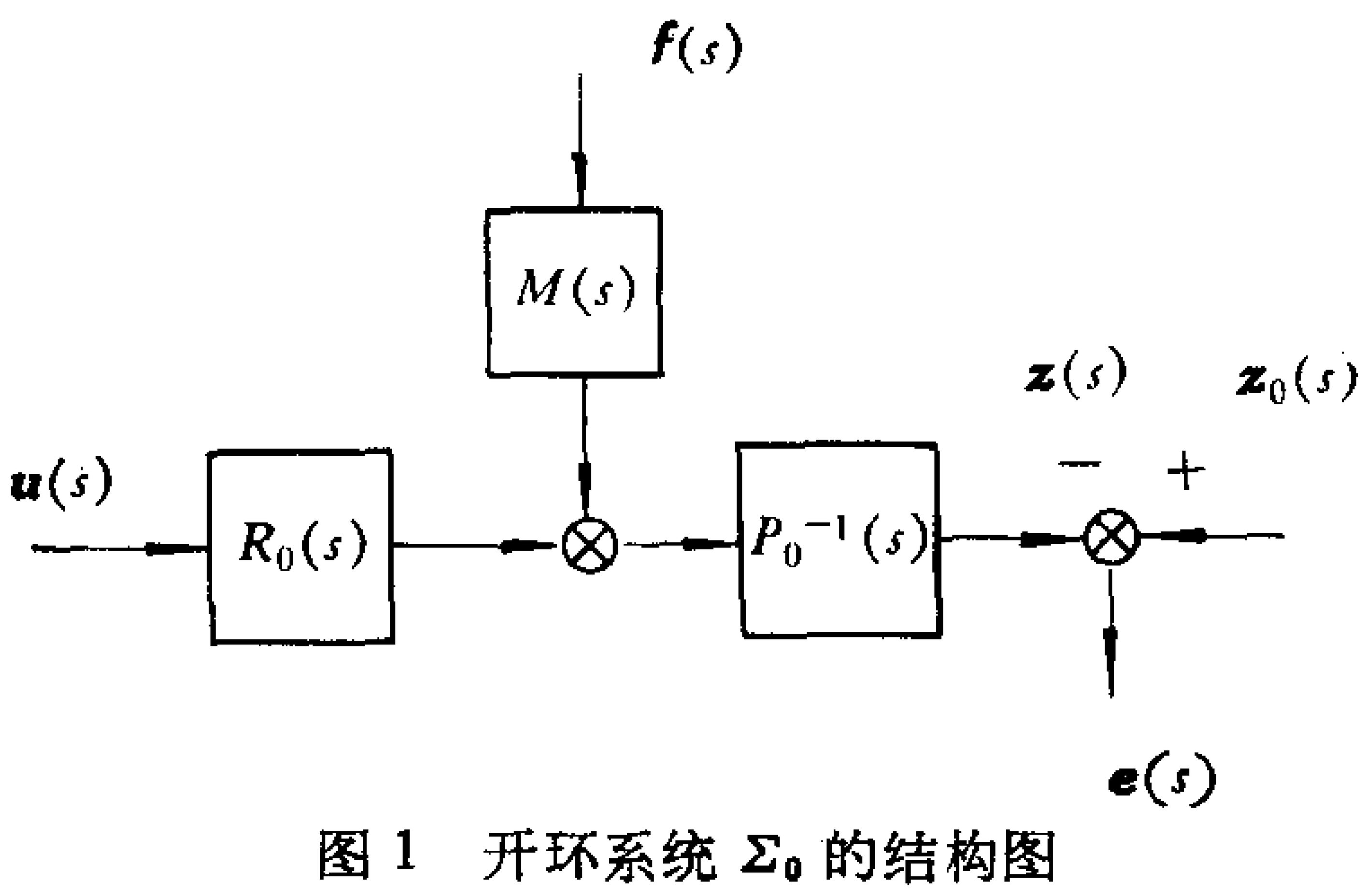

图 1 开环系统 Σ_0 的结构图

本文于 1980 年 3 月 21 日收到.

这里，$N_1(D)$，$N_2(D)$ 分别是 $q\times q$，$m\times m$ 阶多项式阵．且 $\det N_1(D)$，$\det N_2(D)$ 的零点集合满足 $\mathscr{N}(\det N_i(D))\subset\mathscr{C}^+$，$\mathscr{C}^+$ 表示复右半闭平面．系统 Σ_0 的结构如图 1，其中 S 为拉氏变换符号．

本文的目的是找一形如

$$\boldsymbol{u}(t)=R_1(D)\boldsymbol{\xi}(t),\tag{1.3a}$$

$$P_1(D)\boldsymbol{\xi}(t)=\boldsymbol{e}(t)\tag{1.3b}$$

的动态补偿器，其中 $P_1(D)$，$R_1(D)$ 分别为 $m\times m$ 和 $r\times m$ 阶多项式阵，且 $P_1(D)$ 列正则，使得闭环系统

$$\Sigma_c:\quad \begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{e}(t)\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c|c}P_0(D)P_1(D)+R_0(D)R_1(D) & M(D) & -P_0(D)\\ \hline P_1(D) & 0 & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\xi}(t)\\ \boldsymbol{f}(t)\\ \boldsymbol{z}_0(t)\end{bmatrix}$$

