第8卷 第3期 自动化学报 Vol. 8, No. 3
1982年7月 ACTA AUTOMATICA SINICA July 1982

字符方程的拟定

蒋卡林
（中国科学院沈阳自动化研究所）

摘　　要

本文在文[1]所提出的 α 指数技巧的基础上，进一步提出了线条叠切法、切叠法、叠切叠法，应用这些方法建立了字符状图样的单一方程，并说明所有常用字符均可列出其近似的单一方程式．最后指出了叠切叠法在一般工程问题中的应用．

一、引　言

作者在“字符方程初探”[1]一文中曾提出用单一的方程式来描述一简单图案、常用字符或简单的物景轮廓图．这类方程是可以直接编入计算机程序的[1]，从而避免巨量的图象信息储存；便于做到字符图形标准化、精确化；能有效地应用于易混文字的识别，以及不清洁文字和附有花样背景文字的识别．

文[1]只提供了一些字符方程的初步知识．本文是作者进一步研究的结果，说明一切常用字符皆可方程式化．

本文仍采用与文[1]相同的字符区：各字符宽度以四格为限．大写字母高八格，对称于原点．数字比大写字母低一格．小写字母中部加上部与大写字母同高．个别小写字母如 g, j, p, q 等所伸出的腿部规定占二格．

字符方程的拟定主要依靠文[1]所提出的 α 指数技巧．首先定义 $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}2n$，式中 n 代表正整数．

$(x/a)^\alpha+(y/b)^\alpha=1$ 的图形是一个矩形框架，宽 $2a$，高 $2b$．显然，在框架内，$|x|<a$，$(x/a)^\alpha=0$，$|y|<b$，$(y/b)^\alpha=0$，于是，得 $0+0=1$，这不能成立．可见框架内无图形．不难证明，框架外亦无图形，只存在框架本身的图形．边界线为矩形的字符的方程为[1]

$$\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha+\left(\frac{y}{b}\right)^\alpha=\prod_{k=1}^{N}f_k(x,y). \tag{1}$$

二、字符方程的建立

1. 一些不难表达的字符方程

根据文[1]所述矩形字符的一般方程及有关概念，不难导出下列各字符的方程．所用

本文于1981年3月25日收到．

切割法视字符形状而定.

大小写字符 C 和 c. 均可采用双竖线切割法或单圆切割法.

字符 I 和 1. 都比较窄. 其方程可以取 $x^\alpha+(y/3.9)^\alpha$ 为边界函数. 字符 I 的方程式为

$$x^\alpha+(y/3.9)^\alpha=x(y+3.8)(y-3.8), \tag{2}$$

字符 1 的方程式为

$$x^\alpha+(y/3.9)^\alpha=x(y+3.8)(y-3.8-1.4x). \tag{3}$$

有许多字符，如 B, D, H, K, L, P, R, T, 4, 5, 7, b, d, f, h, k, 等，都可以取 $(x/1.9)^\alpha+(y/3.9)^\alpha$ 为边界函数,而显现函数则按需要配置. "5" 的左上一竖可稍许倾斜,可以从一条尖锐的抛物线上切取. 5 和 b, d 的下部可以取抛物线,或者取立方绝对值曲线. f 的一竖居中; h 的一竖偏左. 若要求字符 f 窄一些,则可取

$$(x/1.3)^\alpha \text{ 代替 } (x/1.9)^\alpha.$$

上述字符的某些笔画并未完全切好. 后面将介绍更为理想的切割线(边界线).

2. 一些难表达的字符方程

经过检验后指出，字符难于表达的原因之一是不允许字符左右切齐或上下左右都切齐,如 A, E, F, J, M, 3, ☆, e, G. 这些字符,可以取斜直线或各种曲线为字符边界线.

