

方块脉冲函数用于线性时变系统的 分析和最优控制

徐宁寿 郑兵

(北京工业大学)

摘 要

本文给出了方块脉冲函数的一些运算性质。利用这些性质求解线性时变系统的状态方程和基于二次型性能指标的最优控制规律, 得出了便于应用的均匀分段恒定解答。较沃尔什函数逼近法容易导出形式简明的递推算法, 且子区间的分段数可选取任意整数, 因而节省计算机内存和机时, 有助于提高计算和控制的精度。

一、引 言

对于线性时变系统状态方程的求解, 以及线性时变系统基于二次型性能指标的最优反馈控制规律的确定, 文献[1]采用沃尔什函数导出了适合于由计算机实现数字运算和控制的分段恒定解答。其缺点是:

1) 解答的形式不够简洁、明确, 应用时仍须求解隐含待求矩阵、向量的线性代数方程组。

2) 对整个控制时间历程均匀划分得出的子区间数 m , 必须为 2 的整数幂, 即 2、4、8、16、32、……; 在实用时从这些数字中往往难于选取到合理的 m 值, 既满足所要求的计算和控制精度, 又不致耗占过多的计算机内存和机时。

文献[2、3]采用方块脉冲函数取代沃尔什函数来分析线性系统, 为较好地解决以上两个问题提供了可能性。但这两篇文章都只限于对线性时不变系统作了具体的研究, 而对于线性时变系统的状态方程求解以及最优反馈控制规律的确定, 则未给出可供实用的具体结果。

本文在文献[2、3]的基础上, 沿用方块脉冲函数, 与文献[1]的研究工作平行地, 对线性时变系统状态方程的分段恒定解答和二次型性能指标下最优反馈增益的分段恒定解答, 都导出了形式简明、便于应用的递推算法, 并且子区间分段数 m 可以选取任意整数。

二、方块脉冲函数的运算性质

图 1a 示有在区间 $t = 0-T$ 中包含 m 个分量的方块脉冲函数族, 其表达式为

$$\Pi_k(t) = \begin{cases} 1, & (k-1)T/m \leq t < kT/m \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (1)$$

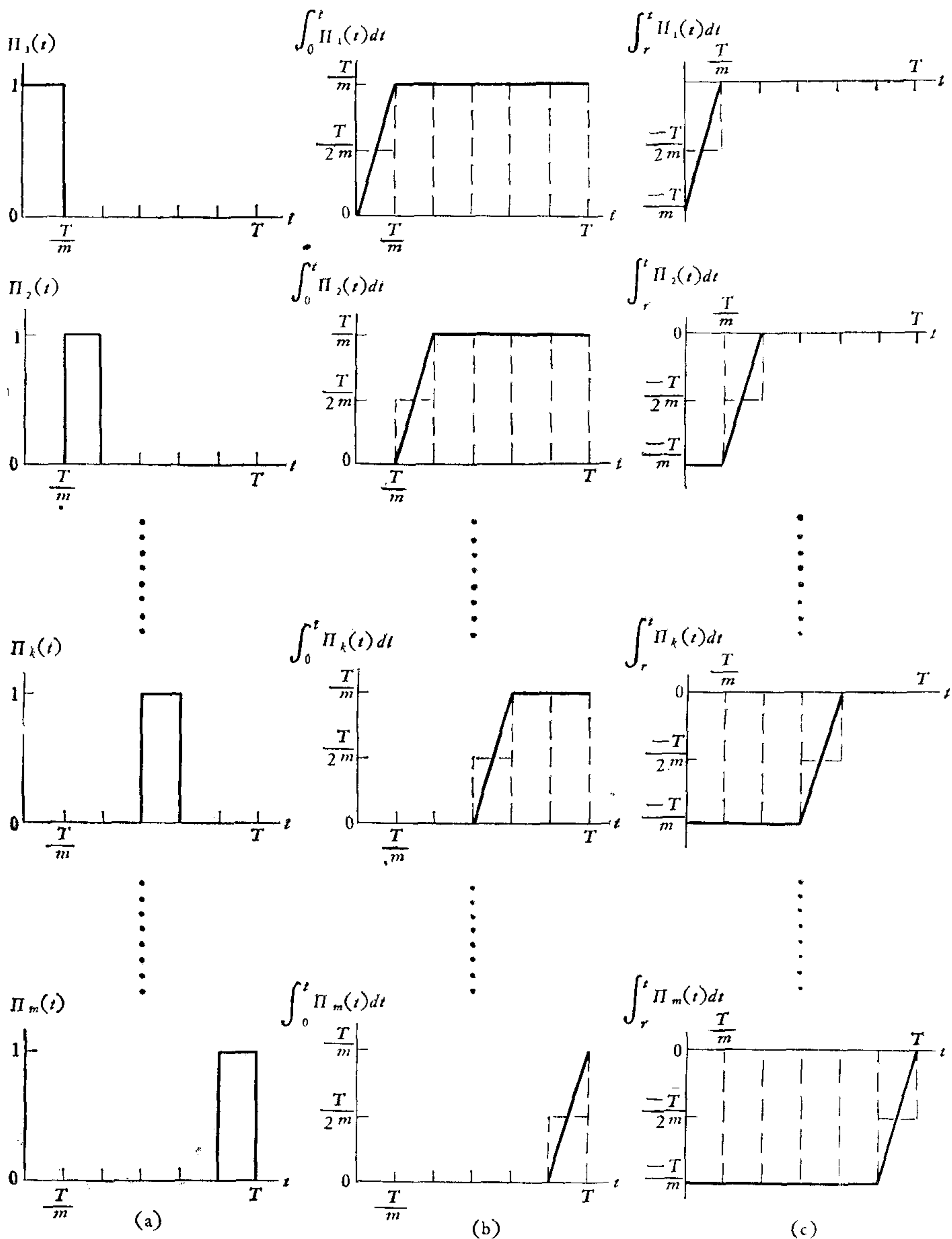


图 1 包含 m 个分量的方块脉冲函数族 (a) 及其积分函数族 (b) 和反向积分函数族 (c)

很容易看出, 方块脉冲函数具有如下脱关性

$$\Pi_k(t)\Pi_j(t) = \begin{cases} \Pi_k(t), & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (2)$$

由此可引出方块脉冲函数的正交性如下

$$\int_0^T \Pi_k(t)\Pi_j(t) dt = \begin{cases} T/m, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (3)$$

利用这种正交性不难证明，图 2 所示在 $t = 0-T$ 区间上绝对可积的任意函数 $c(t)$ 均可用方块脉冲函数族近似地展开为

$$c(t) \cong \sum_{k=1}^m c_k \Pi_k(t) = \mathbf{c}^T \Pi_{(m)}(t) = \Pi_{(m)}^T(t) \mathbf{c}. \quad (4)$$