具有如下性质：

1）为闭环稳定，即 $P_0(D)P_1(D)+R_0(D)R_1(D)$ 为稳定阵；

2）是无静差的，即对所有满足方程 (1.1)，(1.2) 的 $\boldsymbol{f}(t)$，$\boldsymbol{z}_0(t)$ 皆有 $\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{e}(t)=0$；

3）是非退化的，即 $\partial[P_0(D)P_1(D)+R_0(D)R_1(D)]=\partial[P_0(D)]+\partial[P_1(D)]$，这里 $\partial[\cdot]$ 为多项式矩阵的次数[1)]．

通常称满足前两条性质的补偿器 (1.3) 为 Σ_0 的无静差补偿器．图 2 为闭环系统结构图．

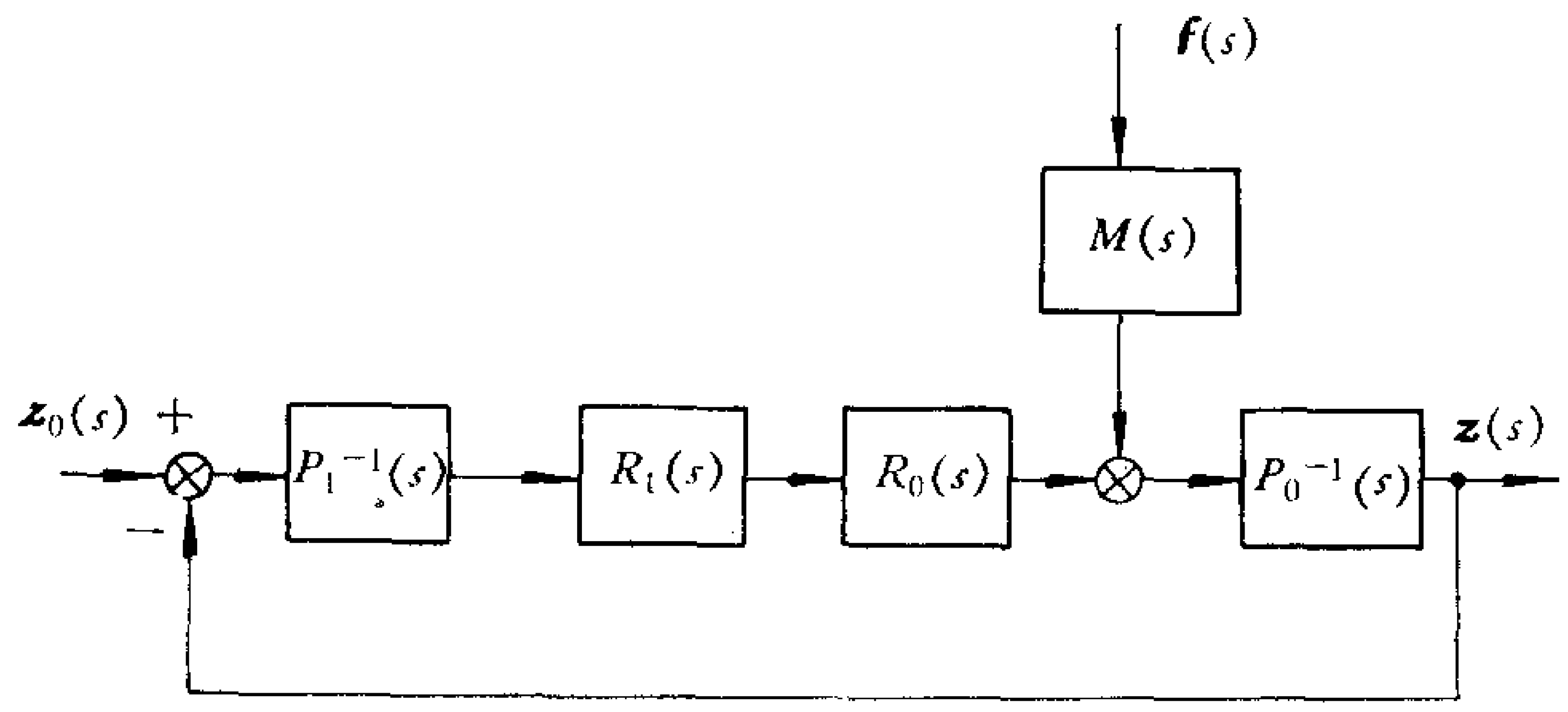

图 2　闭环系统 Σ_c 的结构图

定义 1.　把多项式阵 $P_0(D)$，$R_0(D)$，$M(D)$ 的元按多项式系数依次排成一个空间矢量，记作 $p\{P_0, R_0, M\}$，则称这个矢量为 Σ_0 的标称参数点．简称标称参数点．

例　$P_0(D)=\begin{bmatrix}D^2+1, & D\\ 2D, & D+1\end{bmatrix}$，

则 $p\{P_0\}=[1,0,1,1,0,2,0,1,1]^T$．$T$ 表示转置．

定义 2.　若在标称参数点 $p\{P_0, R_0, M\}$ 处存在一个邻域，使得补偿器 (1.3) 对这个邻域中的每个参数点都是系统 Σ_0 的无静差补偿器，则称 (1.3) 为系统 Σ_0 在标称参数点 $p\{P_0, R_0, M\}$ 处的结构无静差补偿器．

