

确定地球同步自旋卫星姿态的一种方法

周文忠 胡志才

(北京控制工程研究所)

摘 要

本文提出一种同时利用地球角 θ_e 、太阳角 θ_s 和星日-星地转动角 λ_{se} 三种姿态测量信息, 确定卫星姿态的方法。该法算式简易, 可唯一地确定卫星姿态。消除了采用两种姿态测量信息的姿态确定方法所引起的高相关和低测量密度的不良区域。本文方法仅有太阳矢量和地球矢量共线的几何限制, 能方便地把 λ_{se} 引入滤波器。通过数字仿真, 表明此法可得到良好的姿态确定精度及滤波估计。

一、前 言

自旋轴在惯性空间的方位可用来表示同步自旋卫星的姿态。

地球同步自旋卫星姿态确定的一般方法是将红外地球敏感器和太阳敏感器所测得的各种姿态信息, 取其中两种来确定姿态。文献[1]中把现有的自旋卫星姿态确定方法归纳为: (1)地球弦宽/太阳角法; (2)双重地球弦宽/太阳角法; (3)星日-星地转动角/太阳角法; (4)地球弦宽/星日-星地转动角法; (5)双重地球弦宽/星日-星地转动角法; (6)单地平转动角/太阳角法等六种方法。以上方法均是采用两种姿态量测信息确定卫星姿态, 下面简称“两量测量法”。本文提出同时采用 $\theta_e, \theta_s, \lambda_{se}$ 三种姿态测量信息确定卫星姿态的方法。根据矢量代数定理在天球直角坐标系 $OXYZ$ 内考察 $\vec{S}, \vec{E}, \vec{A}$ 三个矢量间的几何关系, 借助辅助矢量 \vec{N} 推导出关于卫星轨道、姿态和姿态测量数据的矩阵方程, 由所取得的轨道和姿态测量信息便可唯一地确定卫星姿态。文中对该法由姿测不确定性引起的姿态不确定性误差进行了分析, 并与一般方法作了对比。文中利用优化方法证明了用“模化1”法处理 $\vec{A}^T \cdot \vec{A} = 1$ 的约束问题的正确性, 从而使所提出的姿态确定方法更富有工程意义。本文针对 $(\theta_e, \theta_s, \lambda_{se})$ 姿态确定法提出五种滤波器估计方案, 对其中II, III方案的推广卡尔曼滤波器估计进行了数字仿真, 对方案V做了推广卡尔曼滤波器和最小二乘滤波器估计的数字仿真, 分别给出了主要仿真结果。

二、卫星轨道、姿态测量及姿态量的矩阵方程

$OXYZ$ 为质心天球直角坐标系(图1), O 为质心, OX, OZ 分别指向春分点和地

北, OY 按右手法则确定. $\vec{A}, \vec{E}, \vec{S}$ 和 \vec{N} 分别为自转轴、地球方向、太阳方向的单位矢量和辅助矢量, $\vec{N} = \vec{S} \times \vec{E}$. $\theta_c, \theta_s, \theta_{sc}, \theta_{AN}$ 分别为四矢量彼此间的夹角. 根据矢量代数定理有

$$\vec{E} \cdot \vec{A} = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z = \cos \theta_c, \tag{1}$$

$$\vec{S} \cdot \vec{A} = \mathcal{S}_x A_x + \mathcal{S}_y A_y + \mathcal{S}_z A_z = \cos \theta_s, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} (\vec{S} \times \vec{E}) \cdot \vec{A} &= (e_y \mathcal{S}_z - e_z \mathcal{S}_y) A_x + (e_z \mathcal{S}_x - e_x \mathcal{S}_z) A_y + (e_x \mathcal{S}_y - e_y \mathcal{S}_x) A_z \\ &= N \cdot \cos \theta_{AN}. \end{aligned} \tag{3}$$

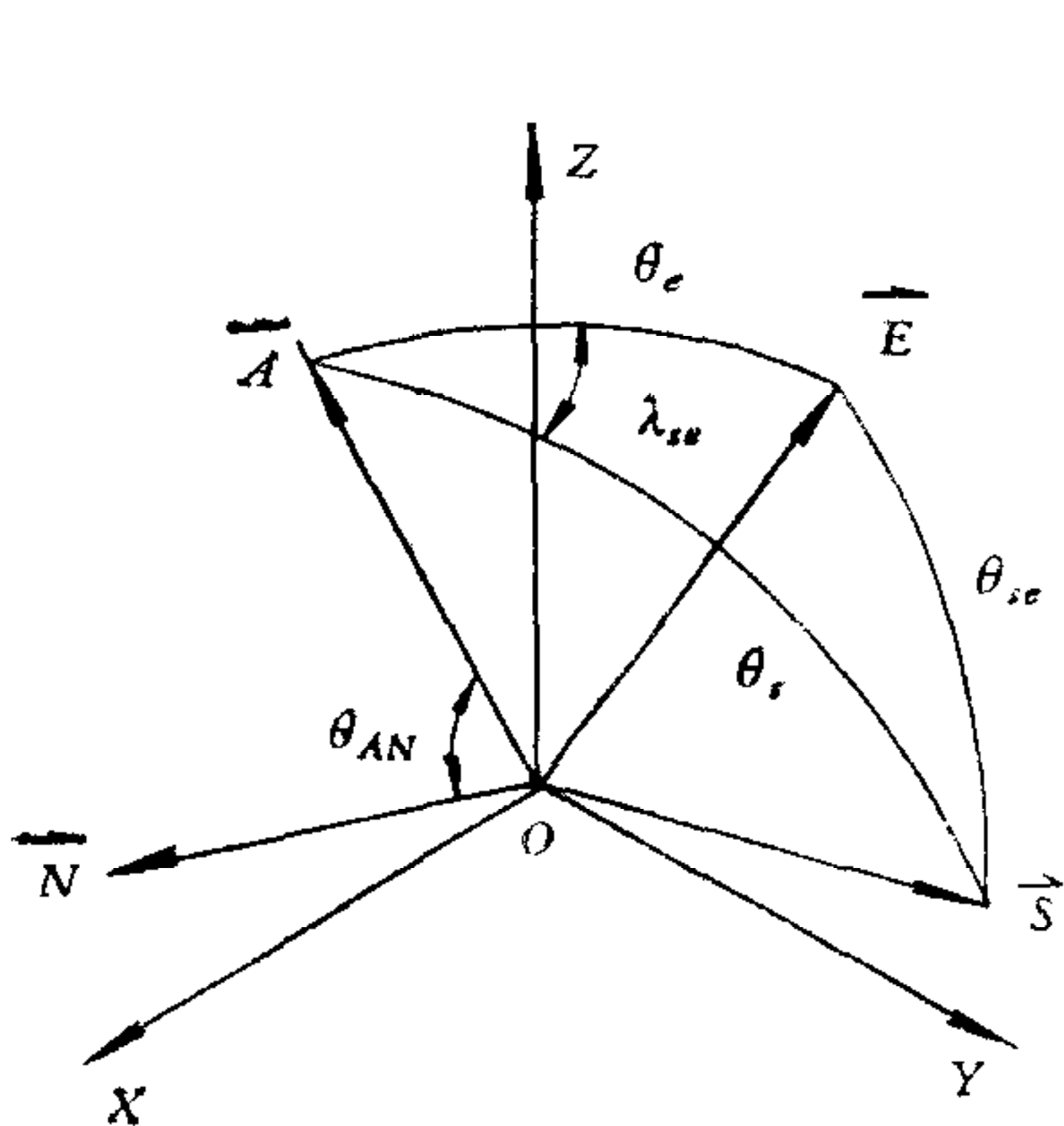


图1 OXYZ 坐标系及 $\vec{A}, \vec{S}, \vec{E}, \vec{N}$ 矢量

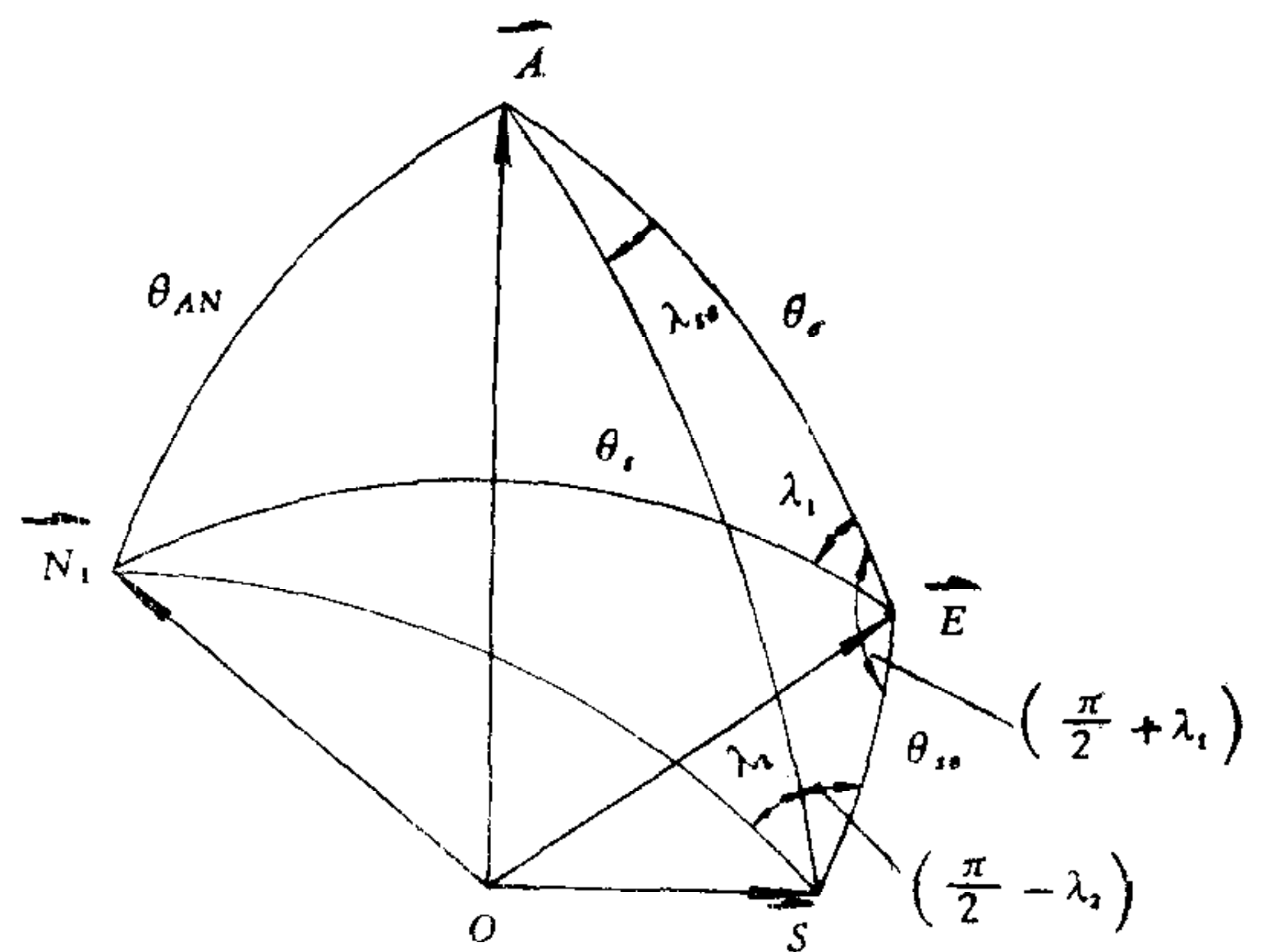


图2 以O为球心的单位球

方程(1),(2),(3)中,除 $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ 和 θ_{AN} 待定外,其余各量均为轨道测量和姿态测量信息. 为了用 θ_c, θ_s 和 λ_{sc} 解析表达角 θ_{AN} , 作一单位球,如图2.