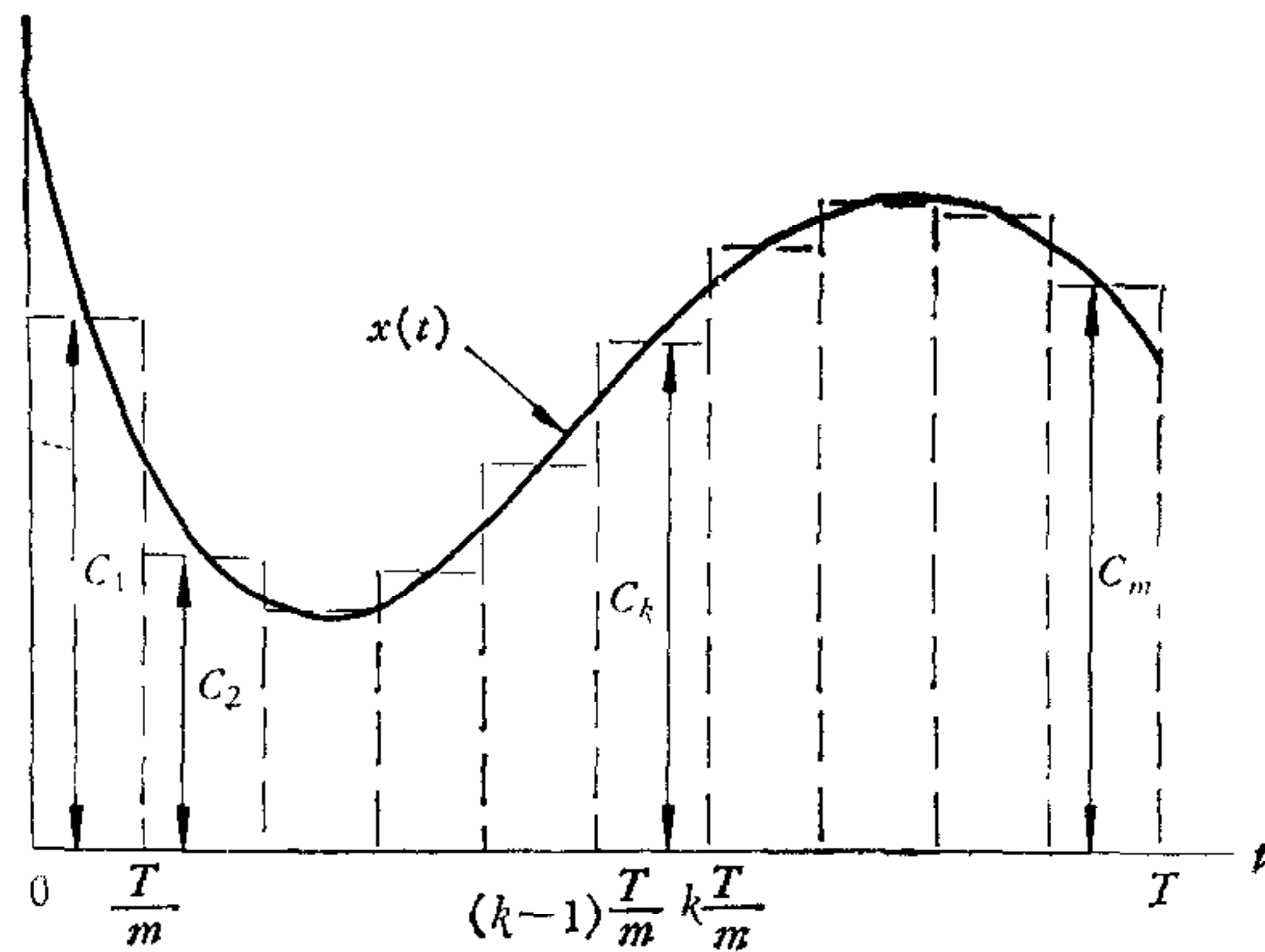


图 2 任意函数 $c(t)$ 用方块脉冲函数族近似展开

式中

$$\Pi_{(m)}(t) = [\Pi_1(t), \Pi_2(t), \dots, \Pi_m(t)]^T \quad (5)$$

为 m 维方块脉冲函数向量，符号“ T ”表示转置。

c_k 为第 k 个分量 $\Pi_k(t)$ 的系数

$$c_k = \frac{m}{T} \int_0^T c(t) \Pi_k(t) dt = \frac{m}{T} \int_{(k-1)T/m}^{kT/m} c(t) dt. \quad (6)$$

实际上是 $c(t)$ 在第 k 个子区间 $[(k-1)T/m, kT/m)$ 上的平均值。当 T/m 很小时有

$$c_k \cong \frac{1}{2} \{c[(k-1)T/m] + c(kT/m)\}, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

\mathbf{c} 称作 $c(t)$ 的系数向量

$$\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_m]^T. \quad (8)$$

显然，若 $c(t) = 1, 0 \leq t < T$ ，则

$$1 = \Pi_1(t) + \Pi_2(t) + \dots + \Pi_m(t) = [1, 1, \dots, 1]_{1 \times m} \Pi_{(m)}(t) = \mathbf{a} \Pi_{(m)}(t). \quad (9)$$

即此时有

$$\mathbf{c}^T = [1, 1, \dots, 1]_{1 \times m} = \mathbf{a}. \quad (10)$$

图 1(b) 示有各方块脉冲函数分量由 0 到 t 的积分函数族 $\int_0^t \Pi_k(t) dt, k = 1, 2, \dots, m$ 。若在第 k 个子区间中曲线 $\int_0^t \Pi_k(t) dt$ 上的斜坡用高度为 $T/2m$ 的方块脉冲近似代替(如图中虚线所示)，则不难得出如下矩阵关系式

$$\int_0^t \Pi_{(m)}(t) dt \cong \frac{T}{m} H \Pi_{(m)}(t), \quad 0 \leq t < T \quad (11)$$

式中 H 为 $m \times m$ 方阵，其逆 H^{-1} 存在

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad H^{-1} = 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & \cdots & (-1)^{m-2} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 2 \\ \mathbf{0} & & & \ddots & -2 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

类似地,可对图 1(c) 中所示各个方块脉冲函数分量由 T 到 t 的反向积分函数族

$$\int_T^t \Pi_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \cdots, m,$$

得出

$$\int_T^t \Pi_{(m)}(t) dt \cong -\frac{T}{m} P \Pi_{(m)}(t), \quad (13)$$

式中 P 为 $m \times m$ 方阵,其逆 P^{-1} 也存在,即

$$P = H^T, \quad P^{-1} = (H^{-1})^T \quad (14)$$

比较图 1(b) 和图 1(c) 不难看出

$$\int_T^t \Pi_k(t) dt = \int_0^t \Pi_k(t) dt - \frac{T}{m}, \quad k = 1, 2, \cdots, m \quad (15)$$

由 (2) 式知

$$\Pi_k(t) \Pi_{(m)}^T(t) = [0, \cdots, 0, \Pi_k(t), 0, \cdots, 0]_{1 \times m}, \quad (16)$$