1）$\partial[P(D)]$ 为 $\det P(D)$ 的次数．可以证明非退化条件和具有反馈环节的闭环系统的物理能实现性是等价的．

引理1. 给定动态系统

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(D) & U(D) \\ R(D) & Q(D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{f}(t) \end{bmatrix}, \tag{1.4}$$

其中 $P(D)$, $R(D)$, $U(D)$, $Q(D)$ 分别为 $n\times n$, $m\times n$, $n\times q$, $m\times q$ 阶多项式阵. $\boldsymbol{x}(t)$ 为系统的分状态, $\boldsymbol{y}(t)$ 为系统输出, $\boldsymbol{f}(t)$ 为系统的外干扰输入. 设 $P(D)$ 为稳定阵, 且 $\boldsymbol{f}(t)$ 满足

$$N(D)\boldsymbol{f}(t)=0, \tag{1.5}$$

这里 $N(D)$ 是 $q\times q$ 阶多项式阵,且 $\mathscr{N}(\det N(D))\subset\mathscr{C}^+$. 那末, $\boldsymbol{y}(t)$ 关于 $\boldsymbol{f}(t)$ 为无静差的充要条件是: 存在 $n\times q$, $n\times q$ 和 $m\times q$ 阶多项式阵 $V(D)$, $F(D)$, $H(D)$ 使得

$$P(D)V(D)+F(D)N(D)=U(D), \tag{1.6a}$$

$$R(D)V(D)+H(D)N(D)=Q(D). \tag{1.6b}$$

证明. 充分性. 将 (1.6a), (1.6b) 分别代入 (1.4) 中且注意到 (1.5) 得

$$P(D)(\boldsymbol{x}(t)+V(D)\boldsymbol{f}(t))=0, \tag{1.7a}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=R(D)(\boldsymbol{x}(t)+V(D)\boldsymbol{f}(t)), \tag{1.7b}$$

因 $P(D)$ 为稳定阵,从 (1.7a) 必有

$$\lim_{t\to\infty}(\boldsymbol{x}(t)+V(D)\boldsymbol{f}(t))=0. \tag{1.8}$$

由于 $\boldsymbol{x}(t)+V(D)\boldsymbol{f}(t)$ 是具有性质 (1.8) 的 (1.7a) 微分方程的解,它的每个分量都是负实部复指数型函数的线性组合. 因此由 (1.7b) 必有 $\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{y}(t)=0$.

必要性. 由于 $\mathscr{N}(\det N(D))\subset\mathscr{C}^+$, $P(D)$ 为稳定阵,则 $P(D)$ 和 $\det N(D)I_n$ 必左互质(当然也右互质). 因此,对给定的 $U(D)N^+(D)$ 必存在 $n\times q$ 阵 $X(D)$, $F(D)$ 使

$$P(D)X(D)+\det N(D)F(D)=U(D)N^+(D). \tag{1.9}$$

其中 $N^+(D)$ 为 $N(D)$ 的伴随阵,即

$$N^{-1}(D)=\frac{1}{\det N(D)}N^+(D).$$

用 $\dfrac{1}{\det N(D)}N(D)$ 左乘 (1.9) 得

$$P(D)\frac{1}{\det N(D)}X(D)N(D)+F(D)N(D)=U(D). \tag{1.10}$$

由于 $P(D)$, $\det N(D)I_n$ 左互质,从上式知必存在多项式 $V(D)$ 使

$$V(D)=\frac{1}{\det N(D)}X(D)N(D).$$

将上式代入 (1.10) 得

$$P(D)V(D)+F(D)N(D)=U(D). \tag{1.11}$$

将 (1.11) 代入系统 (1.4) 中且注意到 (1.5) 得

$$P(D)(\boldsymbol{x}(t)+V(D)\boldsymbol{f}(t))=0.$$

因为 $P(D)$ 为稳定阵,必有

$$\lim_{t\to\infty}(\boldsymbol{x}(t)+V(D)\boldsymbol{f}(t))=0. \tag{1.12}$$

另一方面直接从 (1.4) 得

$$y(t) = R(D)(x(t) + V(D)f(t)) + (Q(D) - R(D)V(D))f(t),$$

依引理假设且注意到 (1.12)，必有

$$\lim_{t\to\infty} (Q(D) - R(D)V(D))f(t) = 0. \tag{1.13}$$

但 $f(t)$ 是式 (1.5) 的解必有

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty, \tag{1.14}$$

因此，为了 (1.13) 和 (1.14) 式同时成立，必有

$$(Q(D) - R(D)V(D))f(t) \equiv 0.$$

另由 $f(t)$ 是 (1.5) 的解知，必存在 $m\times q$ 阶多项式阵 $H(D)$ 使

$$Q(D) - R(D)V(D) = H(D)N(D),$$

从而得

$$R(D)V(D) + H(D)N(D) = Q(D).$$

必要性得证.

注：$H(D)$ 可能为零阵.