$\vec{A}, \vec{E}, \vec{S}$ 和 \vec{N}_1 各矢量终端均位于单位球面上. \vec{N}_1 与平面 SOE 垂直. 这四个矢量构成的夹角和二面角如图2所示. 考察三角形 SEA , 有

$$\cos \lambda_2 = \frac{\sin \lambda_{sc}}{\sin \theta_{sc}} \sin \theta_c. \tag{4}$$

作一辅助坐标系 $O\xi\eta\zeta$ (图3), 可知 \vec{N} 与 $O\xi$ 轴夹角亦为 λ_2 , 于是有

$$\vec{A} \cdot \vec{N} = AN \sin \theta_s \cos \lambda_2 = AN \sin \theta_s \frac{\sin \lambda_{sc}}{\cos \lambda_{sc}} \sin \theta_c. \tag{5}$$

由(4),(5)式可得

$$N \cdot \cos \theta_{AN} = \sin \theta_c \sin \theta_s \sin \lambda_{sc}. \tag{6}$$

将(6)式代入(3)式右端,更将(1),(2),(3)式写成矩阵方程

$$\vec{Y} = H\vec{A}. \tag{7}$$

式中

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c \\ \cos \theta_s \\ \sin \theta_c \sin \theta_s \sin \lambda_{sc} \end{pmatrix}, \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix},$$

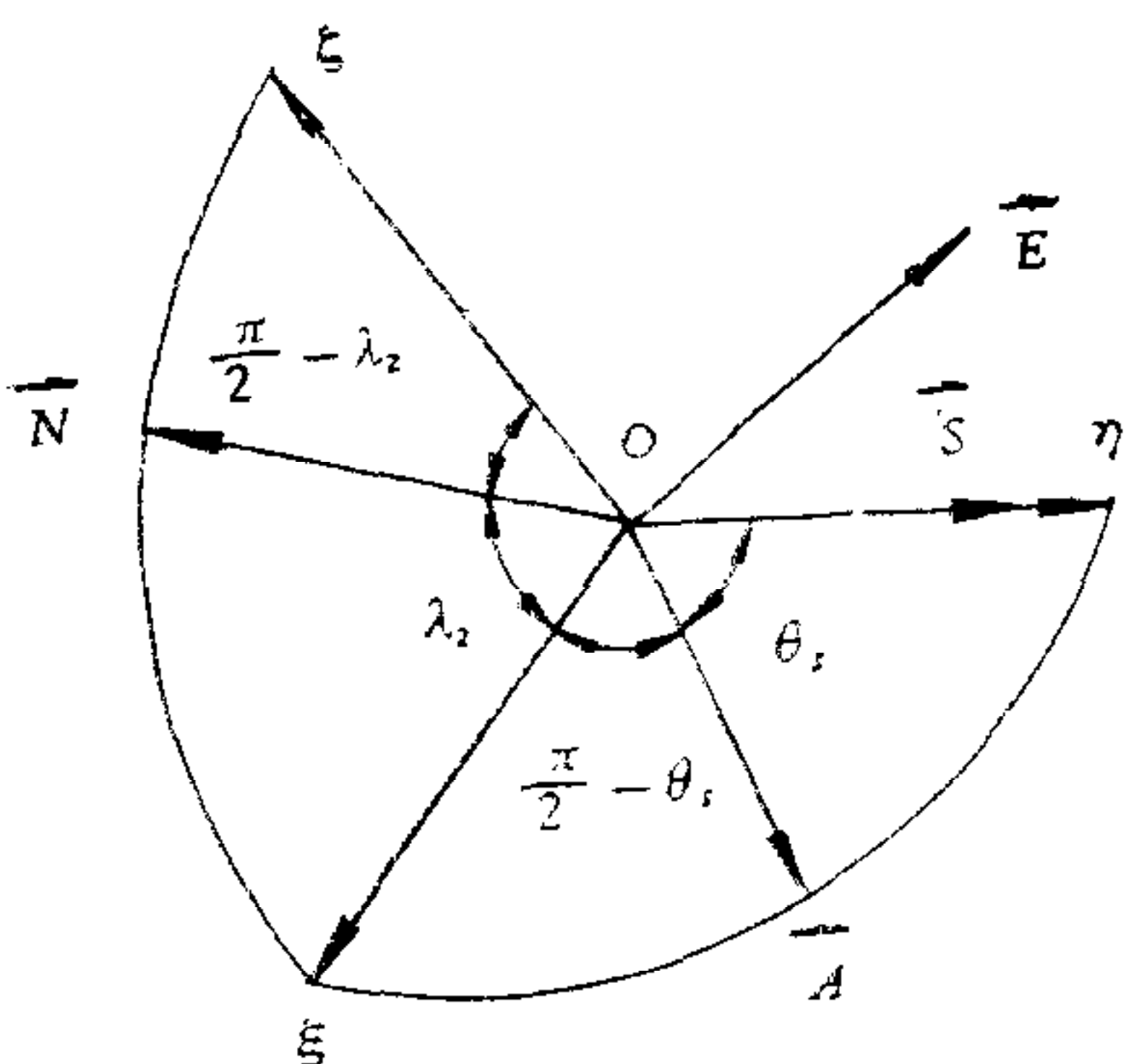


图3 $O\xi\eta\zeta$ 辅助坐标系 (使 $O\eta$ 与 \vec{S} 重合, \vec{A} 位于 $\xi O\eta$ 内)

$$H = \begin{pmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \mathcal{S}_x & \mathcal{S}_y & \mathcal{S}_z \\ e_y \mathcal{S}_z - e_z \mathcal{S}_y & e_z \mathcal{S}_x - e_x \mathcal{S}_z & e_x \mathcal{S}_y - e_y \mathcal{S}_x \end{pmatrix}.$$

\vec{Y} 为姿态测量列向量, \vec{A} 为卫星姿态列向量, H 为卫星轨道参数方阵.

方程 (7) 即为卫星轨道、姿态测量和姿态量的矩阵方程. 它分离了卫星轨道、姿测和姿态三种参数, 且 \vec{Y} 与 \vec{A} 存在一次关系; 可唯一地确定姿态, 无需再鉴别太阳和地球两锥交的真伪; 当且仅当 $|H| = 0$, 即仅存在 $\vec{S} = \pm \vec{E}$ 的几何限制时, \vec{A} 不能确定; 函数简单地含星日-星地转动角 λ_{sc} , 为滤波器估计增加一个测量信息提供了方便条件. 因此, 给定轨道参数和姿态测量参数 $\theta_c, \theta_s, \lambda_{sc}$ 后, 便可由下式唯一地确定卫星姿态:

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = H^{-1} \begin{pmatrix} \cos \theta_c \\ \cos \theta_s \\ \sin \theta_c \cdot \sin \theta_s \cdot \sin \lambda_{sc} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

因为坐标变换不改变矢量方向, 通过用“模化 1”方法得到的 (9) 式

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \cos^{-1} \frac{A_x}{\cos \delta \cdot (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}} \\ \delta &= \sin^{-1} \frac{A_z}{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

能相应确定自旋轴矢量 \vec{A} 在赤道坐标系的赤经 α 和赤纬 δ .

在工程中, 用 (8), (9) 式作为卫星姿态几何的初始确定, 其精度是可以满足要求的. 但也可用 (8), (9) 式给出的姿态为初值, 用下面两种方法更精确地确定卫星姿态.

1) 把 $A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = 1$ 的约束问题化为平方和极小来确定姿态. 先令

$$F(\vec{A}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{A}) \\ f_2(\vec{A}) \\ f_3(\vec{A}) \\ f_4(\vec{A}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z - \cos \theta_c \\ \mathcal{S}_x A_x + \mathcal{S}_y A_y + \mathcal{S}_z A_z - \cos \theta_s \\ (e_y \mathcal{S}_z - e_z \mathcal{S}_y) A_x + (e_z \mathcal{S}_x - e_x \mathcal{S}_z) A_y + (e_x \mathcal{S}_y - e_y \mathcal{S}_x) A_z - \sin \theta_c \cdot \sin \theta_s \cdot \sin \lambda_{sc} \\ A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 - 1. \end{pmatrix}, \quad (10)$$

把 (10) 式化为与其等价的无约束极小式

$$\min \{f_1^2(\vec{A}) + f_2^2(\vec{A}) + f_3^2(\vec{A}) + f_4^2(\vec{A})\}, \quad (11)$$

由 (11) 式得姿态解

$$\vec{A}_{K+1} = \vec{A}_K + \Delta \vec{A}_{K+1}, \quad (12)$$

$$\Delta \vec{A}_{K+1} = (W_{ik}^T \cdot W_{ik})^{-1} W_{ik}^T \cdot F(\vec{A}_K). \quad (13)$$

式中 $i = 1, 2, \dots, N$ 为测量数据帧数, $k = 1, 2, \dots, n$ 为在同一帧数下的迭代次数,

$$W_{ik} = \begin{pmatrix} e_{xi} & e_{yi} & e_{zi} \\ \mathcal{S}_{xi} & \mathcal{S}_{yi} & \mathcal{S}_{zi} \\ (e_y \mathcal{S}_z - e_z \mathcal{S}_y)_i & (e_z \mathcal{S}_x - e_x \mathcal{S}_z)_i & (e_x \mathcal{S}_y - e_y \mathcal{S}_x)_i \\ 2A_{xk} & 2A_{yk} & 2A_{zk} \end{pmatrix},$$

$$\Delta \vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix}.$$

当 $\Delta \vec{A} \leq \epsilon = 10^{-5}$ (视精度要求而定) 时停机, 否则继续迭代.