故又有

$$\Pi_k(t) \Pi_{(m)}^T(t) \mathbf{c} = c_k \Pi_k(t). \quad (17)$$

若称方块脉冲函数向量 $\Pi_{(m)}(t)$ 与其转置向量 $\Pi_{(m)}^T(t)$ 之乘积为乘积矩阵 $\Pi_{(m \times m)}(t)$, 则不难推知

$$\Pi_{(m \times m)}(t) = \Pi_{(m)}(t) \Pi_{(m)}^T(t) = \text{diag} [\Pi_1(t), \Pi_2(t), \cdots, \Pi_m(t)]. \quad (18)$$

式中符号“diag”表示对角阵。

乘积矩阵的一个重要性质是

$$\begin{bmatrix} \Pi_1(t) & & & \\ & \Pi_2(t) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \Pi_{(m)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_1(t) \\ \Pi_2(t) \\ \vdots \\ \Pi_m(t) \end{bmatrix} \quad (19)$$

或

$$\Pi_{(m \times m)}(t) \mathbf{c} = C \Pi_{(m)}(t) \quad (19)'$$

式中 \mathbf{c} 称为对应于系数向量 \mathbf{c} 的 $m \times m$ 系数矩阵

$$C = \text{diag} [c_1, c_2, \cdots, c_m]. \quad (20)$$

三、线性时变系统状态方程的求解

现考虑一个由状态方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t) \mathbf{x}(t) + B(t) \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t)|_{t=0} = \mathbf{x}(0) \quad (21)$$

所描述的线性时变系统。式中 $\mathbf{x}(t) = [x_i(t)]_{n \times 1}$ 为状态向量, $\mathbf{u}(t) = [u_i(t)]_{r \times 1}$ 为输

入向量, $A(t) = [a_{ij}(t)]_{n \times n}$ 和 $B(t) = [b_{ij}(t)]_{n \times r}$ 为时变矩阵, $\mathbf{x}(0) = [x_{1(0)}, x_{2(0)}, \dots, x_{n(0)}]^T$ 为初值向量.

设 $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$, $A(t)$ 和 $B(t)$ 中的所有元素 $x_i(t)$, $u_i(t)$, $a_{ij}(t)$ 和 $b_{ij}(t)$ 在时间区间 $[0, T)$ 中都是绝对可积的, 则由方块脉冲函数逼近法可得

$$\begin{cases} x_i(t) \cong \sum_{k=1}^m x_{ik} \Pi_k(t) = \mathbf{x}_i^T \Pi_{(m)}(t) = \Pi_{(m)}^T(t) \mathbf{x}_i, \\ \mathbf{x}_i^T = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}], \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} u_i(t) \cong \sum_{k=1}^m u_{ik} \Pi_k(t) = \mathbf{u}_i^T \Pi_{(m)}(t) = \Pi_{(m)}^T(t) \mathbf{u}_i, \\ \mathbf{u}_i^T = [u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{im}], \quad i = 1, 2, \dots, r \end{cases} \quad (23)$$

$$a_{ij}(t) \cong \sum_{k=1}^m a_{ij,k} \Pi_k(t), \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (24)$$

$$b_{ij}(t) \cong \sum_{k=1}^m b_{ij,k} \Pi_k(t), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (25)$$

于是进一步有

$$\mathbf{x}(t) = [x_i(t)]_{n \times 1} \cong [\Pi_{(m)}^T(t) \mathbf{x}_i]_{n \times 1} = [\mathbf{x}_i^T \Pi_{(m)}(t)]_{n \times 1} \quad (26)$$

$$= [\bar{\mathbf{x}}_1 : \bar{\mathbf{x}}_2 : \dots : \bar{\mathbf{x}}_m] \Pi_{(m)}(t) = \sum_{k=1}^m \bar{\mathbf{x}}_k \Pi_k(t) \quad (27)$$

$$\mathbf{u}(t) = [u_i(t)]_{r \times 1} \cong [\Pi_{(m)}^T(t) \mathbf{u}_i]_{r \times 1} = [\mathbf{u}_i^T \Pi_{(m)}(t)]_{r \times 1} \quad (28)$$

$$= (\bar{\mathbf{u}}_1 : \bar{\mathbf{u}}_2 : \dots : \bar{\mathbf{u}}_m) \Pi_{(m)}(t) = \sum_{k=1}^m \bar{\mathbf{u}}_k \Pi_k(t). \quad (29)$$

在 (27) 和 (29) 式中

$$\bar{\mathbf{x}}_k = [x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}]^T, \quad \bar{\mathbf{u}}_k = [u_{1k}, u_{2k}, \dots, u_{rk}]^T$$

分别为 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{u}(t)$ 在子区间 $[(k-1)T/m, kT/m)$ 中的平均值向量. 类似地还有

$$A(t) = [a_{ij}(t)]_{n \times n} \cong \sum_{k=1}^m \bar{A}_k \Pi_k(t), \quad (30)$$

$$B(t) = [b_{ij}(t)]_{n \times r} \cong \sum_{k=1}^m \bar{B}_k \Pi_k(t). \quad (31)$$

上二式中 $\bar{A}_k = [a_{ij,k}]_{n \times n}$, $\bar{B}_k = [b_{ij,k}]_{n \times r}$ 分别为 $A(t)$ 和 $B(t)$ 在第 k 个子区间 $[(k-1)T/m, kT/m)$ 中的平均值矩阵.

将 (21) 式由 0 到 t 进行积分, 得出

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0) = \int_0^t A(t') \mathbf{x}(t') dt' + \int_0^t B(t') \mathbf{u}(t') dt'. \quad (32)$$

再将 (26) — (31) 式代入上式, 并利用 (9), (17) 式得

$$\begin{aligned} & [\bar{\mathbf{x}}_1 : \bar{\mathbf{x}}_2 : \dots : \bar{\mathbf{x}}_m] \Pi_{(m)}(t) - [\mathbf{x}(0) : \mathbf{x}(0) : \dots : \mathbf{x}(0)] \Pi_{(m)}(t) \\ & \cong \int_0^t \sum_{k=1}^m \{ \bar{A}_k \Pi_k(t') [\Pi_{(m)}^T(t') \mathbf{x}_i]_{n \times 1} \} dt' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \sum_{k=1}^m \{ \bar{B}_k \Pi_k(t') [\Pi_{(m)}(t') \mathbf{u}_i]_{r \times 1} \} dt' \\
& = \int_0^t \sum_{k=1}^m [\bar{A}_k \bar{\mathbf{x}}_k \Pi_k(t')] dt' + \int_0^t \sum_{k=1}^m [\bar{B}_k \bar{\mathbf{u}}_k \Pi_k(t')] dt' \\
& = \int_0^t [\bar{A}_1 \bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{B}_1 \bar{\mathbf{u}}_1; \bar{A}_2 \bar{\mathbf{x}}_2 + \bar{B}_2 \bar{\mathbf{u}}_2; \cdots; \bar{A}_m \bar{\mathbf{x}}_m + \bar{B}_m \bar{\mathbf{u}}_m] \Pi_{(m)}(t') dt' \\
& \cong \frac{T}{m} [\bar{A}_1 \bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{B}_1 \bar{\mathbf{u}}_1; \bar{A}_2 \bar{\mathbf{x}}_2 + \bar{B}_2 \bar{\mathbf{u}}_2; \cdots; \bar{A}_m \bar{\mathbf{x}}_m + \bar{B}_m \bar{\mathbf{u}}_m] H \Pi_{(m)}(t).
\end{aligned}$$