1) 以一对斜的平行直线为边界线. 例如, J 的边界函数推导如下:

取 (−1, 4), (−2, −4) 两点,按两点式写出左边界线的直线方程:

$$\frac{y-(-4)}{x-(-2)}=\frac{4-(-4)}{-1-(-2)},$$

即

$$(y+4)/(x+2)=8.$$

将这边界线往右平移 3 单位,得右边界线:

$$(y+4)/(x-1)=8.$$

两边界线之间的区域是

$$\begin{cases}(y+4)/(x+2)<8\\(y+4)/(x-1)>8,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}y+4<8x+16\\y+4>8x-8,\end{cases}$$

即

$$|y-8x|<12.$$

于是,可取 $[(y-8x)/12]^\alpha$ 为边界函数之一. 最后,得字符 J 的方程式为:

$$(y/12-2x/3)^\alpha+(y/3.9)^\alpha=(y-3.7)[(x-0.63)(y+4.14)+1]. \tag{4}$$

又如,小写字母 e 的切割也可依靠一对斜的平行线,或者,左方用一条斜直线切,右方用一条抛物线切(方法见后). 大写字母 F 的切割则可依靠一对斜的平行直线和一对平行于纵轴的直线. 这些方程式及其推导从略.

2) 以一对非平行直线为边界线. 例如 A 的边界函线推导如下:

通过点 (0, 4), 作斜率为 ±4 的两直线作为边界线. 其方程式为 $y=4\pm4x$. 二直线所夹的包括原点在内的范围是 $y<4\pm4x$, 即 $-(4-y)<4x<4-y$, 即 $|4x/$

$(4-y)|<1$. 于是,可取 $[4x/(4-y)]^\alpha$ 为边界函数之一,得字符A的方程式为

$$[4x/(4-y)]^\alpha+(y/4)^\alpha=(y+0.8)(y+4x-3.8)(y-4x-3.8). \quad (5)$$

3) 以多条平行直线为边界线．例如，i, j 均可分别用四条平行线作为边界线，可从正双曲线割取,一个往右弯,一个往左弯．两字符上面的点可看成是曲线的一小段．要求在第一、第二平行线之间和第三、第四平行线之间出现图象．这种特性与低通滤波器和带阻滤波器相串接后的特性类似．于是，可写出这种中间出空隙的边界函数，i 和 j 的方程式为：

$$[0.7/(y-1.7)]^\alpha+(y/3.8)^\alpha=(x+0.4)(y+5)-1.4, \quad (6)$$

$$(x/1.8)^\alpha+[0.7/(y-1.7)]^\alpha+[(y+1)/4.8]^\alpha=(x-1)(y+1.4)-1.4. \quad (7)$$

4) 以一条曲线为边界线．例如字符 3 可由两个圆拼成，然后依靠另一圆,将左侧腰部切去．于是,可以导出字符 3 的方程式:

$$\left\{\frac{2.4^2}{(x+2.4)^2+(y+0.2)^2}\right\}^\alpha=[x^2+(y-1.4)^2-1.6^2][x^2+(y+2)^2-1.8^2]. \quad (8)$$

5) 以一对同型曲线为边界线．字符M所采用的边界线可以是两条余弦曲线——一对同型曲线[1].

6) 以多条非同型曲线为边界线．以字符 E, G 为例说明，字符 E 的四角可用圆切去,然后用双曲线切割出中间的一短横．所得字符 E 的方程式为

$$\left(\frac{x^2+y^2}{18.8}\right)^\alpha+\left[\left(\frac{x+0.5}{1.5}\right)^2-\left(\frac{y}{3}\right)^2\right]^\alpha=y(y-3.8)(y+3.8)(x+1.8). \quad (9)$$

若字符 E 为矩形美术体,则可用下式表示:

$$\left(\frac{x}{1.9}\right)^\alpha+\left(\frac{y}{2}\right)^\alpha=(y+1)(y+3.8)(y-3.8)(x+1.8). \quad (10)$$

谈到美术体字符 G 的最后一竖，那是可以取消的．可先设计一个圆形的 G，然后使它伸高成椭圆形．圆形 G 的方程式为

$$\{0.66^2/[(x+1.10)^2+(y+0.23)^2]\}^\alpha+(0.559x+0.115y+0.0391)^\alpha$$
$$=(y+0.36)(x^2+y^2-1.8^2). \quad (11)$$

如果不取消 G 的最后一竖,其数学描述应依靠另一个更巧妙的方法(方法见后).

7) 图形的伸高．可以使圆形 G 变换成高的椭圆形 G．办法是，把方程式内的 y 用 $1.8y/3.8=0.4737y$ 代替.

图形伸高法也可应用于文[1]已讨论过的五角星字符．这一字符看起来比较小,用图形伸高法可以使其伸高．办法是，譬如，以 $2y/3.4=0.5882y$ 代替式中的 y，然后，以 $y+0.4$ 代替式中的 y，则使图形下降 0.4．这样，所得到的高五角星形刚好与阿拉伯数字同高度,同尺寸.