2) 把带有非线性等式约束问题化成一系列线性等式约束问题, 再化成含罚函数的求极小问题来确定姿态.

在非线性等式 $f_4(\vec{A}) = 0$ 约束下的求极小

$$\min_{f_4(\vec{A})=0} \{f_1^2(\vec{A}) + f_2^2(\vec{A}) + f_3^2(\vec{A})\}. \quad (14)$$

应用求这类问题的外点方法, 把(14)式化成与其等价的含罚函数 $M^2 f_4^2(\vec{A})$ 的求极小问题

$$\min \{f_1^2(\vec{A}) + f_2^2(\vec{A}) + f_3^2(\vec{A}) + M^2 f_4^2(\vec{A})\}. \quad (15)$$

由(15)得姿态解

$$\vec{A}(M_j) = \vec{A}(M_{j-1}) + \Delta \vec{A}(M_j), \quad (16)$$

$$\Delta \vec{A}(M_j) = (W_i^T(M_j) \cdot W_i(M_j))^{-1} \cdot W_i^T(M_j) \cdot F(\vec{A}(M_{j-1})). \quad (17)$$

式中 M 为正整数, 且 $M_{j-1} < M_j$, $j = 1, 2, \dots, m$,

$$W_i(M_j) = \begin{pmatrix} e_{xi} & e_{yi} & e_{zi} \\ \mathcal{S}_{xi} & \mathcal{S}_{yi} & \mathcal{S}_{zi} \\ (e_y \mathcal{S}_z - e_z \mathcal{S}_y)_i & (e_z \mathcal{S}_x - e_x \mathcal{S}_z)_i & (e_x \mathcal{S}_y - e_y \mathcal{S}_x)_i \\ 2M_j A_x(M_{j-1}) & 2M_j A_y(M_{j-1}) & 2M_j A_z(M_{j-1}) \end{pmatrix}.$$

当 $|f_4(\vec{A})| \leq \epsilon$ (视精度要求而定) 时停机, 否则继续迭代. 同一过渡轨道段计算机仿真结果(取 $\epsilon = 10^{-5}$)说明, 优化的两种方法比用(8), (9)两式姿态确定法精度提高 2—4 倍(见表 1).

表 1

误差参数		方法	(8), (9)式确定姿态	$\min \left\{ \sum_{i=1}^4 f_i^2(\vec{A}) \right\}$ 确定姿态	$\min_{f_4^2(\vec{A})=0} \left\{ \sum_{i=1}^3 f_i^2(\vec{A}) \right\}$ 确定姿态
分量误差	ΔA_x		$0.8902085 \cdot 10^{-3}$	$0.2994686 \cdot 10^{-3}$	$0.304598 \cdot 10^{-3}$
	ΔA_y		$0.3455802 \cdot 10^{-2}$	$0.1117369 \cdot 10^{-2}$	$0.1129506 \cdot 10^{-2}$
	ΔA_z		$0.2231524 \cdot 10^{-2}$	$0.1918088 \cdot 10^{-2}$	$0.1913769 \cdot 10^{-2}$
赤经赤纬误差	$\Delta \alpha$		0.156776925°	0.126118961°	0.126332748°
	$\Delta \delta$		0.052222222°	0.027347124°	0.027229166°
模误差	$\Delta \vec{A} $		$3.6027 \cdot 10^{-3}$	$0.8 \cdot 10^{-4}$	$< 10^{-5}$

此表数据均系第 1000 · Δt 点仿真结果.

三、误差分析

若仅考虑姿测误差, 则由测量不确定性引起的姿态不确定性为

$$\sigma_A^2 = t_r[(H^{-1}G)R(H^{-1}G)^T]. \quad (18)$$

式中 H^{-1} 为轨道参数方阵的逆, 而

$$G = \begin{pmatrix} -\sin\theta_e & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta_s & 0 \\ \sin\theta_s \cdot \sin\lambda_{sc} \cos\theta_e & \sin\theta_e \sin\lambda_{sc} \cos\theta_s & \sin\theta_e \sin\theta_s \cos\lambda_{sc} \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} \sigma_{\theta_e}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta_s}^2 & \sigma_{s\lambda}^2 \\ 0 & \sigma_{s\lambda}^2 & \sigma_{\lambda}^2 \end{pmatrix}.$$

由直接测量物理量（传感器扫到地球和太阳的时刻）的标准方差（零均值正态分布） σ_{i_e} ， σ_{i_s} ，可导出 R 阵中的各元素，分别为

$$\sigma_{\theta_e}^2 = \frac{8\Omega_s^2(\cos\gamma - \cos\rho \cdot \cos\theta_e)^2}{\sin^2\theta_e(\sin^2\gamma \sin^2\theta_e - \cos^2\gamma \cos^2\theta_e + 2\cos\gamma \cos\rho \cos\theta_e - \cos^2\rho)} \cdot \sigma_{i_e}^2, \quad (19)$$

$$\sigma_{\theta_s}^2 = 2\Omega_s^2 \cdot \sin^4\theta_s(\text{ctg}^2\chi - \text{ctg}^2\theta_s)\sigma_{i_s}^2, \quad (20)$$

$$\sigma_{\lambda}^2 = \Omega_s^2 \left(\frac{1}{2} \sigma_{i_e}^2 + \sigma_{i_s}^2 \right), \quad (21)$$

$$\sigma_{s\lambda}^2 = \frac{\Omega_s^2}{\sin^2\theta_s \sqrt{\text{ctg}^2\chi - \text{ctg}^2\theta_s}} \sigma_{i_s}^2. \quad (22)$$

其中 Ω_s 为卫星自旋角速度； ρ 为地球半转角； γ 为红外地球传感器安装角； χ 为太阳传感器安装角。由(19)–(21)式可导出 $\sigma_{\theta_e}^2$ ， $\sigma_{\theta_s}^2$ ， σ_{λ}^2 三者的关系式

$$\begin{aligned} \sigma_{\lambda}^2 = & \frac{\sin^2\theta_e(\sin^2\gamma \sin^2\theta_e - \cos^2\gamma \cos^2\theta_e + 2\cos\gamma \cos\rho \cos\theta_e - \cos^2\rho)}{16(\cos\gamma - \cos\rho \cos\theta_e)^2} \sigma_{\theta_e}^2 \\ & + \frac{1}{2} \sin^4\theta_s(\text{ctg}^2\chi - \text{ctg}^2\theta_s)\sigma_{\theta_s}^2. \end{aligned} \quad (23)$$

经对 (θ_e, θ_s) 姿态确定法和本文提出的 $(\theta_e, \theta_s, \lambda_{se})$ 姿态确定法进行姿态误差协方差分析，并对某一过渡轨道远地点附近约 30 分钟内轨道各点的仿真计算，结果表明 $(\theta_e, \theta_s, \lambda_{se})$ 姿态确定法的误差比 (θ_e, θ_s) 法有明显下降（见图 4）。Grubin 方法协方差计算结果与 (θ_e, θ_s) 法基本相同。

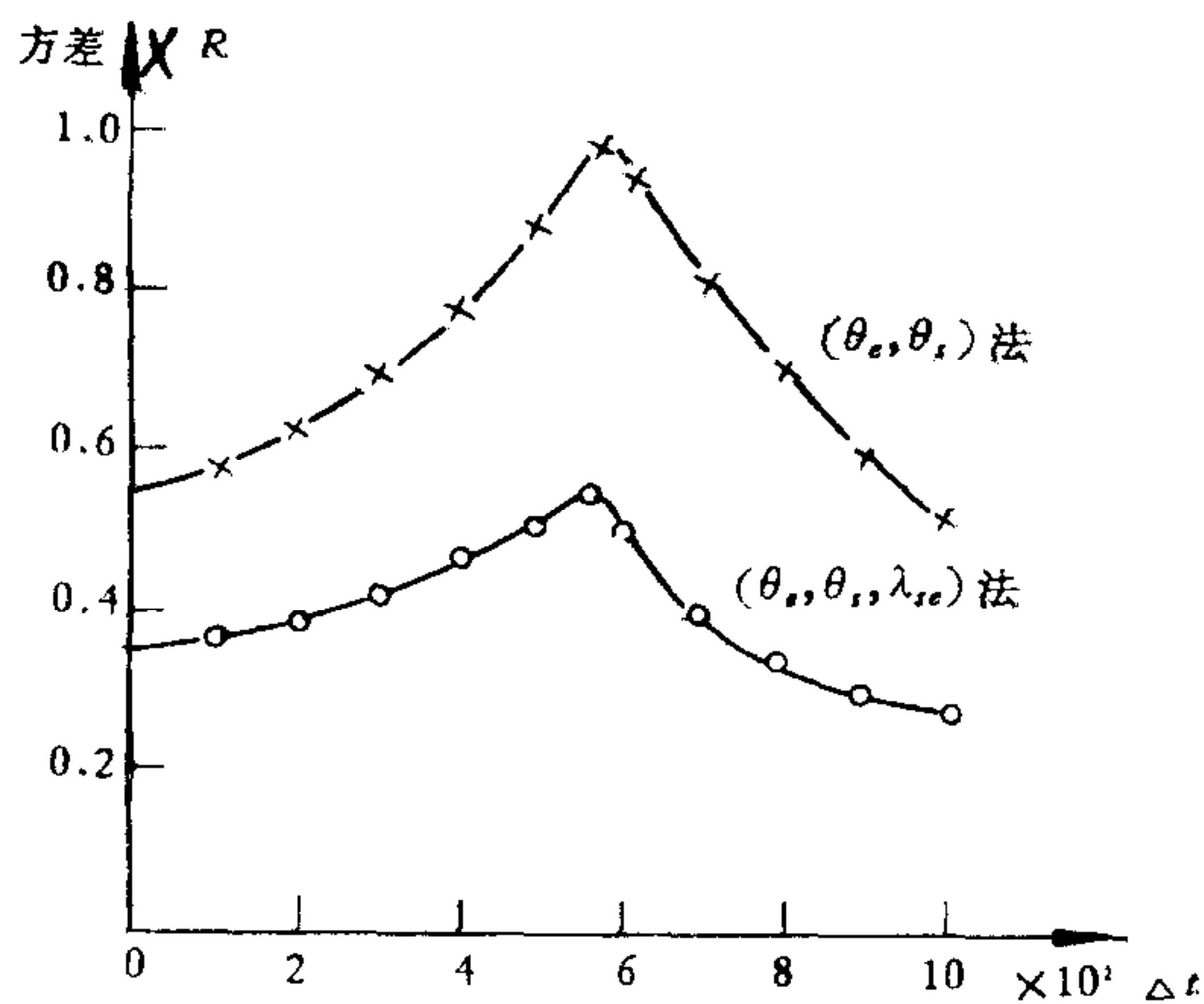


图 4 (θ_e, θ_s) 法和 $(\theta_e, \theta_s, \lambda_{se})$ 法误差仿真计算结果
 $R = 0.03315762$, $\Delta t = 1.71428$ 秒