直接从引理 1 可得如下两个推论：

推论 1. 在引理 1 给定的系统中，若 $Q(D) = 0$，$R(D) = I_m$ 时，$y(t)$ 关于 $f(t)$ 无静差的充要条件是：$N(D)$ 为 $U(D)$ 的右因子；若 $Q(D) = 0$，$U(D) = I_m$ 时，必存在 $n\times n$ 阶多项式阵 $\tilde{N}(D)$，满足 $\det N(D) = \beta \det \tilde{N}(D)$，$\beta \neq 0$，使得 $\tilde{N}(D)$ 为 $R(D)$ 的右因子，且 $\tilde{N}(D)$ 和稳定多项式阵 $\tilde{P}(D)$ 一起满足

$$\tilde{P}(D)\tilde{N}(D) = N(D)P(D).$$

证明从略.

推论 2. 对引理 1 给定的系统，$y(t)$ 关于 $f(t)$ 无静差的充要条件是多项式阵

$$\begin{bmatrix} P(D) & U(D) \\ 0 & N(D) \end{bmatrix}, \quad [R(D), \quad Q(D)]$$

有右公因 $L(D)$，且 $\det L(D) = \det N(D)$.

证明从略.

推论 2 有明显的物理意义，即若 $y(t)$ 关于 $f(t)$ 是无静差的，充要条件是 $y(t)$ 对 $f(t)$ 不能观测.

二、无静差系统的结构特征

对给定的系统 Σ_0 和无静差补偿器 (1.3) 有如下结果.

定理 1. 若闭环系统 Σ_c 是稳定的，则，$e(t)$ 对 $f(t)$ 和 $z_0(t)$ 是无静差的充要条件是：

1) 存在 $m\times m$，$m\times q$，$m\times m$，$m\times m$ 阶多项式阵 $\bar{N}_1(D)$，$\bar{M}(D)$，$\tilde{N}(D)$，$\tilde{R}(D)$ 满足：

$$\bar{N}_1(D)M(D) = \bar{M}(D)N_1(D), \tag{2.1}$$

$$\bar{N}_1(D)R_0(D)R_1(D) = \tilde{R}(D)\tilde{N}_1(D). \tag{2.2}$$

其中 $\det \widetilde{N}_1(D) = \alpha \det \bar{N}_1(D)$, $\alpha \neq 0$. $\det \bar{N}_1(D)$ 是 $\det N_1(D)$ 的因子. 且 $\bar{M}(D)$ 与 $\bar{N}_1(D)$ 左互质，$\tilde{R}(D)$与 $\bar{N}_1(D)$ 左互质. $R_0(D)R_1(D)$ 与 $\widetilde{N}_1(D)$ 右互质；

2) 存在$m \times m$阶多项式阵 $\bar{N}_2(D)$, $\bar{P}_0(D)$, $\widetilde{N}_2(D)$ 和 $\bar{R}(D)$ 满足等式

$$\bar{N}_2(D)P_0(D) = \bar{P}_0(D)N_2(D), \tag{2.3}$$

$$\bar{N}_2(D)R_0(D)R_1(D) = \bar{R}(D)\widetilde{N}_2(D). \tag{2.4}$$

其中 $\det \bar{N}_2(D) = \beta \det \widetilde{N}_2(D)$, $\beta \neq 0$. $\det \bar{N}_2(D)$ 是 $\det N_2(D)$ 的因子. 且 $\bar{P}_0(D)$ 与 $\bar{N}_2(D)$ 左互质，$\bar{R}(D)$ 与 $\bar{N}_2(D)$ 左互质，$R_0(D)R_1(D)$ 与 $\widetilde{N}_2(D)$ 右互质.

3) 存在$m \times m$阶阵，$\tilde{P}_1(D)$, $\widetilde{N}(D)$ 使

$$P_1(D) = \tilde{P}_1(D)\widetilde{N}(D). \tag{2.5}$$

其中 $\widetilde{N}(D)$ 是 $\widetilde{N}_1(D)$ 和 $\widetilde{N}_2(D)$ 的最低左公倍.

证明.（为了书写方便，在下面证明中一般省略微分算子D和时间变量 t).

必要性. 因 $P_0P_1+R_0R_1$ 是稳定阵.依引理 1 知. 必存在相应维数的多项式阵 V_1, F_1, H_1, V_2, F_2, H_2, 使

$$(P_0P_1 + R_0R_1)V_1 + F_1N_1 = M, \tag{2.6}$$

$$P_1V_1 + H_1N_1 = 0, \tag{2.7}$$

$$(P_0P_1 + R_0R_1)V_2 + F_2N_2 = -P_0, \tag{2.8}$$

$$P_2V_2 + H_2N_2 = 0. \tag{2.9}$$

若 N_1 和M有最大右公因子 L, 则 $\mathcal{N}(\det L) \subset \mathscr{C}^+$, 显然 L 亦是 V_1 与 N_1 的最大右公因. 在 (2.6), (2.7) 中消去右公因 L, 得

$$(P_0P_1 + R_0R_1)\bar{V}_1 + F_1N_1^* = M^*, \tag{2.10}$$

$$P_1\bar{V}_1 + H_1N_1^* = 0. \tag{2.11}$$

这里，M^*, N_1^* 右互质，$\bar{V}_1$, N_1^* 右互质. 显然有

$$MN_1^{-1} = M^*N_1^{-1*},$$

且 $\det N_1 = \det L \cdot \det N^*$. 将 $M^*N_1^{-1*}$ 作左互质分解 $\bar{N}^{-1}\bar{M}$ 从而有

$$MN_1^{-1} = M^*N_1^{-1*} = \bar{N}_1^{-1}\bar{M},$$

或

$$\bar{N}_1M = \bar{M}N_1, \tag{2.12}$$

且 $\det N_1^* = a \det \bar{N}_1$, $a \neq 0$.