3. 字符边界线及坐标系的选择

1) 字符边界线的选择

笔者所建议的统一字符区是一个 4×10 的矩形．但字符本身的边界线(即字符切割线)可以有多种多样．其选择的可能性是无穷无尽的,可按照字符特有的形状选用各种不同的边界线．以下用几个实例说明: 不等号 ≒ 和日文假名 キ 可以采用圆的或方的边

界线. 方括号或假名コ则不宜于用方的边界线，而应采用圆形之类的边界线. 假名イ最好采用图 1a 所示的边界线，即最好用"弯刀"把某一笔画越出另一笔画的部分切去. 图 1b，d 采用了这种切割法. 假名イ(图 1a)所用边界的方程为

$$|xy| = \text{const.}. \tag{12}$$

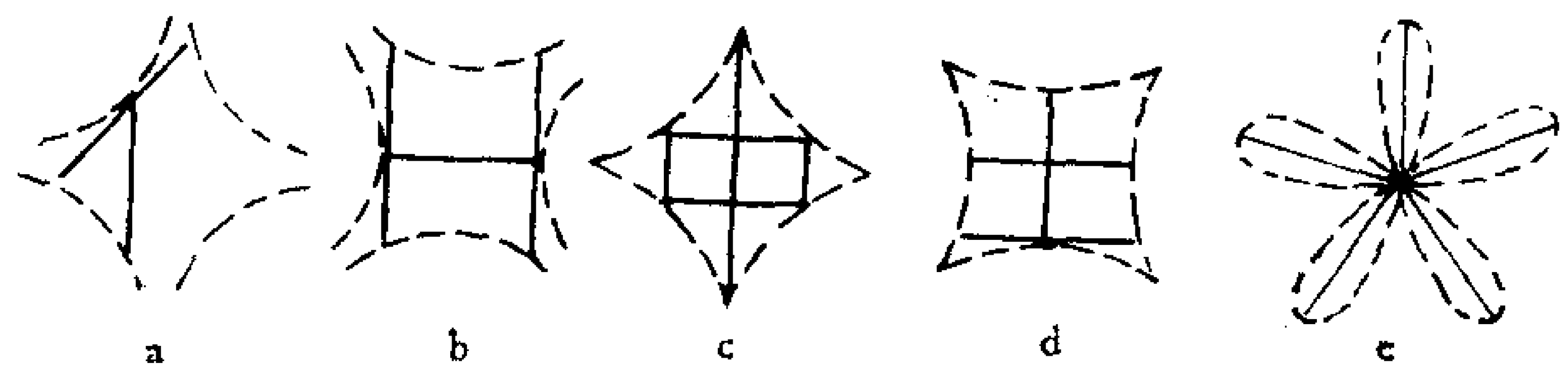


图 1 按照字符形状选用不同边界线

汉字"中"(图 1c) 所用边界的方程为

$$(x/a)^{1/2} + (y/b)^{1/2} = 1. \tag{13}$$

将方程(12)，(13)进行转轴 45° 的变换，就形成图 1 b 和 d 的边界线.

边界线当然还可以包括内孔线和内环隙线. 一个圆环就有一条内孔线. 文[1]曾应用一个圆环切割出正五角星.

2) 坐标系的选择

坐标系也可以进行各种选择. 现以国内外普遍使用的所谓五鸡爪字符⋆为例加以说明. 字符⋆，当采用直角坐标时，显然不如⋆或☆容易表达. 若允许采用极坐标，可以很容易用(14)式或(15)式表达. 采用图 1 e 所示的五花瓣形式的边界线，能很快地写出其方程式:

字符⋆ $(\theta-18°)(\theta-90°)(\theta-162°)(\theta-234°)(\theta-306°)=\{\rho/\sin^2((5\theta/2)+18°)\}^\alpha$. (14)

圆形边界线初看起来，似乎不适用于字符⋆，因为各辐射线的反向延长无法用圆去切掉. 其实，采用极坐标后，可以限定 ρ 为正值. 以 $(-1+\rho/K)^\alpha$ 为边界函数，其中 K 为常数. 命 $\max(-1+\rho/K)=1$, $\min(-1+\rho/K)=0$，于是导出 $\rho_{\max}=2K$，即 $K=\rho_{\max}/2=1.9/2=0.95$. 得边界函数 $(-1+\rho/0.95)^\alpha=(-1+1.052\rho)^\alpha$ 及其方程:

字符⋆ $(\theta-18°)(\theta-90°)(\theta-162°)(\theta-234°)(\theta-306°)=(1.052\rho-1)^\alpha$. (15)

检验:

$$-1 < 1.052\rho - 1 < 1,$$
$$0 < 1.052\rho < 2,$$
$$0 < \rho < 2 \times 0.95 = 1.9. \quad (O.K.)$$

方程(15)比(14)式要简单得多. 总的看来，既要选择合适的坐标系，又要选择合适的边界线. 如需要识别大量的斜体字，在进行文字描述时，采用斜坐标系是比较方便的.

三、按线条叠切叠法建立字符方程

1. 叠切法

以上各节所介绍的建立字符方程式的方法可以取名为线条叠切法. 可以形象地比喻为将一些黑胶带叠在同一张白纸上，然后用直刀或弯刀大刀阔斧地切去不需要的部分.

这种先叠后切的方法称为叠切法． 如图 2 所示，首先选择诸显现函数：$f_1(x, y) = 0$，$f_2(x,y) = 0$． 把这些函数的图象叠起来，写出 $f_1(x, y)f_2(x, y) = 0$．其次，规定图象切割后的保留范围 $|\phi(x,y)| < 1$．最后写出字符方程 $[\phi(x, y)]^\alpha = f_1(x, y)f_2(x, y)$．

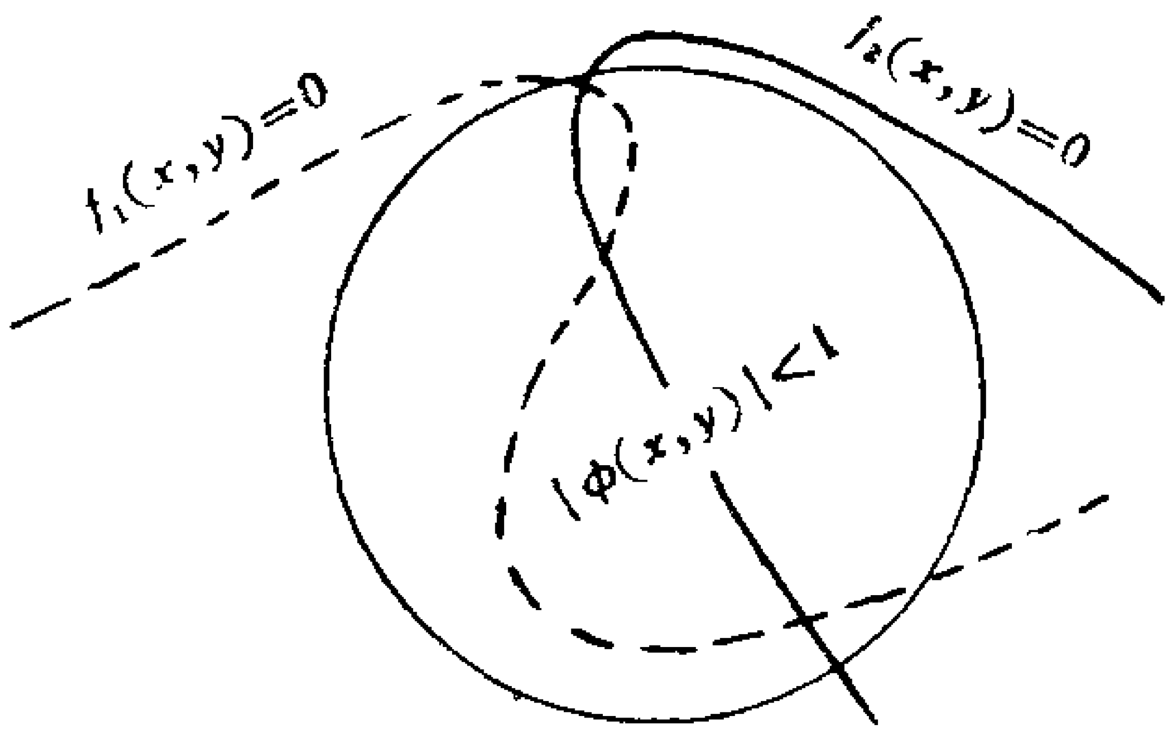
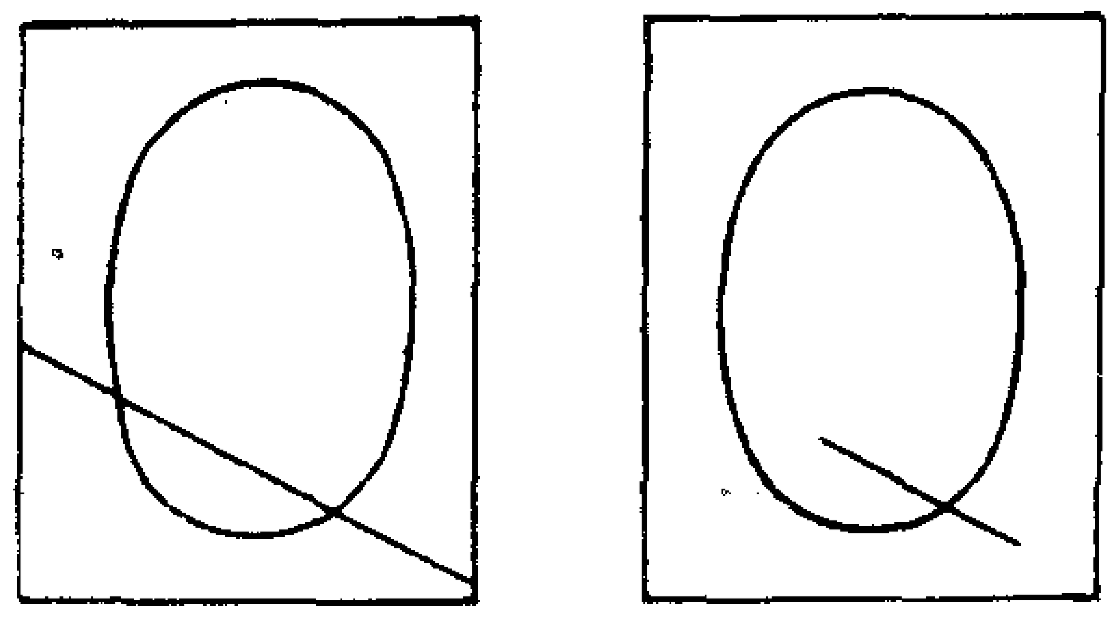