为了在天球上大范围地考察这种姿态确定方法的确定误差，下面用相关角、测量密度（包括各种偏导）方法的解析显式来描述由测量不确定性引起的姿态不确定性。由于测量噪声 $\sigma_{\theta_e}^2$ ， $\sigma_{\theta_s}^2$ ， σ_{λ}^2 三者的相关性和 θ_e ， θ_s ， λ_{se} 三者几何相关性不一致，即相当于在姿态确定方程(8)式右端输入三个几何关系上互为独立的随机测量值，得到在天球上的随机姿

态 α, δ . 因此, 可在以姿态标称点为原点的天球切面内取两个独立变量 x, y 为坐标轴的坐标系内分析误差. 为简化起见, 忽略 $\sigma_{s\lambda}$, 于是姿态不确定性应是 $\sigma_{\theta_e}, \sigma_{\theta_s}, \sigma_\lambda$ 分别在 x, y 轴上引起的姿态不确定性的总和. 于是有下列一组偏导方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta_e}{\partial x} &= \mp d_{\theta_e} \cdot \sin \lambda_{se} \\ \frac{\partial \theta_e}{\partial y} &= \pm d_{\theta_e} \cdot \cos \lambda_{se} \\ \frac{\partial \theta_s}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \theta_s}{\partial y} &= \pm d_{\theta_s} \\ \frac{\partial \lambda_{se}}{\partial x} &= \mp d_\lambda \cdot \sin \phi_{s\lambda} \\ \frac{\partial \lambda_{se}}{\partial y} &= \pm d_\lambda \cdot \cos \phi_{s\lambda} \end{aligned} \right\} \cdot \quad (24)$$

式中 $d_{\theta_e}, d_{\theta_s}, d_\lambda$ 为测量密度; $\phi_{s\lambda}, \phi_{e\lambda}$ 为相关角, 上下两组“+”、“-”号分别对应姿态位于 $\lambda_{se} = 0-180^\circ$ 半球和 $\lambda_{se} = 180-360^\circ$ 半球. 误差协方差阵的逆为

$$P^{-1} = TR^{-1}T^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_e}{\partial x} & \frac{\partial \theta_s}{\partial x} & \frac{\partial \lambda_{se}}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_e}{\partial y} & \frac{\partial \theta_s}{\partial y} & \frac{\partial \lambda_{se}}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{\theta_e}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{\theta_s}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_\lambda^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_e}{\partial x} & \frac{\partial \theta_e}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_s}{\partial x} & \frac{\partial \theta_s}{\partial y} \\ \frac{\partial \lambda_{se}}{\partial x} & \frac{\partial \lambda_{se}}{\partial y} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \theta_e}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{\sigma_{\theta_e}^2} + \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{\sigma_{\theta_s}^2} + \left(\frac{\partial \lambda_{se}}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{\sigma_\lambda^2} & \frac{\partial \theta_e}{\partial x} \frac{\partial \theta_e}{\partial y} \frac{1}{\sigma_{\theta_e}^2} + \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \frac{\partial \theta_s}{\partial y} \frac{1}{\sigma_{\theta_s}^2} + \frac{\partial \lambda_{se}}{\partial x} \frac{\partial \lambda_{se}}{\partial y} \frac{1}{\sigma_\lambda^2} \\ \frac{\partial \theta_e}{\partial x} \frac{\partial \theta_e}{\partial y} \frac{1}{\sigma_{\theta_e}^2} + \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \frac{\partial \theta_s}{\partial y} \frac{1}{\sigma_{\theta_s}^2} + \frac{\partial \lambda_{se}}{\partial x} \frac{\partial \lambda_{se}}{\partial y} \frac{1}{\sigma_\lambda^2} & \left(\frac{\partial \theta_e}{\partial y}\right)^2 \frac{1}{\sigma_{\theta_e}^2} + \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial y}\right)^2 \frac{1}{\sigma_{\theta_s}^2} + \left(\frac{\partial \lambda_{se}}{\partial y}\right)^2 \frac{1}{\sigma_\lambda^2} \end{pmatrix} \quad (25)$$

于是得到

$$\sigma^2(\theta_e, \theta_s, \lambda_{se}) = tr P$$

$$= \frac{\sigma_{\theta_s}^2 \sigma_\lambda^2 + \sigma_{\theta_e}^2 \sigma_\lambda^2 + \sigma_{\theta_e}^2 \sigma_{\theta_s}^2 d_\lambda^2}{(\sigma_\lambda^2 + \sigma_{\theta_s}^2 d_\lambda^2) \cdot \sin^2 \lambda_{se} + (\sigma_{\theta_s}^2 d_\lambda^2 + \sigma_{\theta_e}^2 d_\lambda^2 - 2\sigma_{\theta_s}^2 d_\lambda^2 \sin^2 \lambda_{se}) \sin^2 \phi_{s\lambda} - 2\sigma_{\theta_s}^2 d_\lambda^2 \cdot \sin \phi_{s\lambda} \sin \lambda_{se} \cdot \cos \lambda_{se}} \quad (26)$$

下面给出 $(\theta_e, \theta_s, \lambda_{se})$ 法姿态确定误差椭圆的半长轴 σ_1 , 半短轴 σ_2 和方位角 λ 的表达式

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{2} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4C_{xy}^2 \sigma_x^2 \sigma_y^2}], \quad (27)$$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{2} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4C_{xy}\sigma_x^2\sigma_y^2}], \quad (28)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left[-\frac{2C_{xy}\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} \right]. \quad (29)$$

其中

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\sigma_\lambda^2 \cdot \sin^2 \lambda_{sc} + \sigma_{\theta_e}^2 d_\lambda^2 \cdot \sin^2 \phi_{s\lambda}}{\sigma_{\theta_e}^2 \sigma_\lambda^2} \right], \quad (30)$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\sigma_{\theta_s}^2 \sigma_\lambda^2 \cos^2 \lambda_{sc} + \sigma_{\theta_e}^2 \sigma_\lambda^2 + \sigma_{\theta_e}^2 \sigma_{\theta_s}^2 d_\lambda^2 \cos^2 \phi_{s\lambda}}{\sigma_{\theta_e}^2 \sigma_{\theta_s}^2 \sigma_\lambda^2} \right], \quad (31)$$

$$C_{xy}\sigma_x\sigma_y = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\sigma_\lambda^2 \cos \lambda_{sc} \cdot \sin \lambda_{sc} + \sigma_{\theta_e}^2 d_\lambda^2 \sin \phi_{s\lambda} \cos \phi_{s\lambda}}{\sigma_{\theta_e}^2 \sigma_\lambda^2} \right], \quad (32)$$

$$\Delta = \frac{1}{\sigma_{\theta_e}^2 \sigma_{\theta_s}^2 \sigma_\lambda^2} [(\sigma_\lambda^2 + \sigma_{\theta_s}^2 d_\lambda^2) \sin^2 \lambda_{sc} + (\sigma_{\theta_s}^2 d_\lambda^2 + \sigma_{\theta_e}^2 d_\lambda^2 - 2\sigma_{\theta_s}^2 d_\lambda^2 \sin^2 \lambda_{sc}) \cdot \sin^2 \phi_{s\lambda} - 2\sigma_{\theta_s}^2 d_\lambda^2 \cdot \sin \phi_{s\lambda} \cos \phi_{s\lambda} \sin \lambda_{sc} \cos \lambda_{sc}]. \quad (33)$$

当 $\sigma_{\theta_e} = \sigma_{\theta_s} = \sigma_\lambda = \sigma_0$ 时, 计算结果说明: 若将表达式 (26) 与文献[1]中两量测量法的误差表达式(11-31)的计算结果进行比较, $(\theta_e, \theta_s, \lambda_{sc})$ 法的误差小于两量测量法的误差. 若把(26)式与文献[1]中的(11-32)式计算结果进行比较, $(\theta_e, \theta_s, \lambda_{sc})$ 法误差一般小于两量测量法的误差, 但也有些点则不然. 若把 $(\theta_e, \theta_s, \lambda_{sc})$ 法与两量测量法的误差椭圆半长轴进行比较, $(\theta_e, \theta_s, \lambda_{sc})$ 法的误差椭圆半长轴小于(或等于)两量测量法的误差椭圆半长轴.

四、姿态滤波器估计

为了用 $(\theta_e, \theta_s, \lambda_{sc})$ 法作滤波器估计, 引用 $\theta_e, \theta_s, \lambda_{sc}$ 和相应传感器扫描弦宽 $\phi_{Nh}, \phi_{sh}, \phi_s, \phi_\lambda$ 各量关系式和关系曲线.