用 $\bar{N}_1$ 左乘 (2.10)，同时用 N_1^{-1*} 右乘 (2.10) 得

$$\bar{N}_1(P_0P_1 + R_0R_1)\bar{V}_1N_1^{-1*} + \bar{N}_1F_1 = \bar{M}. \tag{2.13}$$

对 $\bar{V}_1N_1^{-1*}$ 做左互质分解得

$$\bar{V}_1N_1^{-1*} = \widetilde{N}_1^{-1}\widetilde{V}_1. \tag{2.14}$$

这里 $\det \widetilde{N}_1 = b \det N_1^*$, $b \neq 0$. 于是有

$$\bar{N}_1(P_0P_1 + R_0R_1)\widetilde{N}_1^{-1}\widetilde{V}_1 + \bar{N}_1F_1 = \bar{M}. \tag{2.15}$$

将 (2.14) 代入 (2.11) 中得

$$P_1\widetilde{N}_1^{-1}\widetilde{V}_1 = -H_1. \tag{2.16}$$

将上式代入 (2.15) 中得

$$\bar{N}_1R_0R_1\widetilde{N}_1^{-1}\widetilde{V}_1 + \bar{N}_1(F - P_0H_1) = \bar{M}. \tag{2.17}$$

因此，$\bar{N}_1R_0R_1\tilde{N}_1^{-1}$ 必为多项式阵，从而知存在 $\tilde{R}$ 使

$$\bar{N}_1R_0R_1 = \tilde{R}_1\tilde{N}_1. \tag{2.18}$$

将上式代入 (2.17) 中得

$$\tilde{R}_1\tilde{V}_1 + \bar{N}_1(F - P_0H_1) = \bar{M}.$$

因 $\bar{N}_1$, $\bar{M}$ 左互质，则 $\tilde{R}_1$, $\tilde{N}_1$ 必左互质. 由 (2.18) 且注意到 $\det \tilde{N}_1 = ab \det \bar{N}_1$ 知，R_0R_1, $\tilde{N}_1$ 必右互质. 从而证明了定理的第一部分.

再从 (2.16) 知必存在 $m \times m$ 阶多项式阵 $\bar{\bar{P}}_1$ 使

$$P_1 = \bar{P}_1\tilde{N}_1, \tag{2.19}$$

同理利用 (2.8), (2.9) 可证明定理的第二部分，且存在 $m \times m$ 阶多项式阵 P_1^* 使

$$P_1 = P_1^*\tilde{N}_2 \tag{2.20}$$

令 $\tilde{N}$ 是 $\tilde{N}_1$, $\tilde{N}_2$ 的最低左公倍式. 从 (2.19), (2.20) 得

$$P_1 = \tilde{P}_1\tilde{N},$$

恰是定理的第三部分.

充分性. 已知闭环系统 Σ_c 为

$$(P_0P_1 + R_0R_1)\boldsymbol{\xi} = -M\boldsymbol{f} + P_0\boldsymbol{z}_0, \tag{2.21a}$$

$$\boldsymbol{e} = P_1\boldsymbol{\xi}, \tag{2.21b}$$

据叠加原理有

$$(P_0P_1 + R_0R_1)\boldsymbol{\xi}_1 = -M\boldsymbol{f}, \tag{2.22a}$$

$$\boldsymbol{e}_1 = P_1\boldsymbol{\xi}_1, \tag{2.22b}$$

$$(P_0P_1 + R_0R_1)\boldsymbol{\xi}_2 = P_0\boldsymbol{z}_0, \tag{2.23a}$$

$$\boldsymbol{e}_2 = P_1\boldsymbol{\xi}_2, \tag{2.23b}$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,$$

利用定理条件 1 和 3, 在 (2.22a) 两边左乘 $\bar{N}_1$ 得

$$\bar{N}_1(P_0P_1 + R_0R_1)\boldsymbol{\xi}_1 = -\bar{N}_1M\boldsymbol{f}.$$

注意到 $\bar{N}_1R_0R_1 = \tilde{R}\tilde{N}_1$, 和条件 3 给出

$$P_1 = \bar{P}_1\tilde{N}_1,$$

上式变为:

$$\bar{N}_1(P_0P_1 + R_0R_1)\boldsymbol{\xi}_1 = (\bar{N}_1P_0\bar{P}_1 + \tilde{R})\tilde{N}_1\boldsymbol{\xi}_1 = 0. \tag{2.24}$$

由于 $\det \tilde{N}_1 = \alpha \det \bar{N}_1$, 且 $P_0P_1 + R_0R_1$ 为稳定阵，则

$\bar{N}_1P_0\bar{P}_1 + \tilde{R}$ 必为稳定阵. 从 (2.24) 知.