图 2　线条叠切法说明
(圆内的字符是国际通用符号&)



(a)　　(b)

图　3
a 采用叠切法；b 采用切叠法

2. 切叠法

切叠法是先切后叠，可形象地比喻为将一些各有其位的黑胶带分别地切去两端，然后叠在一起．例如，建立字符Q的方程，最好采用这种先切后叠的方法．首先将一小段直线切好，然后与一个椭圆叠起来，以形成图 3 右图所示的图形． 所选的直线方程是 $y + 0.8x + 2.4 = 0$．所割取的一小段是 $(0.63x - 1.25)^\alpha = y + 0.8x + 2.4$，即

$$[(0.63x - 1.25)^\alpha - y - 0.8x - 2.4] = 0.$$

将该方程与另一较合适的椭圆方程合并之后，就得到字符Q的方程：

$$[(0.63x - 1.25)^\alpha - y - 0.8x - 2.4][(x/1.8)^2 + (y/3.8)^2 - 1] = 0. \tag{16}$$

可应用切叠法的情况很多．许多字符可以采用缺左边或缺右边的椭圆或超椭圆再接上一竖构成．超椭圆即斯德哥尔摩市中心水池的形状，似方似圆，其方程式为

$$(x/a)^{2.5} + (y/b)^{2.5} = 1.$$

用这种缺口的圈套再接一竖或一段圆弧或一段正双曲线的字符可有：a, b, g, b, d, p, g．其中小写字母 a 还可以接一个缺口的大圆，而形成字符@．另外，还有字符 S 或 s，可以用两个缺口的圆或椭圆接成．进一步，将两个 S 适当地相叠，就构成章节号§．字符 u, n, m 都可以用两三条抛物线段接起来构成．字符 U 可以由一个半圆和两段直线相接．数字 2 可以由上中下三段相接：上段是半圆，或比半圆长一点；中段是圆弧或直线段，底部是直线段．数字 7 可以由一横和一圆弧构成．L 可以从正双曲线割取，t 也一样，但要求矮一些，并附上一横．问号则可以由一个半圆、一小段圆弧和一小短竖构成．