南北地球传感器扫描弦宽 ϕ_{sh}, ϕ_{Nh} 和地球角 θ_e 关系曲线见图 5. 太阳角 θ_s 和太阳传感器扫描弦宽 ϕ_s 关系式为

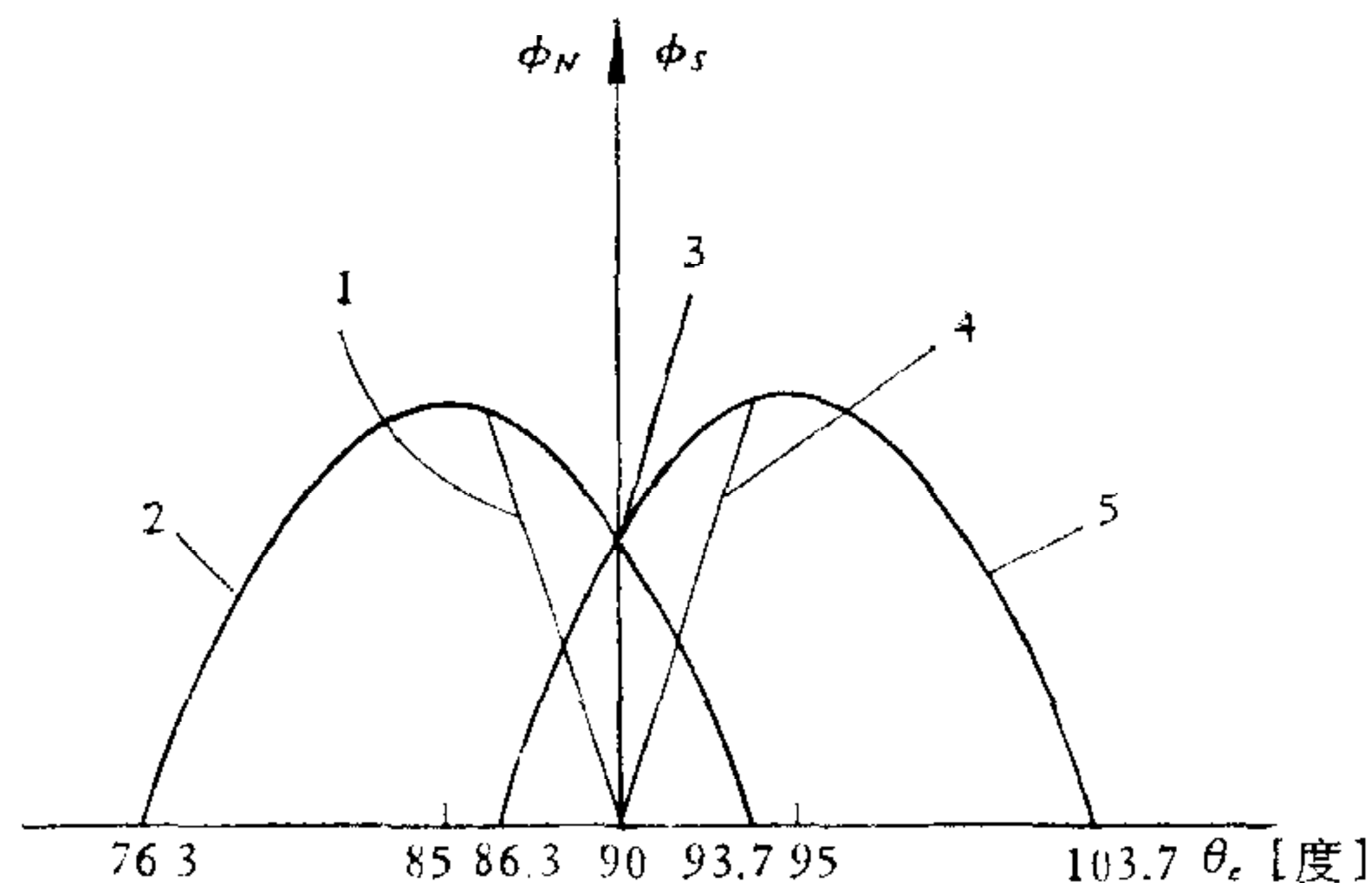


图 5 地球角 θ_e 与扫描弦宽 ϕ_{sh}, ϕ_{Nh} 关系曲线

$$1. \cos \frac{\phi_{Nh}}{2} - \cos \frac{\phi_{sh}}{2} = -2\operatorname{ctgrctg}\theta_e. \quad 2. \cos \frac{\phi_{Nh}}{2} = \frac{-\cos r \cos \theta_e + \cos \rho}{\sin \theta_e \sin r}.$$

$$3. \cos \frac{\phi_{Nh}}{2} = \cos \frac{\phi_{sh}}{2} = \frac{\cos \rho}{\sin r}. \quad 4. \cos \frac{\phi_{sh}}{2} - \cos \frac{\phi_{Nh}}{2} = 2\operatorname{ctgrctg}\theta_e$$

$$5. \cos \frac{\phi_{sh}}{2} = \frac{\cos r \cos \theta_e + \cos \rho}{\sin \theta_e \sin r}.$$

$$\theta_s = \text{ctg}^{-1}[\text{ctg}\lambda \cdot \sin(\phi_s - \phi_\beta)] \tag{34}$$

λ_{sc} 和 ϕ_λ 关系式为

$$\lambda_{sc} = \phi_\lambda - \beta_{Nh}. \tag{35}$$

式中 $\phi_\beta, \lambda, \beta_{Nh}$ 为敏感器安装角。

前述姿态确定仅是姿态的初步确定,可作为滤波器估计的初值,而滤波器估计则是姿态的精确确定。从理论上讲,滤波器最终估计的姿态值 $\hat{A}_x, \hat{A}_y, \hat{A}_z$ 或 $\hat{\alpha}, \hat{\delta}$,将是姿态标称值 A_{x0}, A_{y0}, A_{z0} 或 α_0, δ_0 的最(或次)优近似。按状态量和测量量的不同选择,分为五种方案(见表 2)。本文仅对方案 II, III, V 用推广卡尔曼滤波器,对 V 用最小二乘滤波器估计简述如下:

表 2

方案 \ 各量	状态量	测量量	特 点
I	$(\phi_{Nh} \ \phi_{sh} \ \phi_s \ \phi_\lambda)^T$	$(\phi_{Nh} \ \phi_{sh} \ \phi_s \ \phi_\lambda)^T$	量测阵为 I, 状态转移阵及状态外推很繁。
II	$(\theta_c \ \theta_s \ \lambda_{sc})^T$	$(\phi_{Nh} \ \phi_{sh} \ \phi_s \ \phi_\lambda)^T$	状态转移阵不为 I, 量测阵为对角阵。
III	$(A_x \ A_y \ A_z)^T$	$(\phi_{Nh} \ \phi_{sh} \ \phi_s \ \phi_\lambda)^T$	状态转移阵为 I, 量测阵为非对角阵。
IV	$(A_x \ A_y \ A_z)^T$	$(\theta_c \ \theta_s \ \lambda_{sc})^T$	状态转移阵为 I, 量测由 $(\phi_{Nh} \ \phi_{sh} \ \phi_s \ \phi_\lambda)^T$ 变换成 $(\theta_c \ \theta_s \ \lambda_{sc})^T$ 。
V	$(A_x \ A_y \ A_z)^T$	$(A_x \ A_y \ A_z)^T$	状态转移阵和量测阵均为 I。

(1) 方案 II 的卡尔曼滤波器估计

原理方框图见图 6。由于 $\theta_c, \theta_s, \lambda_{sc}$ 及其导数均是时间 t 的超越函数,故先把一阶非线性微分方程离散化,然后再在最新估计点的邻域线性化,求得状态量 $\theta_c, \theta_s, \lambda_{sc}$ 的转移阵

$$\Phi(K+1, K) = \begin{pmatrix} \Phi_c(K+1, K) \\ \Phi_s(K+1, K) \\ \Phi_\lambda(K+1, K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\theta_c(K+2) - 2\theta_c(K+1) + \hat{\theta}_c(K)}{\theta_c(K+1) - \hat{\theta}_c(K)} \\ 1 + \frac{\theta_s(K+2) - 2\theta_s(K+1) + \hat{\theta}_s(K)}{\theta_s(K+1) - \hat{\theta}_s(K)} \\ 1 + \frac{\lambda_{sc}(K+2) - 2\lambda_{sc}(K+1) + \hat{\lambda}_{sc}(K)}{\lambda_{sc}(K+1) - \hat{\lambda}_{sc}(K)} \end{pmatrix}. \tag{36}$$

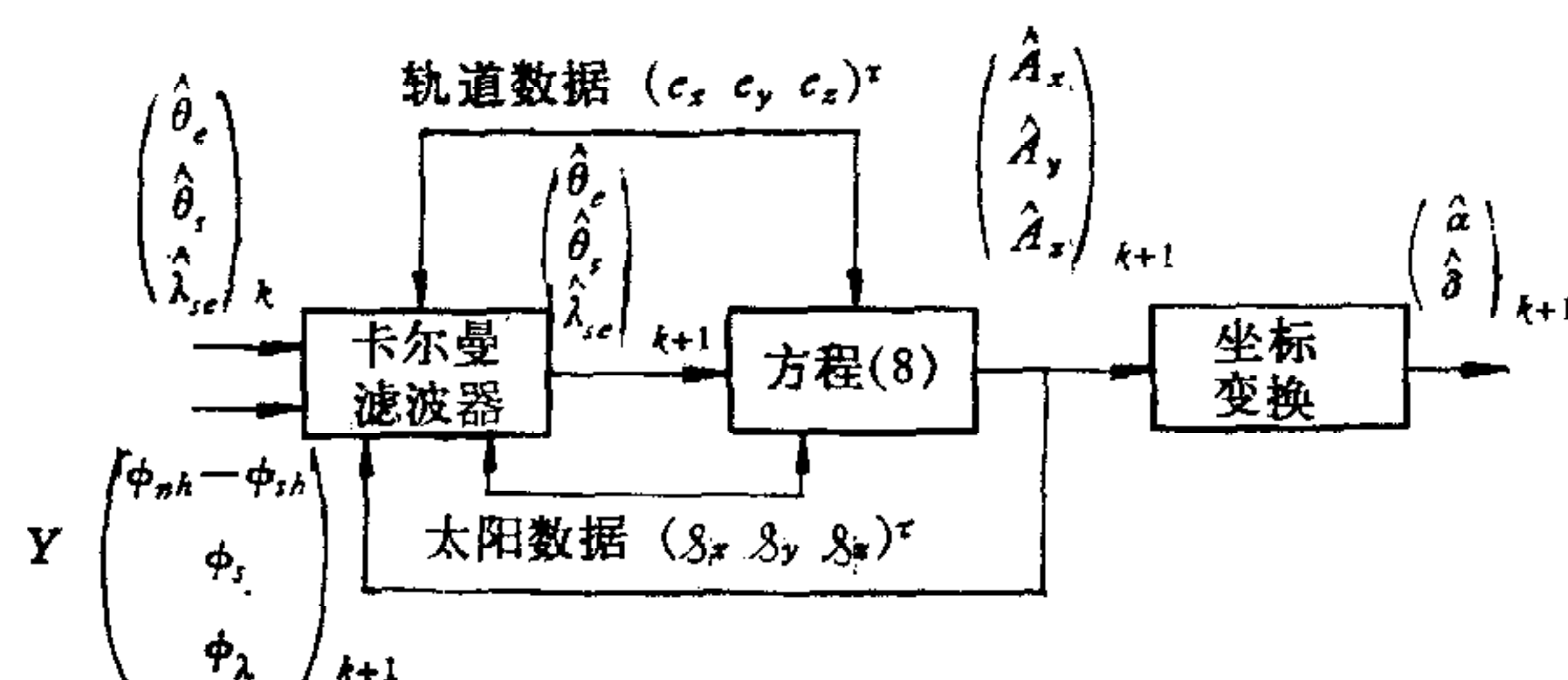


图 6 方案 II 卡尔曼滤波器估计原理方块图

式中 $\theta_c(K+i)$, $\theta_s(K+i)$, $\lambda_{sc}(K+i)$, $i=1, 2$, 按姿态确定方程和给定的卫星轨道及太阳运行规律计算。

将图 5 和(34),(35)式对最新状态估计值按泰勒级数展开,取一次近似便得量测阵

$$C(K) = \begin{pmatrix} c_c(K) \\ c_s(K) \\ c_\lambda(K) \end{pmatrix}. \quad (37)$$

式中 $c_c(K) = c_{Nh}(K) - c_{sh}(K)$.