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{N}_1\boldsymbol{\xi}_1 = 0, \tag{2.25}$$

且

$$\boldsymbol{e}_1(t) = \bar{P}_1\tilde{N}_1\boldsymbol{\xi}_1,$$

从而知

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{e}_1(t) = 0.$$

同理，从定理条件 2 和 3 可得

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{e}_2(t) = 0,$$

因此有 $\lim\limits_{t\to\infty} e(t)=0$，从而充分性得证.

三、结构无静差系统的结构特征

在实际工程系统中，常常遇到系统参数发生变化的情形. 若此时仍要求系统具有无静差特性,其结构特征有些什么新特点呢? 这是本节所要讨论的问题.

首先把 $N_1(D)$, $N_2(D)$ 化成 Smith 形. 由于 $\det N_1(D)\not\equiv 0$, $\det N_2(D)\not\equiv 0$, 则存在 $q\times q$ 阶单位模阵 $L_1(D)$, $L_2(D)$ 和 $m\times m$ 阶单位模阵 $T_1(D)$, $T_2(D)$ 使得

$$S_1(D)=\mathrm{diag}\,(\alpha_1(D),\alpha_2(D)\cdots\alpha_q(D))=L_1(D)N_1(D)L_2(D), \tag{3.1}$$

$$S_2(D)=\mathrm{diag}\,(\beta_1(D),\beta_2(D)\cdots\beta_m(D))=T_1(D)N_2(D)T_2(D). \tag{3.2}$$

其中 $\alpha_{i+1}(D)|\alpha_i(D)$, $\beta_{j+1}(D)|\beta_j(D)$, $i=1,2\cdots q-1$, $j=1,2\cdots m-1$. 令 $k(D)$ 为 $\alpha_1(D)$, $\beta_1(D)$ 的最低公倍式,记 $\mathscr{N}(k(D))$ 为 $k(D)$ 的零点集合,有关结构无静差系统的结果可叙述如下.

定理 2. 已知开环系统 Σ_0, 若 (1.3) 是系统 Σ_0 在标称参数点 $p\{M, P_0\}$ 处的结构无静差补偿器,则有

1) $\mathrm{Rank}\ R_0(D_0)=m$, $\quad\forall D_0\in\mathscr{N}(k(D))$

2) $m\leqslant r$,

3) $P_1(D)$ 的每个元都能被 $k(D)$ 除尽.

证明. 为了简化书写,除特别需要,一般略去微分算子 D. 依定理假定 $P_0P_1+R_0R_1$ 为稳定阵. 据引理 1 知存在适当维数的多项式阵 V_1, F_1, H_1, V_2, F_2, H_2 使

$$(P_0P_1+R_0R_1)V_1+F_1N_1=M, \tag{3.3}$$

$$P_1V_1+H_1N_1=0, \tag{3.4}$$

$$(P_0P_1+R_0R_1)V_2+F_2N_2=-P_0, \tag{3.5}$$

$$P_1V_2+H_2N_2=0. \tag{3.6}$$

在等式 (3.3), (3.4) 的两边右乘 L_2, 利用 (3.1) 和 (3.4) 得

$$R_0R_1V_1L_2+(F_1-P_0H_1)L_1^{-1}S_1=ML_2, \tag{3.7a}$$

$$P_1V_1L_2+H_1L_1^{-1}S_1=0. \tag{3.7b}$$

令 $\boldsymbol{g}_1$ 为 V_1L_2 的第一列, $\boldsymbol{l}_2$ 为 L_2 的第一列, $\boldsymbol{h}_1$ 为 $H_1L_1^{-1}$ 的第一列, $\boldsymbol{x}_1$ 为 $(F_1-P_0H_1)L_1^{-1}$ 的第一列,于是有

$$R_0R_1\boldsymbol{g}_1+\alpha_1\boldsymbol{x}_1=M\boldsymbol{l}_2, \tag{3.8}$$

$$P_1\boldsymbol{g}_1+\alpha_1\boldsymbol{h}_1=0. \tag{3.9}$$

任取 $D_0\in\mathscr{N}(\alpha_1(D))$, 当 $D=D_0$ 时, (3.8), (3.9) 变成

$$R_0(D_0)R_1(D_0)\boldsymbol{g}_1(D_0)=M(D_0)\boldsymbol{l}_2(D_0), \tag{3.10}$$

$$P_1(D_0)\boldsymbol{g}_1(D_0)=0. \tag{3.11}$$

当 $M(D)$ 的参数发生变化时,例如 $M(D)$ 变成 $M(D)+\delta M(D)$, 这里 $\delta M(D)$ 是一个 $m\times q$ 阶多项式阵. 依定理假定当 $M(D)$ 变为 $M(D)+\delta M(D)$ 时, (1.3) 仍是无静差补偿器,则存在相应的 $\bar{\boldsymbol{g}}_1(D_0)$ 使

$$R_0(D_0)R_1(D_0)\bar{\boldsymbol{g}}_1(D_0)=(M(D_0)+\delta M(D_0))\boldsymbol{l}_2(D_0), \tag{3.12}$$

$$P_1(D_0)\bar{\boldsymbol{g}}_1(D_0)=0. \tag{3.13}$$

若记 $\delta \boldsymbol{g}_1(D_0) = \bar{\boldsymbol{g}}_1(D_0) - \boldsymbol{g}_1(D_0)$，由 (3.10)—(3.13) 得

$$R_0(D_0)R_1(D_0)\delta \boldsymbol{g}_1(D_0) = \delta M(D_0)\boldsymbol{l}_2(D_0), \tag{3.14}$$

$$P_1(D_0)\delta \boldsymbol{g}_1(D_0) = 0. \tag{3.15}$$

在 $p\{M\}$ 的邻域内，总可选取这样的 m 个点，其相应的 $\delta M_i(D)$ 为常值阵 δM_i，且使

$$\delta M_1 \boldsymbol{l}_2(D_0),\ \delta M_2 \boldsymbol{l}_2(D_0),\ \cdots,\ \delta M_m \boldsymbol{l}(D_0)$$