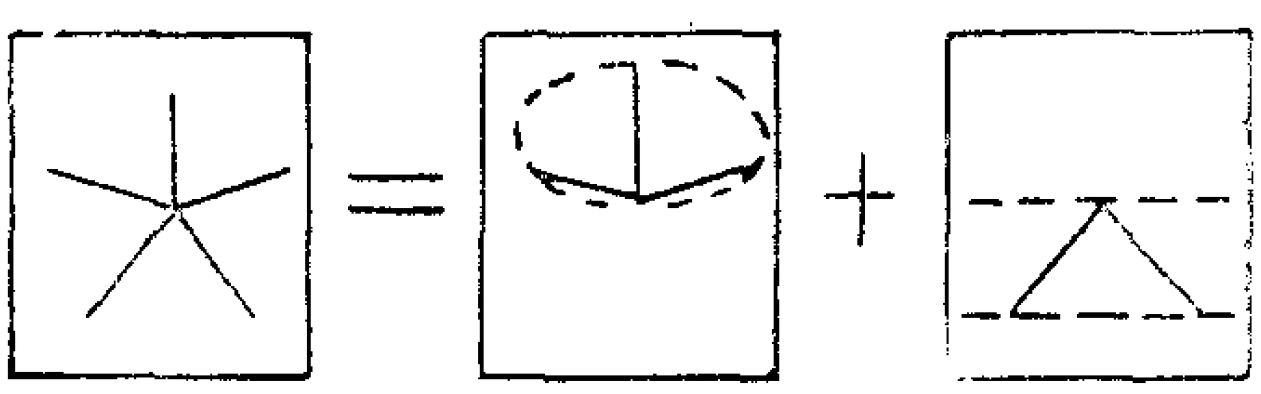


图 4　线条叠切叠法说明

3. 叠切叠法

完整的叠切叠法应包括叠、切、叠三步骤．以五鸡爪字符木为例加以说明．现用直角坐标系描述字符木．字符木的形成原理如图 4 所示．首先组成上面三爪，形象地说，先将三根面条(三条直线)按照图的样子叠起来，然后用一椭圆形的罐头盖切出一三爪形，方程如下：

$$\left[\left(\frac{x}{1.97}\right)^2+\left(\frac{y-0.96}{0.96}\right)^2\right]^\alpha=x(y-0.3202x)(y+0.3202x)$$
$$=x(y^2-0.1027x^2). \tag{17}$$

再构成下面二爪，方程如下：

$$(1.3y+1)^\alpha=(y-1.375x)(y+1.375x)=y^2-1.89x^2. \tag{18}$$

最后，把上三爪和下二爪接起来，即将(17)，(18)二式合并得如下形式：

字符木 $$[(1.3y+1)^\alpha-y^2+1.89x^2]\left\{\left[\left(\frac{x}{1.97}\right)^2+\left(\frac{y-0.96}{0.96}\right)^2\right]^\alpha-x(y^2-0.1027x^2)\right\}=0. \tag{19}$$