状态外推及由外推状态推算外推量测量

$$\begin{pmatrix} \hat{\theta}'_c \\ \hat{\theta}'_s \\ \hat{\lambda}'_{sc} \end{pmatrix}_{K+1} = \begin{pmatrix} \theta_c \\ \theta_s \\ \lambda_{sc} \end{pmatrix}_{K+1}. \quad (38)$$

外推量测量 $\hat{\phi}'_{Nh}(K+1)$, $\hat{\phi}'_{sh}(K+1)$, $\hat{\phi}'_s(K+1)$, $\hat{\phi}'_\lambda(K+1)$ 由 $\hat{\theta}'_c(K+1)$, $\hat{\theta}'_s(K+1)$, $\hat{\lambda}'_{sc}(K+1)$ 按给定关系式推算。

协方差阵 P'_{K+1} 为

$$\begin{pmatrix} P'_{K+1}(\theta_c) \\ P'_{K+1}(\theta_s) \\ P'_{K+1}(\lambda_{sc}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_c^2(K+1, K) \cdot P_K(\theta_c) \\ \Phi_s^2(K+1, K) \cdot P_K(\theta_s) \\ \Phi_\lambda^2(K+1, K) \cdot P_K(\lambda_{sc}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_c(K+1) \\ Q_s(K+1) \\ Q_{\lambda_{sc}}(K+1) \end{pmatrix}. \quad (39)$$

增益阵 K_{K+1} 为

$$\begin{pmatrix} K_{K+1}(\theta_c) \\ K_{K+1}(\theta_s) \\ K_{K+1}(\lambda_{sc}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P'_{K+1}(\theta_c)c_c/[P'_{K+1}(\theta_c)c_c^2 + R_{K+1}(\theta_c)] \\ P'_{K+1}(\theta_s)c_s/[P'_{K+1}(\theta_s)c_s^2 + R_{K+1}(\theta_s)] \\ P'_{K+1}(\lambda_{sc})c_\lambda/[P'_{K+1}(\lambda_{sc})c_\lambda^2 + R_{K+1}(\lambda_{sc})] \end{pmatrix}. \quad (40)$$

P_{K+1} 阵为

$$\begin{pmatrix} P_{K+1}(\theta_c) \\ P_{K+1}(\theta_s) \\ P_{K+1}(\lambda_{sc}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - K_{K+1}(\theta_c) \cdot c_c) \cdot P'_{K+1}(\theta_c) \\ (1 - K_{K+1}(\theta_s) \cdot c_s) \cdot P'_{K+1}(\theta_s) \\ (1 - K_{K+1}(\lambda_{sc}) \cdot c_\lambda) \cdot P'_{K+1}(\lambda_{sc}) \end{pmatrix}. \quad (41)$$

状态估计为

$$\begin{pmatrix} \hat{\theta}_c(K+1) \\ \hat{\theta}_s(K+1) \\ \hat{\lambda}_{sc}(K+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\theta}'_c(K+1) + K_{K+1}(\theta_c)[Y_{K+1}(\phi_{Nh} - \phi_{sh}) - (\hat{\phi}'_{Nh} - \hat{\phi}'_{sh})_{K+1}] \\ \hat{\theta}'_s(K+1) + K_{K+1}(\theta_s)[Y_{K+1}(\phi_s) - \hat{\phi}'_s(K+1)] \\ \hat{\lambda}'_{sc}(K+1) + K_{K+1}(\lambda_{sc})[Y_{K+1}(\lambda_{sc}) - \hat{\lambda}'_{sc}(K+1)] \end{pmatrix}. \quad (42)$$

(2) 方案 III 的卡尔曼滤波器估计

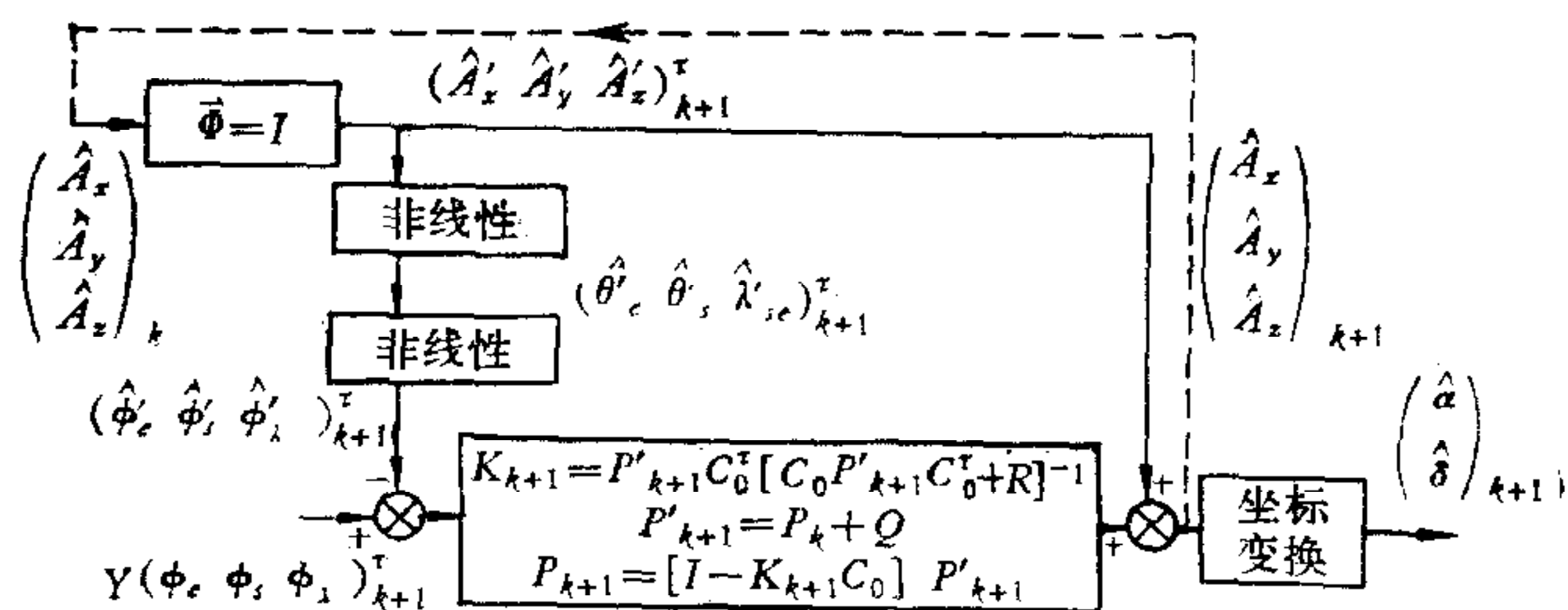


图 7 方案 III 卡尔曼滤波器原理方块图。

图 7 为原理方框图,其中

$$C_0 = \begin{pmatrix} \frac{c_{Nh} - c_{sh}}{\sin\theta_c} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^3\theta_s \sqrt{\text{ctg}^2\chi - \text{ctg}^2\theta_s}} & 0 \\ -\frac{\sin\lambda_{sc} \cdot \cos\theta_c}{\sin^2\theta_c \cdot \cos\lambda_{sc}} & \frac{\sin\lambda_{sc} \cdot \cos\theta_s}{\sin^2\theta_s \cdot \cos\lambda_{sc}} & \frac{1}{\sin\theta_c \cdot \sin\theta_s \cdot \cos\lambda_{sc}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \mathcal{L}_x & \mathcal{L}_y & \mathcal{L}_z \\ e_y\mathcal{L}_z - e_z\mathcal{L}_y & e_z\mathcal{L}_x - e_x\mathcal{L}_z & e_x\mathcal{L}_y - e_y\mathcal{L}_x \end{pmatrix}. \quad (43)$$

C_0^T 为 C_0 的转置。由外推状态 $(\hat{A}'_x \ \hat{A}'_y \ \hat{A}'_z)_{K+1}^T$ 推算量测分两步进行: (i) 由 $(\hat{A}'_x \ \hat{A}'_y \ \hat{A}'_z)_{K+1}^T$ 按(8)式推算 $\hat{\theta}'_c(K+1)$, $\hat{\theta}'_s(K+1)$, $\hat{\lambda}'_{sc}(K+1)$; (ii) 由 $\hat{\theta}'_c(K+1)$, $\hat{\theta}'_s(K+1)$, $\hat{\lambda}'_{sc}(K+1)$ 推算 $\hat{\phi}'_{Nh}(K+1)$, $\hat{\phi}'_{sh}(K+1)$, $\hat{\phi}'_s(K+1)$, $\hat{\phi}'_l(K+1)$ 。协方差阵、增益阵和状态估计各式均在图 7 中给出。