为线性独立的 m 个矢量．对每个 δM_i 有相应的 $\delta \boldsymbol{g}_i(D_0)$，使 (3.14)，(3.15) 成立，从而有

$$\mathrm{Rank}\ R_0(D_0)R_1(D_0)[\delta \boldsymbol{g}_1(D_0),\ \delta \boldsymbol{g}_2(D_0),\ \cdots,\ \delta \boldsymbol{g}_m(D_0)] = m, \tag{3.16}$$

$$P_0(D_0)[\delta \boldsymbol{g}_1(D_0),\ \delta \boldsymbol{g}_2(D_0),\ \cdots,\ \delta \boldsymbol{g}_m(D_0)] = 0. \tag{3.17}$$

从 (3.16) 得

$$\mathrm{Rank}\ R_0(D_0) = m,\quad \mathrm{Rank}\ R_1(D_0) = m,$$

$$\mathrm{Rank}\ [\delta \boldsymbol{g}_1(D_0),\ \delta \boldsymbol{g}_2(D_0),\ \cdots,\ \delta \boldsymbol{g}_m(D_0)] = m;\quad m \leqslant r.$$

由 (3.17) 得

$$P_1(D_0) = 0. \tag{3.18}$$

说明 $P_1(D)$ 的每个元都能被 $D - D_0$ 除尽．

当 D_0 为 $\alpha_1(D)$ 的 d 重零点时，在等式 (3.9) 两边同时除以 $D - D_0$，类似方法可证

$$\frac{1}{D - D_0} P_1(D_0) = 0. \tag{3.19}$$

这说明 $P_1(D)$ 诸元都能被 $(D - D_0)^2$ 整除． 依此类推，可证明 $P_1(D)$ 的每个元都能被 $(D - D_0)^d$ 除尽．由于 D_0 的任意性，可知 $P_1(D)$ 的每个元都能被 $\alpha_1(D)$ 除尽．

由 (3.5)，(3.6) 完全重复上述过程可知，$P_1(D)$ 的每个元都能被 $\beta_1(D)$ 除尽． 因而 $P_1(D)$ 的每个元都能被 $k(D)$ 除尽． 证毕．

定理 3. 若 $P_1(D)$ 的每个元都能被 $k(D)$ 除尽，且闭环系统稳定，非退化（即 $\partial[P_0P_1 + R_0R_1] = \partial[P_0] + \partial[P_1]$），则 (1.3) 必是 Σ_0 在标称参数点 $p\{M, P_0\}$ 处的结构无静差补偿器．

证明．由定理假设知 $P_0P_1 + R_0R_1$ 为稳定阵，但 $\mathscr{N}(\det N_1(D)) \subset \mathscr{C}^+$． 类似于引理 1 充分性证明的过程可知，对任意给定的 $M(D)$ 必存在适当维数的多项式阵，$V_1(D)$，$F_1(D)$，使

$$(P_0P_1 + R_0R_1)V_1L_2 + F_1N_1L_2 = ML_2. \tag{3.20}$$

由于 $P_1(D)$ 的每个元都能被 $k(D)$ 整除，因而也能被 $\alpha_1(D)$ 整除． 所以必存在 $m \times m$ 阶多项式阵 $\bar{P}_1(D)$，使

$$P_1(D) = \bar{P}_1(D)\alpha_1(D). \tag{3.21}$$

用 V_1L_2 右乘上式得

$$P_1V_1L_2 = \alpha_1\bar{P}_1V_1L_2 = \bar{P}_1V_1L_2\alpha_1 I_q = \bar{P}_1V_1L_2X_1S_1. \tag{3.22}$$

其中

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \bar{\alpha}_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \bar{\alpha}_q \end{bmatrix},$$

且 $\bar{\alpha}_i\alpha_i = \alpha_1$, $i = 2, 3\cdots q$.

用 L_2^{-1} 右乘 (3.20) 和 (3.22) 并取

$$H_1 = -\bar{P}_1 V_1 L_2 X_1 L_1,$$

得

$$\begin{aligned}&(P_0P_1 + R_0R_1)V_1 + F_1N_1 = M,\\ &P_1V_1 + H_1N_1 = 0,\end{aligned} \tag{3.23}$$

同理对 N_2 知存在 V_2, F_2, H_2 使

$$\begin{aligned}&(P_0P_1 + R_0R_1)V_2 + F_2N_2 = -P_0,\\ &P_1V_2 + H_2N_2 = 0.\end{aligned} \tag{3.24}$$

由 (3.23),(3.24) 依引理 1 和 $M(D)$ 的任意性知(1.3)是系统 Σ_0 在标称参数点 $p\{M\}$ 处的结构无静差补偿器。

由于 $\partial[P_0P_1 + R_0R_1] = \partial[P_0] + \partial[P_1]$，因此，在标称参数点 $p\{P_0, M\}$ 处，必存在一个邻域 $U_{P_0\cdot M}$，使得在这个邻域内的每个参数点都能保证 $P_0P_1 + R_0R_1$ 为稳定阵。从而知道对这些参数点(3.23),(3.24)皆成立。依定义 2，(1.3) 是系统 Σ_0 在标称参数点 $p\{P_0, M\}$ 处的结构无静差补偿器.