上式对区间 $[0, T)$ 中的所有 t 值都能满足, 因此有

$$\begin{aligned}
& \frac{m}{T} [\bar{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{x}_{(0)}; \bar{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{x}_{(0)}; \cdots; \bar{\mathbf{x}}_m - \mathbf{x}_{(0)}] H^{-1} \\
& = [\bar{A}_1 \bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{B}_1 \bar{\mathbf{u}}_1; \bar{A}_2 \bar{\mathbf{x}}_2 + \bar{B}_2 \bar{\mathbf{u}}_2; \cdots; \bar{A}_m \bar{\mathbf{x}}_m + \bar{B}_m \bar{\mathbf{u}}_m] \quad (33)
\end{aligned}$$

将 (12) 式代入上式后可得出下列关系

$$\begin{cases}
\frac{2m}{T} [\bar{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{x}_{(0)}] = \bar{A}_1 \bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{B}_1 \bar{\mathbf{u}}_1, \\
\frac{2m}{T} [\bar{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{x}_{(0)} - 2(\bar{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{x}_{(0)})] = \bar{A}_2 \bar{\mathbf{x}}_2 + \bar{B}_2 \bar{\mathbf{u}}_2, \\
\frac{2m}{T} [\bar{\mathbf{x}}_3 - \mathbf{x}_{(0)} - 2(\bar{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{x}_{(0)}) + 2(\bar{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{x}_{(0)})] = \bar{A}_3 \bar{\mathbf{x}}_3 + \bar{B}_3 \bar{\mathbf{u}}_3, \\
\cdots \cdots \cdots \\
\frac{2m}{T} [\bar{\mathbf{x}}_m - \mathbf{x}_{(0)} - 2(\bar{\mathbf{x}}_{m-1} - \mathbf{x}_{(0)}) + \cdots + (-1)^{m-1} 2(\bar{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{x}_{(0)})] = \bar{A}_m \bar{\mathbf{x}}_m + \bar{B}_m \bar{\mathbf{u}}_m.
\end{cases}$$

最后可归纳出 $\bar{\mathbf{x}}_k$, $k = 1, 2, \cdots, m$ 的递推算式如下

$$\begin{cases}
\bar{\mathbf{x}}_1 = \left[\frac{2m}{T} I_n - \bar{A}_1 \right]^{-1} \left[\frac{2m}{T} \mathbf{x}_{(0)} + \bar{B}_1 \bar{\mathbf{u}}_1 \right], \\
\bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \left[\frac{2m}{T} I_n - \bar{A}_{k+1} \right]^{-1} \left\{ \left[\frac{2m}{T} I_n + \bar{A}_k \right] \bar{\mathbf{x}}_k + \bar{B}_k \bar{\mathbf{u}}_k + \bar{B}_{k+1} \bar{\mathbf{u}}_{k+1} \right\}.
\end{cases} \quad (34)$$

式中 I_n 为 $n \times n$ 单位矩阵.

附带指出, 时不变系统相当于 $\bar{A}_1 = \bar{A}_2 = \cdots = \bar{A}_m$ 和 $\bar{B}_1 = \bar{B}_2 = \cdots = \bar{B}_m$ 的特例. 不难验证, 这时 (34) 式所引出的结果与文献 [3] 是一致的.

例 1. 一时变系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_{1(0)} \\ x_{2(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

求 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 在区间 $[0, 1)$ 中的分段恒定解答.

解. 按给定条件知 $n = 2$, $T = 1$, $B(t) = 0$, 而

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

取 $m = 4$, 则在区间 $[0, 1)$ 中有

$$t = \frac{1}{8} \Pi_1(t) + \frac{3}{8} \Pi_2(t) + \frac{5}{8} \Pi_3(t) + \frac{7}{8} \Pi_4(t),$$

于是得

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{5}{8} & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{7}{8} & 0 \end{bmatrix},$$

因 $\bar{B}_1 = \bar{B}_2 = \bar{B}_3 = \bar{B}_4 = 0$ ，按 (34) 式可得

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \left[\frac{2m}{T} I_n - \bar{A}_1 \right]^{-1} \frac{2m}{T} x_{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.0156 \end{bmatrix},$$

$$\bar{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \left[\frac{2m}{T} I_n - \bar{A}_2 \right]^{-1} \left[\frac{2m}{T} I_n + \bar{A}_1 \right] \bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.0782 \end{bmatrix},$$

同样可得

$$\bar{x}_3 = \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2031 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_4 = \begin{bmatrix} x_{14} \\ x_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.3906 \end{bmatrix}.$$

故有

$$x_1(t) = x_{11}\Pi_1(t) + x_{12}\Pi_2(t) + x_{13}\Pi_3(t) + x_{14}\Pi_4(t) = \sum_{k=1}^4 \Pi_k(t) = 1,$$

$$x_2(t) = x_{21}\Pi_1(t) + x_{22}\Pi_2(t) + x_{23}\Pi_3(t) + x_{24}\Pi_4(t) \\ = 1.0156\Pi_1(t) + 1.0782\Pi_2(t) + 1.2031\Pi_3(t) + 1.3906\Pi_4(t).$$