(3) 方案 V 的卡尔曼滤波器估计

滤波器计算按图 8 进行。

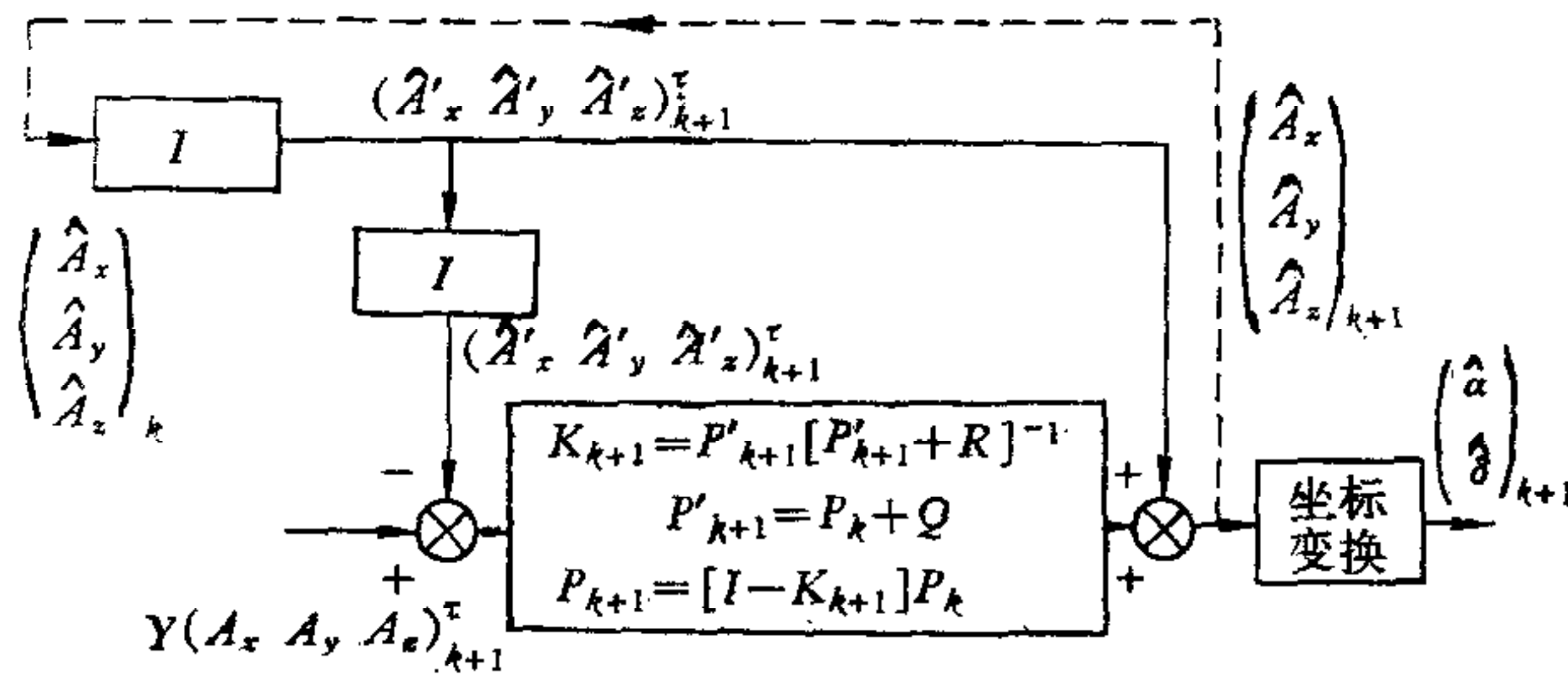


图 8 方案 V 卡尔曼滤波器估计原理方块图。

(4) 方案 V 的最小二乘滤波器估计

滤波器估计算式为:

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_x \\ \hat{A}_y \\ \hat{A}_z \end{pmatrix}_{K+1} = \begin{pmatrix} \hat{A}_x \\ \hat{A}_y \\ \hat{A}_z \end{pmatrix}_K + C_{K+1} \left\{ \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}_{K+1} - \begin{pmatrix} \hat{A}_x \\ \hat{A}_y \\ \hat{A}_z \end{pmatrix}_K \right\}, \quad (44)$$

$$C_{K+1} = \frac{c_K e^\beta}{1 + c_K e^\beta}, \quad (45)$$

$$\left. \begin{matrix} c_1 = 1 \\ \begin{pmatrix} \hat{A}_x \\ \hat{A}_y \\ \hat{A}_z \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}_1 \end{matrix} \right\}. \quad (46)$$

式中 β 为指数加权因子,取 $\beta = 0.001$ 。

在五种滤波方案中,方案 III 为直接测量量和直接状态量,实际应用比较方便。还可

利用滤波器增维方法分离系统误差(如敏感器安装误差等),从而直接消除系统误差对姿态估计的不良影响.

五、滤波器数字仿真结果

表 3, 4 是方案 II, III 推广卡尔曼滤波器仿真结果. 表 5 是方案 V 最小二乘滤波器仿真结果. 图 9, 10, 11, 12, 13 为方案 II, III 的推广卡尔曼滤波器及方案 V 的最小二乘滤波器的 $A_x, A_y, A_z, \alpha, \delta$ 误差均方根曲线.

表 3

方案	状态量	滤波时间		$20 \times \Delta t$		$200 \times \Delta t$		$1000 \times \Delta t$	
		量测误差方差 R	误差均方根	σ	σ/R	σ	σ/R	σ	σ/R
II	A_x	1.8×10^{-3}	100%	0.26×10^{-3}	15%	0.3×10^{-4}	2%	0.6×10^{-4}	4%
	A_y	1.8×10^{-3}	100%	0.13×10^{-2}	76%	0.16×10^{-3}	9%	0.6×10^{-4}	4%
	A_z	1.8×10^{-3}	100%	0.25×10^{-2}	147%	0.3×10^{-3}	18%	0.15×10^{-3}	9%
	δ	0.1°	100%	0.16°	160%	0.02°	20%	0.009°	9%
	α	0.1°	100%	0.02°	20%	0.001°	1%	0.003°	3%

表 4

III	A_x	1.8×10^{-3}	100%	0.2×10^{-3}	11%	0.12×10^{-3}	6%	0.4×10^{-4}	2%
	A_y	1.8×10^{-3}	100%	0.9×10^{-3}	50%	0.2×10^{-3}	11%	0.4×10^{-3}	22%
	A_z	1.8×10^{-3}	100%	0.12×10^{-2}	67%	0.43×10^{-3}	24%	0.8×10^{-4}	4%
	δ	0.1°	100%	0.01°	10%	0.02°	20%	0.015°	15%
	α	0.1°	100%	0.015°	15%	0.004°	4%	0.005°	5%

表 5

V 最小二乘滤波	A_x	1.8×10^{-3}	100%	0.22×10^{-3}	12%	0.86×10^{-4}	5%	0.9×10^{-4}	5%
	A_y	1.8×10^{-3}	100%	0.18×10^{-2}	100%	0.3×10^{-3}	17%	0.86×10^{-4}	5%
	A_z	1.8×10^{-3}	100%	0.1×10^{-2}	56%	0.5×10^{-3}	28%	0.2×10^{-4}	1%
	δ	0.1°	100%	0.08°	80%	0.02°	20%	0.002°	2%
	α	0.1°	100%	0.045°	45%	0.002°	2%	0.004°	4%

$\Delta t = 1.71428$ 秒.