推论 3. 设闭环系统稳定且非退化，若 (1.3) 是 Σ_0 在标称参数点 $p\{P_0, M\}$ 处的结构无静差补偿器，则 (1.3) 也是系统 Σ_0 在标称参数点 $p\{P_0, R_0\ \bar{P}_1, R_1, M\}$ 处的结构无静差补偿器。其中 $P_1 = \bar{P}_1(D)k(D)$.

推论 4. 设闭环系统稳定且非退化，则 (1.3) 是系统 Σ_0 在标称参数点 $p\{P_0, M\}$ 处的结构无静差补偿器的充要条件是 $P_1(D)$ 的每个元都能被 $k(D)$ 除尽.

四、结构无静差补偿器的存在性

前面讨论了带有结构无静差补偿器的结构特征。那么，开环系统具有哪些性质时，才能存在结构无静差补偿器；而这样的结构补偿器又如何设计呢？为此，有如下定理：

定理 4. 系统 Σ_0 在标称参数点 $p\{P_0, M\}$ 处存在结构无静差补偿器的充要条件是：

1) $\mathrm{Rank}\ R_0(D_0) = m$, $\quad \forall D_0 \in \mathcal{N}(k(D))$

2) $m \leqslant r$.

证明。必要性是定理 2 的直接结果。下面主要证明充分性。

取 $P_1(D) = k(D)\bar{P}_1(D)$ 这里 $\bar{P}_1(D)$ 是待定的 $m\times m$ 阶多项式阵. 如果能够找到 $\bar{P}_1(D)$ 和 $R_1(D)$，使得

$$P_0P_1 + R_0R_1 \tag{4.1}$$

是稳定阵，且 $P_1(D)$, $R_1(D)$ 右互质，$R_1(D)P_1^{-1}(D)$ 物理能实现，同时 $\partial[P_0(D)P_1(D) + R_0(D)R_1(D)] = \partial[P_0(D)] + \partial[P_1(D)]$，由定理 3 可知，补偿器

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{u} = R_1(D)\boldsymbol{\xi}(t),\\ &P_1(D)\boldsymbol{\xi}(t) = \boldsymbol{e}(t),\end{aligned} \tag{4.2}$$

是系统 Σ_0 在标称参数点 $p\{P_0, M\}$ 处的结构无静差补偿器.

由于 $P_0(D)P_1(D) + R_0(D)R_1(D) = P_0(D)k(D)\bar{P}_1(D) + R_0(D)R_1(D)$，显然 $P_0(D)$, $k(D)$, $R_0(D)$ 左互质，且 $\partial_h[P_0(D)k(D)] > \partial_h[R_0(D)]$. 这里 $\partial_h[\cdot]$ 表示多项式矩阵的

行次．因此，满足上述条件的 $\bar{P}_1(D)$ 和 $R_1(D)$，可由文献[1]中方法给出．从而知满足要求的 $P_1(D)$，$R_1(D)$ 是存在的．定理得证．

参　考　文　献

[1] 韩京清，线性控制系统结构与反馈系统计算，全国控制理论及其应用学术交流会论文集 (1979，厦门)，科学出版社，1981.

[2] 钱唯德，完全不变性和 Robust 调节器之间的一些关系，清华大学学报，1979 年第三期.

[3] Francis, B. A., Wonham, W. M., The Internal Model Principle of Control Theory, *Automatic*, **12**, 1976, 457—465.

[4] Francis, B. A., The Internal Model Principle for Linear Multivariable Regulators, J. Appl. Math. Optimization **2** 170—194, 1975.

[5] Davison, E. J., Goldenberg, A., Robust Control of a General Servomechanism Problem —— The Servocompensation. *Automatic*, **11**, 1975, **461**—471.

[6] Bengtsson, G., Output Regulation and Internal Models —— Frequency Domain Approach, *Automatic*. **13** 1977, 333—345.

[7] Wolovich, W. A., Ferreira, P., Output Regulator and Tracking in Linear Multivariable Systems, *IEEE Trans*. AC-**24**, 1979, No. 3.

STRUCTURAL CHARACTERIZATION FOR LINEAR MULTIVARIABLE TIME-INVARIANT SYSTEMS WITHOUT STEADY OR STRUCTURALLY STEADY ERRORS

QIAN WEIDE

(*Beijing Institute of Control and Electronic Technology*)

WANG ENPING　WANG CHAOZHU

(*Institute of Systems Science and Mathematical Sciences, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper, the structural characterization of linear multivariable time-invariant systems without steady or structurally steady errors are demonstrated in the frequency domain. A transfer function approach is given for designing the compensator without structurally steady error.