图 3 中示有上述近似解与精确解的对比情况。可以看出，即使选用 $m = 4$ ，所得结果也是令人满意的。若 m 值选得再大些，结果还会更好。

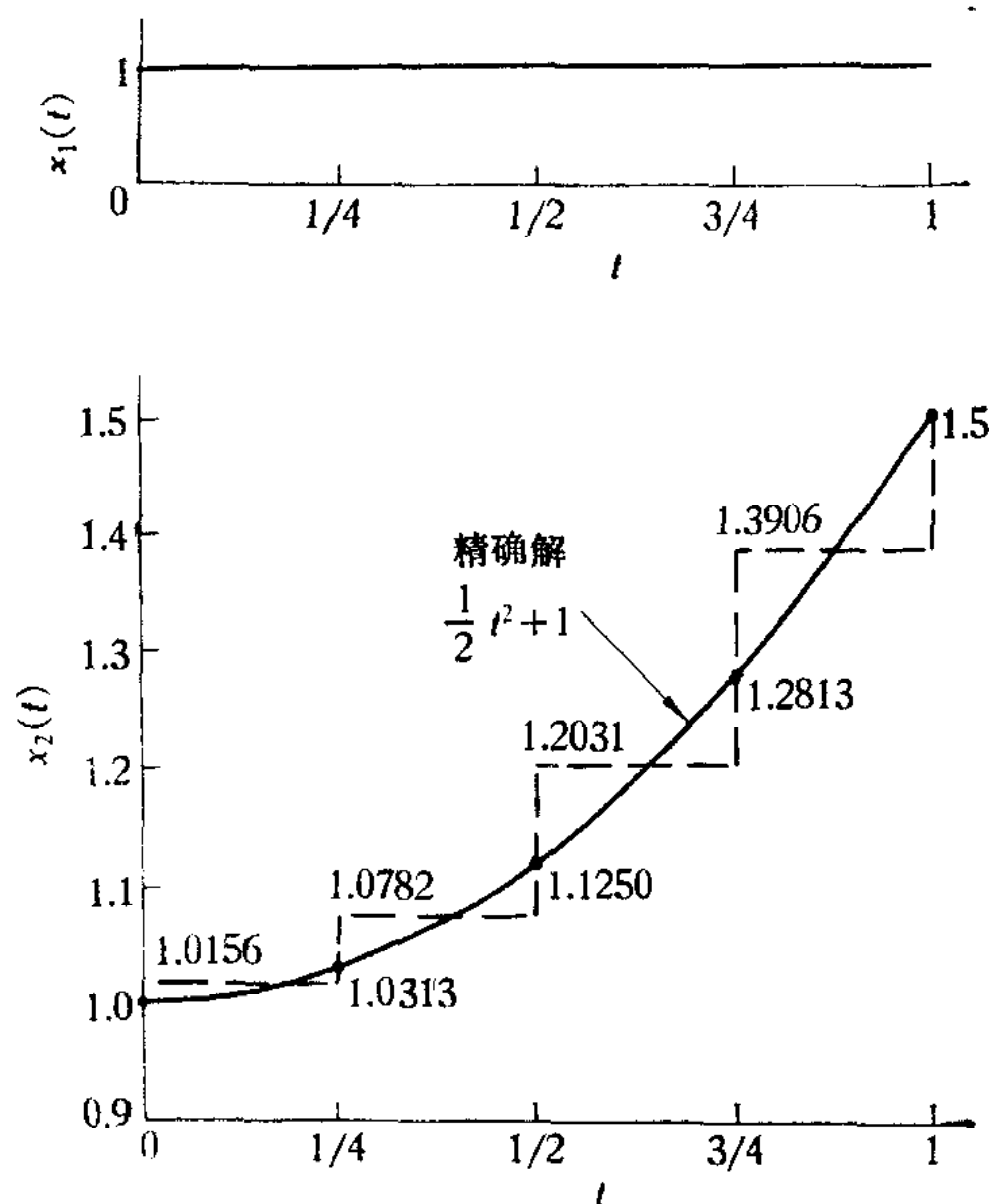


图 3 线性时变系统状态方程的方块脉冲函数逼近法所得近似解

四、最优反馈控制规律的确定

下面研究 (21) 式描述的线性时变系统按二次型性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\mathbf{x}^T(t)Q(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)R(t)\mathbf{u}(t)] dt \quad (35)$$

为最小的要求,进行最优控制的问题。式中 $Q(t)$ 为 $n \times n$ 正半定矩阵, $R(t)$ 为 $r \times r$ 正定矩阵, t_f 为控制终止时间。如所周知,最优控制变量为^[4]

$$\mathbf{u}(t) = R^{-1}(t)B^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t). \quad (36)$$

式中 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ 为 $n \times 1$ 向量,满足规范方程

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) \end{bmatrix} = F(t) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} \mathbf{x}(t)|_{t=0} = \mathbf{x}(0) \\ \boldsymbol{\lambda}(t)|_{t=t_f} = \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (37)$$

在此 $F(t)$ 为 $2n \times 2n$ 方阵,可由给定的 $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$ 和 $R(t)$ 推出:

$$F(t) = \begin{bmatrix} A(t) & B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix}_{2n \times 2n}. \quad (38)$$

设 (37) 式的状态转移矩阵为

$$\Psi(t_f, t) = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(t_f, t) & \Psi_{12}(t_f, t) \\ \Psi_{21}(t_f, t) & \Psi_{22}(t_f, t) \end{bmatrix}_{2n \times 2n}, \quad \Psi(t_f, t_f) = I_{2n} \quad (39)$$

则由关系式

$$\Psi(t_f, t) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_f) \\ \boldsymbol{\lambda}(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_f) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (40)$$

可推知

$$\Psi_{21}(t_f, t)\mathbf{x}(t) + \Psi_{22}(t_f, t)\boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{0},$$

故有

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = -\Psi_{22}^{-1}(t_f, t)\Psi_{21}(t_f, t)\mathbf{x}(t). \quad (41)$$

将上式代入 (36) 式中得最优反馈控制规律为

$$\mathbf{u}(t) = -K(t)\mathbf{x}(t). \quad (42)$$

式中 $K(t)$ 为 $r \times n$ 时变反馈增益矩阵。

$$K(t) = R^{-1}(t)B^T(t)\Psi_{22}^{-1}(t_f, t)\Psi_{21}(t_f, t). \quad (43)$$

由于 $R(t)$ 和 $B(t)$ 已给定,只要再求出 $\Psi_{21}(t_f, t)$ 和 $\Psi_{22}(t_f, t)$,即可确定 $K(t)$ 。为此,将 (40) 式两边对 t 微分,可得

$$\frac{d}{dt} \left\{ \Psi(t_f, t) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} \right\} = \Psi(t_f, t) \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) \end{bmatrix} + \dot{\Psi}(t_f, t) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

再利用 (37) 式得

$$\dot{\Psi}(t_f, t) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} = -\Psi(t_f, t) \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) \end{bmatrix} = -\Psi(t_f, t)F(t) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix}. \quad (44)$$

上式对于区间 $[0, t_f)$ 中的所有 t 值均成立,故有

$$\dot{\Psi}(t_f, t) = -\Psi(t_f, t)F(t), \quad \Psi(t_f, t_f) = I_{2n} \quad (45)$$

对上式由 t_f 到 t 作反向积分,可得

$$I_{2n} - \Psi(t_f, t) = \int_t^{t_f} \Psi(t_f, t')F(t')dt'. \quad (46)$$

若 $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ 的所有元素 $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $q_{ij}(t)$, $r_{ij}(t)$ 在区间 $[0, t_f)$ 中