方程(19)比极坐标方程(15)复杂些．优点是与其它各字符一样，采用了统一的直角坐标系．

应用三步法(叠切叠法)，就可以单一方程描述二步法无法描述的某些字符，如较复杂的汉字(图 5)和某些符号．

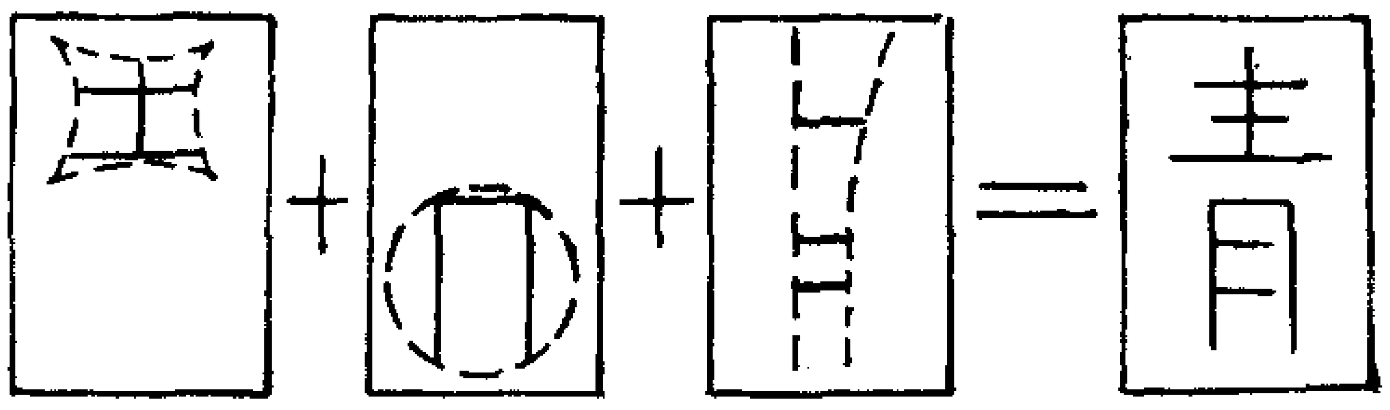


图 5 按线条叠切叠法求出复杂汉字的单一方程式

在各种单据上的人民币符号￥是值得自动识别的．它的方程式可按三步法导出．符号￥上下两部分的方程是

$$(1.11y-2.115)^\alpha=(x+y-1)(x-y+1),$$
$$x^\alpha+(0.42y+0.58)^\alpha=x(y+0.4)(y+2),$$

将两方程合并，就得到符号￥的方程为：

字符￥ $$[(1.11y-2.115)^\alpha-(x+y-1)(x-y+1)][x^\alpha+(0.42y+0.58)^\alpha-x(y+0.4)(y+2)]=0. \tag{20}$$

日元符号￥的方程也可随即写出：

字符￥ $$[(1.11y-2.115)^\alpha-(x+y-1)(x-y+1)][x^\alpha+(0.42y+0.58)^\alpha-x(y+1.2)]=0. \tag{21}$$

式(21)的最后一项 $-x(y+1.2)$ 若换成 $-x$，就得到字符 Y 的方程．在 Y 方程式内，边界函数 x^α 因不起作用，可以删去．

在前面字符 G 的描述中，曾把一竖省去，采用叠切叠法，可以用一个高大 C 和一个矮

小的 T 相接构成，不必省去一竖.

B, D, P, R 四个字符可以按简单的叠切法构成，使 B 配上两条立方绝对值曲线，D, P, R 均配上四次方曲线. 而按叠切叠法，在每一字符内，均采用一些水平直线与半圆相连接构成，可便于计算机检验.

四、叠切叠法在一般工程问题中的应用

本文提出的叠切叠法不仅可用来构成字符并写出字符方程，而且还可以应用于许多工程问题中. 例如，铁磁材料的磁化曲线过去曾用种种方程式去逼近. 但要做到处处都逼近，事实上办不到. 采用切叠法，以 $B = bH^3/a^3$ 逼近低磁段，以 $H = aB^3/b^3$ 逼近高磁段，再使它们衔接起来，这样就可以列出表示铁磁材料磁化曲线的单一方程式.

又例如，承重立柱(压杆)的临界负荷计算要靠多个公式，而且应用时要注意各公式的适用范围. 采用叠切叠法之后，可以把多个公式合并成一个，即把 Euler 氏双曲线与 Engesser 氏抛物线(或 Tetmajer 氏斜直线)以及纵轴附近的一段水平线各割取一段，然后把它们依次连接起来. 于是，可用一个单一的方程式去表示临界负荷 σ_K 与相对细长度 λ 之间的关系. 我们把这个方程式编入计算机程序，经计算能得到临界负荷值.

叠切叠法还可以应用于一般科技问题中. 例如热学中的 Van der Waals 方程的图象，事实上只有头尾两段适用，而中间一段来回弯曲的部分必须割掉，换以水平直线. 这种真实的拼接式图象的单一方程式是可以依靠本文的切叠法书写出来的.

参　考　文　献

[1] 蒋卡林，字符方程初探，自动化学报，7(1981)，113—120.

FORMULATION OF CHARACTER EQUATIONS

Jiang Kalin

(Shenyang Institute of Automation, Academia Sinica)

Abstract

On the basis of α-exponential technique raised in the previous article[1], this paper advances further the line lap-cut method, the cut-lap method and the lap-cut-lap method, and by these methods formulates the monogamous equations for a variety of character-like patterns. It is shown that all commonly used characters may be approximated by such equations. Finally, the applications of the lap-cut-lap method to general technical problems have been presented.