都是绝对可积的, 则 $\Psi(t_f, t)$ 和 $F(t)$ 的所有元素 $\psi_{ij}(t)$ 和 $f_{ij}(t)$ 一般也是在区间 $[0, t_f)$ 中绝对可积的。这时, 取 $T = t_f$, 则可得 $\Psi(t_f, t)$ 和 $F(t)$ 的方块脉冲函数近似展开式为

$$\Psi(t_f, t) \cong [\phi_{ij}^r \Pi_{(m)}(t)]_{2n \times 2n}, \quad (47)$$

$$F(t) \cong [f_{ij}^r \Pi_{(m)}(t)]_{2n \times 2n} = [\Pi_{(m)}^r(t) f_{ij}]. \quad (48)$$

式中 $\phi_{ij}^r = [\phi_{ij1} \phi_{ij2} \cdots \phi_{ijm}]$ 和 $f_{ij}^r = [f_{ij1} f_{ij2} \cdots f_{ijm}]$, $i, j = 1, 2, \cdots, 2n$ 分别为矩阵 $\Psi(t_f, t) = [\psi_{ij}(t)]_{2n \times 2n}$ 和 $F(t) = [f_{ij}(t)]_{2n \times 2n}$ 中元素 $\psi_{ij}(t)$ 和 $f_{ij}(t)$ 的系数向量。由 (47), (48) 式又有

$$\begin{aligned} \Psi(t_f, t)F(t) &= \left[\sum_{l=1}^{2n} \phi_{il}^r \Pi_{(m \times m)}(t) f_{lj} \right]_{2n \times 2n} \\ &= \left[\sum_{l=1}^{2n} \phi_{il}^r F_{lj} \Pi_{(m)}(t) \right]_{2n \times 2n}, \quad i \downarrow j = 1, 2, \cdots, 2n \end{aligned} \quad (49)$$

式中 F_{lj} 为对应于系数向量 f_{lj} 的 $m \times m$ 系数矩阵

$$F_{lj} = \text{diag} [f_{lj1}, f_{lj2}, \cdots, f_{ljm}]. \quad (50)$$

将 (47), (48), (49) 三式代入 (46) 式中, 并利用 (9), (13) 二式可得:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \alpha \Pi_{(m)}(t) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha \Pi_{(m)}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Psi_{11}^r \Pi_{(m)}(t) & \Psi_{12}^r \Pi_{(m)}(t) & \cdots & \Psi_{1,2n}^r \Pi_{(m)}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Psi_{2n,1}^r \Pi_{(m)}(t) & \Psi_{2n,2}^r \Pi_{(m)}(t) & \cdots & \Psi_{2n,2n}^r \Pi_{(m)}(t) \end{bmatrix} \\ &= -\frac{T}{m} \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^{2n} \Psi_{1l}^r F_{l1} P \Pi_{(m)}(t) & \sum_{l=1}^{2n} \Psi_{1l}^r F_{l2} P \Pi_{(m)}(t) & \cdots & \sum_{l=1}^{2n} \Psi_{1l}^r F_{l,2n} P \Pi_{(m)}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{l=1}^{2n} \Psi_{2n,l}^r F_{l1} P \Pi_{(m)}(t) & \sum_{l=1}^{2n} \Psi_{2n,l}^r F_{l2} P \Pi_{(m)}(t) & \cdots & \sum_{l=1}^{2n} \Psi_{2n,l}^r F_{l,2n} P \Pi_{(m)}(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

上式对区间 $[0, T)$ 中的所有 t 均满足, 故

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \alpha P^{-1} & & & 0 \\ & \alpha P^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha P^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Psi_{11}^r P^{-1} & \Psi_{12}^r P^{-1} & \cdots & \Psi_{1,2n}^r P^{-1} \\ \Psi_{21}^r P^{-1} & \Psi_{22}^r P^{-1} & \cdots & \Psi_{2,2n}^r P^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Psi_{2n,1}^r P^{-1} & \Psi_{2n,2}^r P^{-1} & \cdots & \Psi_{2n,2n}^r P^{-1} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{T}{m} \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^{2n} \Psi_{1l}^r F_{l1} & \sum_{l=1}^{2n} \Psi_{1l}^r F_{l2} & \cdots & \sum_{l=1}^{2n} \Psi_{1l}^r F_{l,2n} \\ \sum_{l=1}^{2n} \Psi_{2l}^r F_{l1} & \sum_{l=1}^{2n} \Psi_{2l}^r F_{l2} & \cdots & \sum_{l=1}^{2n} \Psi_{2l}^r F_{l,2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{l=1}^{2n} \Psi_{2n,l}^r F_{l1} & \sum_{l=1}^{2n} \Psi_{2n,l}^r F_{l2} & \cdots & \sum_{l=1}^{2n} \Psi_{2n,l}^r F_{l,2n} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由上式可归纳出以下关系式

$$\begin{cases} \Psi_{ij}^{\tau P^{-1}} = \frac{T}{m} \sum_{l=1}^{2n} \Psi_{il}^{\tau} F_{lj}, & i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, 2n \\ \alpha P^{-1} - \Psi_{ii}^{\tau P^{-1}} = -\frac{T}{m} \sum_{l=1}^{2n} \Psi_{il}^{\tau} F_{li}, & i = 1, 2, \dots, 2n \end{cases} \quad (51)$$

将 (10), (14) 二式代入上式, 并比较各式等号两边对应项, 可得递推关系

$$\begin{cases} \phi_{ijm} = \begin{cases} \frac{T}{2m} \sum_{l=1}^{2n} \phi_{ilm} f_{lij}, & i \neq j \\ 1 + \frac{T}{2m} \sum_{l=1}^{2n} \phi_{ilm} f_{lim}, & i = j \end{cases} \\ \phi_{ij, k-1} = \phi_{ijk} + \frac{T}{2m} \sum_{l=1}^{2n} (\phi_{ilk} f_{ljk} + \phi_{il, k-1} f_{lj, k-1}). \\ i, j = 1, 2, \dots, 2n; k = 2, 3, \dots, m-1 \end{cases} \quad (52)$$

由上式可进一步引出关系式

$$\begin{cases} \bar{\Psi}_m = I_{2n} + \frac{T}{2m} \bar{\Psi}_m \bar{F}_m, \\ \bar{\Psi}_{k-1} = \bar{\Psi}_k + \frac{T}{2m} [\bar{\Psi}_k \bar{F}_k + \bar{\Psi}_{k-1} \bar{F}_{k-1}], & k = m, m-1, \dots, 2 \end{cases} \quad (53)$$

式中

$$\bar{\Psi}_k = [\phi_{ij, k}]_{2n \times 2n} = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{11, k} & \bar{\Psi}_{12, k} \\ \bar{\Psi}_{21, k} & \bar{\Psi}_{22, k} \end{bmatrix}_{2n \times 2n}, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$\bar{F}_k = [f_{ij, k}]_{2n \times 2n}, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

分别为

$$\Psi(t_f, t) = [\phi_{ij}(t)]_{2n \times 2n} = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(t_f, t) & \Psi_{12}(t_f, t) \\ \Psi_{21}(t_f, t) & \Psi_{22}(t_f, t) \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$$

和 $F(t) = [f_{ij}(t)]_{2n \times 2n}$ 在第 k 个子区间 $[(k-1)T/m, kT/m)$ 中的平均值矩阵。

若已知第 k 个子区间 $[(k-1)T/m, kT/m)$ 中 $A(t)$, $B(t)$ 的平均值矩阵 $\bar{A}_k = [a_{ij, k}]_{n \times n}$, $\bar{B}_k = [b_{ij, k}]_{n \times r}$, 以及 $Q(t)$, $R(t)$ 的平均值矩阵如下

$$\bar{Q}_k = [q_{ij, k}]_{n \times n}, \quad \bar{R}_k = [r_{ij, k}]_{r \times r}, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

式中 $q_{ij, k}$ 和 $r_{ij, k}$ 分别为 $Q(t)$ 和 $R(t)$ 中的元素 $q_{ij}(t)$ 和 $r_{ij}(t)$ 在第 k 个子区间 $[(k-1)T/m, kT/m)$ 中的平均值。则利用式 (2) 所示的脱关性不难推知

$$\bar{F}_k = \begin{bmatrix} \bar{A}_k & \bar{B}_k \bar{R}_k^{-1} \bar{B}_k^{\tau} \\ \bar{Q}_k & -\bar{A}_k \end{bmatrix}_{2n \times 2n}, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (54)$$

由 (53) 式最后可得出求解 $\bar{\Psi}_k$, $k = 1, 2, \dots, m$ 的递推算法如下

$$\begin{cases} \bar{\Psi}_m = \left[I_{2n} - \frac{T}{2m} \bar{F}_m \right]^{-1}, \\ \bar{\Psi}_{k-1} = \bar{\Psi}_k \left[I_{2n} + \frac{T}{2m} \bar{F}_k \right] \left[I_{2n} - \frac{T}{2m} \bar{F}_{k-1} \right]^{-1}. \end{cases} \quad (55)$$

再次利用脱关性可得最佳反馈增益矩阵的分段恒定近似解如下

$$\begin{aligned}
K(t) &= R^{-1}(t)B^T(t)\Psi_{22}^{-1}(t)\Psi_{21}(t) \\
&\cong \left[\sum_{k=1}^m \bar{R}_k^{-1}\Pi_k(t) \right] \left[\sum_{l=1}^m \bar{B}_l^T\Pi_l(t) \right] \\
&\quad \cdot \left[\sum_{i=1}^m \bar{\Psi}_{22i}^{-1}\Pi_i(t) \right] \left[\sum_{j=1}^m \bar{\Psi}_{21j}\Pi_j(t) \right] \\
&= \sum_{k=1}^m \bar{R}_k^{-1}\bar{B}_k^T\bar{\Psi}_{22k}^{-1}\bar{\Psi}_{21k}\Pi_k(t)
\end{aligned} \tag{56}$$

例 2. 一线性时变系统

$$\dot{x}(t) = tx(t) + u(t), \quad x(t)|_{t=0} = x(0) = 1$$

具有二次型性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 [x^2(t) + u^2(t)] dt,$$

求最优反馈控制增益 $K(t)$.

解. 按给定条件知 $n = 1$, $t_f = 1$, $A(t) = t$, $B(t) = 1$, $Q(t) = 1$, $R(t) = 1$, 故由(38)式

$$F(t) = \begin{bmatrix} A(t) & B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & -t \end{bmatrix}$$

取 $T = t_f = 1$, $m = 4$, 则 $T/2m = 1/8$,

$$\bar{F}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}, \quad \bar{F}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & 1 \\ 1 & -\frac{3}{8} \end{bmatrix}, \quad \bar{F}_3 = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & 1 \\ 1 & -\frac{5}{8} \end{bmatrix}, \quad \bar{F}_4 = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} & 1 \\ 1 & -\frac{7}{8} \end{bmatrix}.$$

由(55)式有

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}_m &= \bar{\Psi}_4 = \left[I_{2n} - \frac{T}{2m} \bar{F}_m \right]^{-1} = \left[I_2 - \frac{1}{8} \bar{F}_4 \right]^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{57}{64} & \frac{-1}{8} \\ -1 & \frac{71}{64} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1410 & 0.1285 \\ 0.1285 & 0.9160 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{11,4} & \bar{\Psi}_{12,4} \\ \bar{\Psi}_{21,4} & \bar{\Psi}_{22,4} \end{bmatrix}, \\
\bar{\Psi}_3 &= \bar{\Psi}_4 \left[I_2 + \frac{1}{8} \bar{F}_4 \right] \left[I_2 - \frac{1}{8} \bar{F}_3 \right]^{-1} \\
&= \bar{\Psi}_4 \begin{bmatrix} \frac{71}{64} & \frac{1}{8} \\ 1 & \frac{57}{64} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{59}{64} & \frac{-1}{8} \\ -1 & \frac{69}{64} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.4423 & 0.4065 \\ 0.3896 & 0.8168 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{11,3} & \bar{\Psi}_{12,3} \\ \bar{\Psi}_{21,3} & \bar{\Psi}_{22,3} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

同样可求得

$$\bar{\Psi}_2 = \begin{bmatrix} 1.7869 & 0.7456 \\ 0.6583 & 0.8448 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{11,2} & \bar{\Psi}_{12,2} \\ \bar{\Psi}_{21,2} & \bar{\Psi}_{22,2} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Psi}_1 = \begin{bmatrix} 2.1484 & 1.1848 \\ 0.9328 & 0.9880 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{11,1} & \bar{\Psi}_{12,1} \\ \bar{\Psi}_{21,1} & \bar{\Psi}_{22,1} \end{bmatrix}.$$

因 $\bar{R}_k = \bar{B}_k = 1$, $k = 1, 2, 3, 4$, 由(56)式可得时变反馈增益为

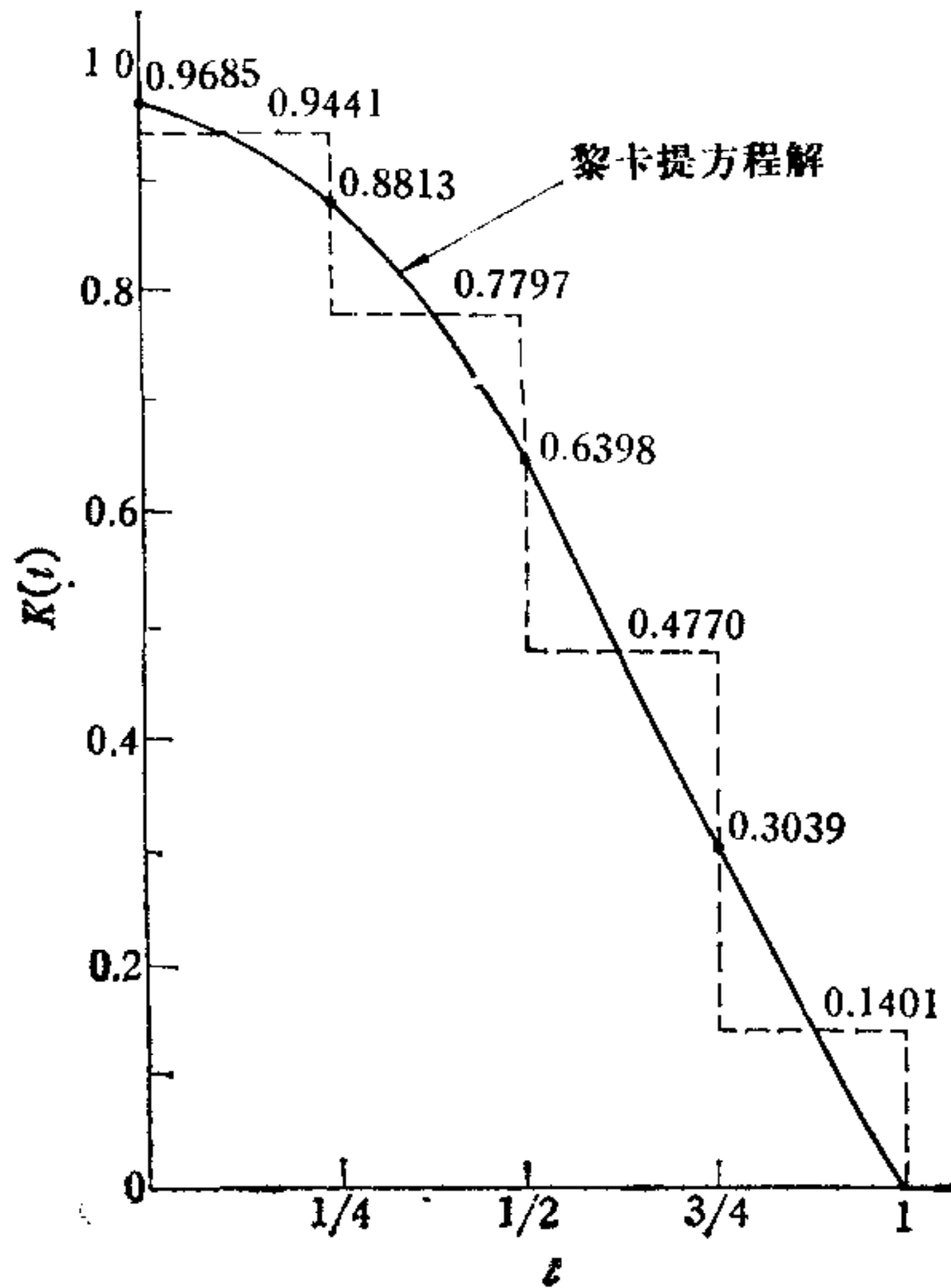


图4 最优反馈增益 $K(t)$ 的方块脉冲函数逼近法所得近似解

$$\begin{aligned} K(t) &= \sum_{k=1}^4 \bar{R}_k^{-1} \bar{B}_k^T \bar{\Psi}_{22k}^{-1} \bar{\Psi}_{21k} \Pi_k(t) \\ &= \frac{\phi_{21,1}}{\phi_{22,1}} \Pi_1(t) + \frac{\phi_{21,2}}{\phi_{22,2}} \Pi_2(t) \\ &\quad + \frac{\phi_{21,3}}{\phi_{22,3}} \Pi_3(t) + \frac{\phi_{21,4}}{\phi_{22,4}} \Pi_4(t) \\ &= \frac{0.9328}{0.9880} \Pi_1(t) + \frac{0.6583}{0.8448} \Pi_2(t) \\ &\quad + \frac{0.3896}{0.8168} \Pi_3(t) + \frac{0.1285}{0.9160} \Pi_4(t) \\ &= 0.9441 \Pi_1(t) + 0.7797 \Pi_2(t) \\ &\quad + 0.4770 \Pi_3(t) + 0.1401 \Pi_4(t). \end{aligned}$$

图4中虚线表示按上式作出的 $K(t)$ 图形¹⁾, 由于增益是分段恒定的, 所以实现起来比较容易。图4中实线表示按相应的黎卡提方程

$$\dot{K}(t) = K^2(t) - 2tK(t) - 1, \quad K(1) = 0$$

得出的精确解答。可以看出, 即使在 $m = 4$ 情况下, 由方块脉冲函数逼近法得出的结果也已是比较令人满意的了。

五、结 束 语

通过本文分析可以看出, 方块脉冲函数作为一种二值正交函数, 具有某些比沃尔什函数更为简便、直观的特点和优良的运算性质。这对于求解线性时变系统状态方程和最优反馈控制规律十分有用, 可使所导出的结果易于化成形式简明的递推算法, 因而应用起来很方便。这一点可以通过本文和文献[1]中两个相同实例计算过程的对比看出。此外, 由于时间区间分段数 m 可以选取任意整数, 不受限于 2、4、8、16、32、……等值, 因而在许多实际场合下方块脉冲函数逼近法有可能采用更恰当的 m 值。以上两个优点均有利于节约计算机内存和机时, 减少运算中的舍入误差, 从而提高计算和控制的精度。

本文写作过程中王发庆、郑维敏两位教授和其他同志给予热情指导和鼓励, 谨在此表示深切谢意。

参 考 文 献

- [1] Chen, W. L., Shih, Y. P., Analysis and Optimal Control of Time-varying Linear Systems via Walsh Functions, Int. J. Control, 27(1978), 917—932.
- [2] Sannuti, B. E., Analysis and Synthesis of Dynamic Systems via Block-pulse Functions, Proc. IEE, 124(1977), 569—571.
- [3] Shieh, L. S., Yeung, C. K. & McInnis, B. C., Solution of State-space Equations via Block-pulse

1) 文献[1]的同一例题中, $K(t)$ 的计算结果在第一、二子区间中的取值 1.0124 和 0.7326 是错误的

Functions, *Int. J. Control*, 28(1978), 383—392.

[4] Bryson, A. E., Ho, Y. C., *Applied Optimal Control*, John Wiley & Sons, (1975).

ANALYSIS AND OPTIMAL CONTROL OF TIME-VARYING LINEAR SYSTEMS USING BLOCK-PULSE FUNCTIONS

XU NINGSHOU, ZHENG BING

(*Beijing Polytechnic University*)

ABSTRACT

Some useful operational properties of the block-pulse functions are developed. By applying these properties to the analysis and optimal control of time-varying linear systems with a quadratic performance index, the piecewise constant solutions equally distributed, which are simple in form and convenient for use or implementation, are obtained. Another advantage of this method is that any positive integer can be chosen as the number of sub-intervals, whereas in the case of Walsh function approximation the choice can only be made from 2, 4, 8, 16, 32, and so on. Therefore, in many practical situations computation and control of higher precision can be achieved without expending excessive memory capacity and calculating time. The recursive algorithms of the solutions are illustrated by appropriate examples.