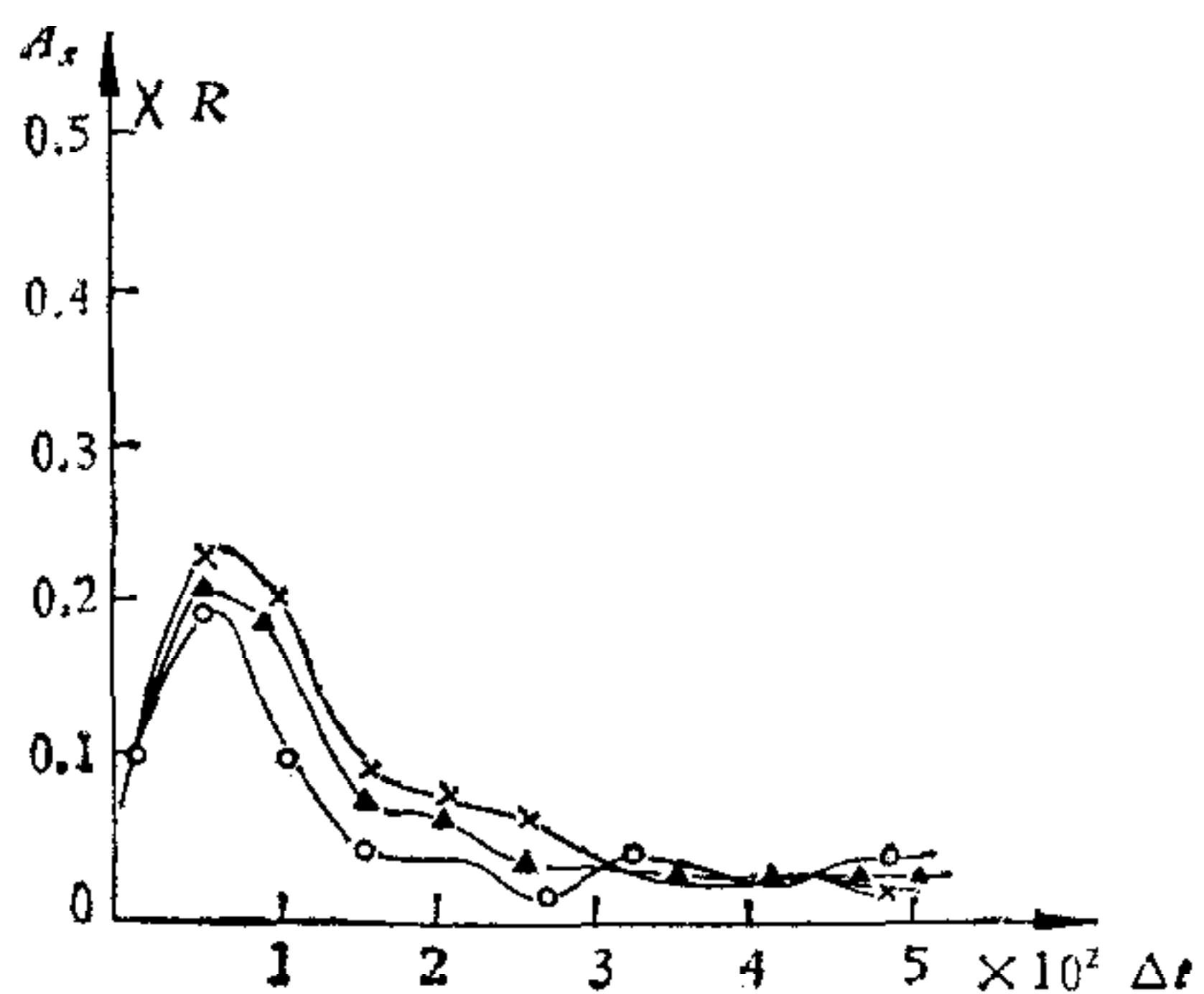


图9 A_x 误差均方根曲线

$\Delta t = 1.71428$ 秒
 $R = 1.8 \times 10^{-3}$

○——方案 II
 ×——方案 III
 △——方案 V 最小二乘

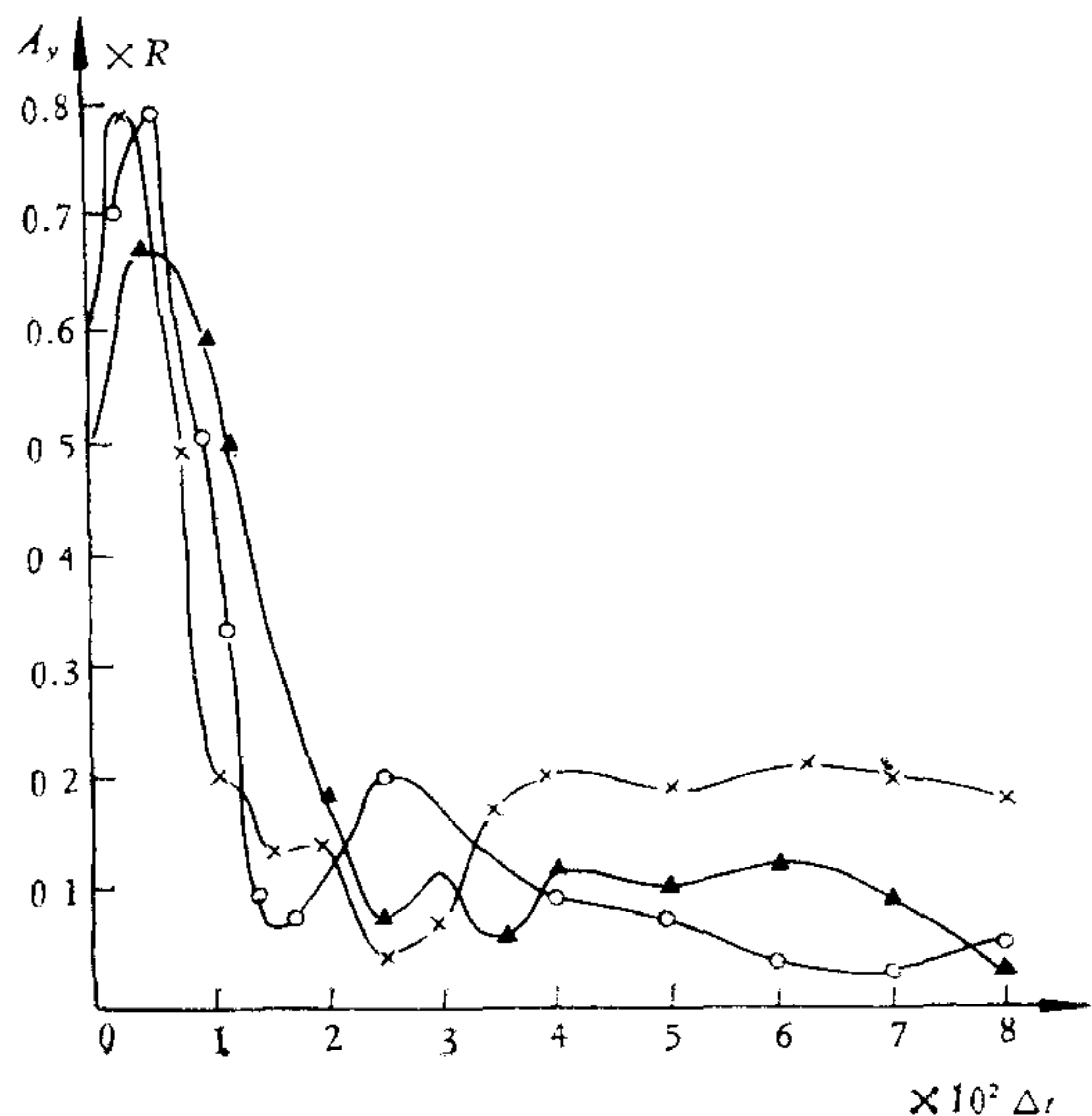


图10 A_y 误差均方根曲线

$\Delta t = 1.71428$ 秒
 $R = 1.8 \times 10^{-3}$

○——方案 II
 ×——方案 III
 △——方案 V 最小二乘

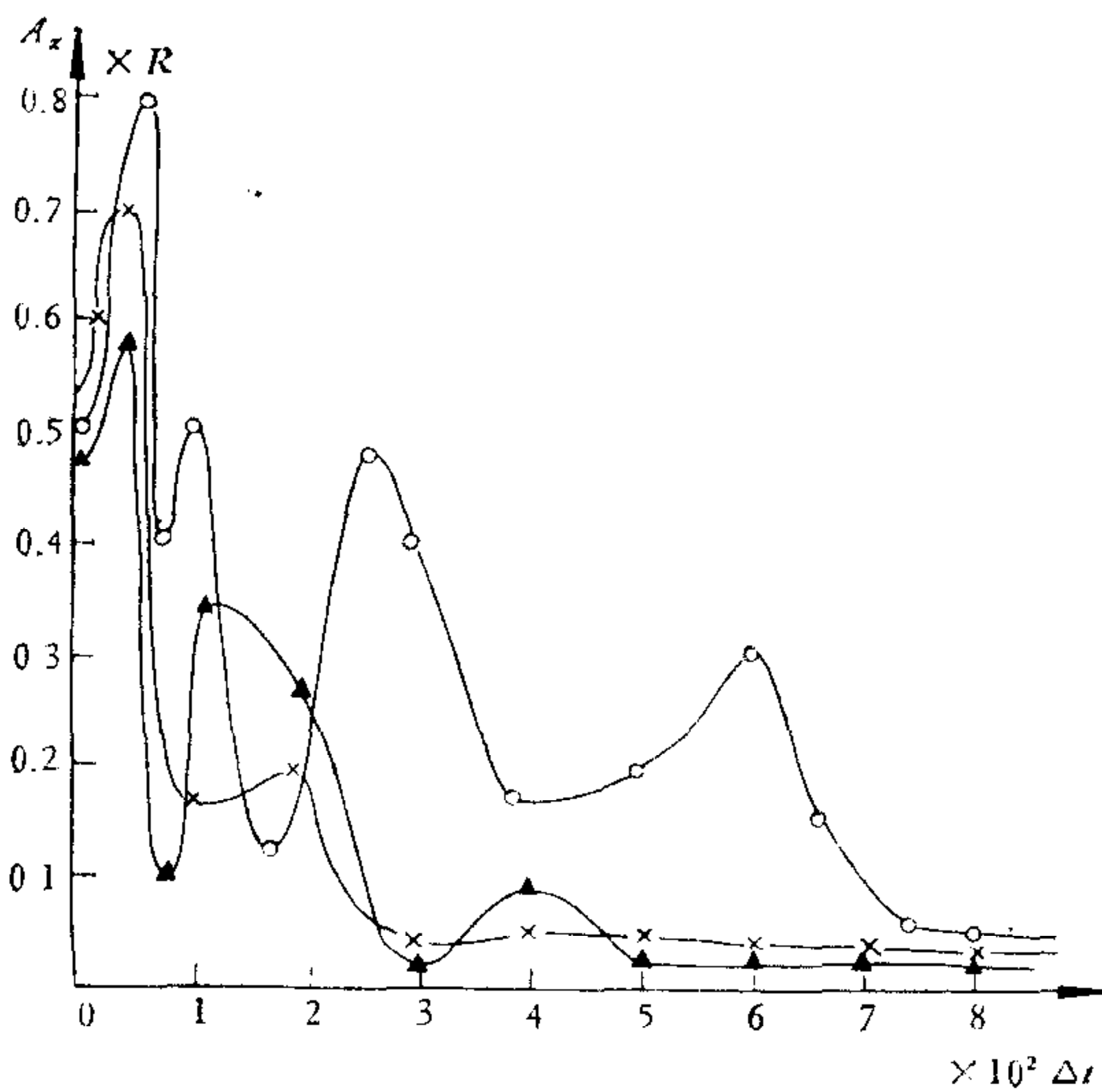


图11 A_z 误差均方根曲线

$\Delta t = 1.71428$ 秒
 $R = 1.8 \times 10^{-3}$

○——方案 II
 ×——方案 III
 △——方案 V 最小二乘

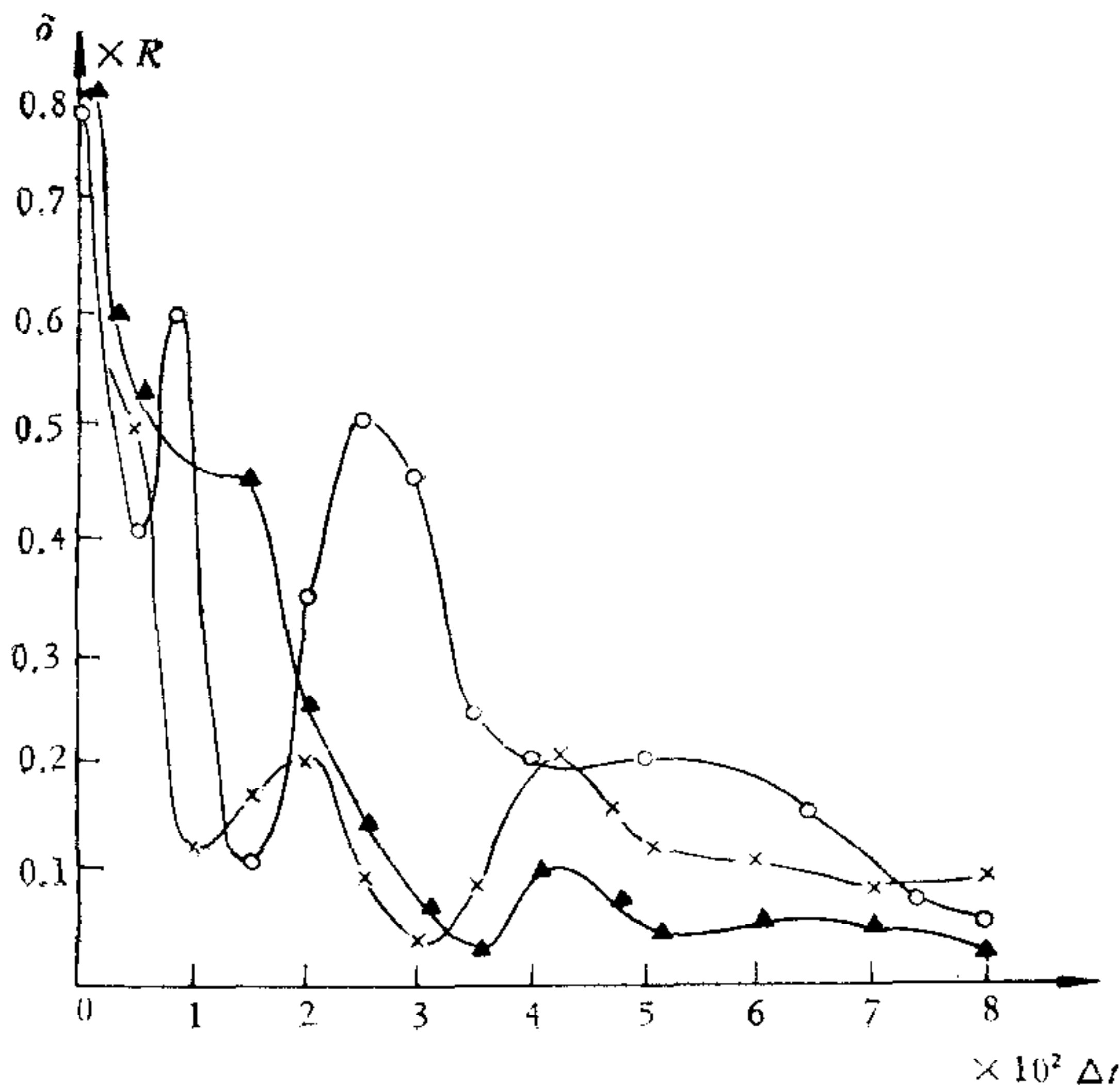


图12 δ 误差均方根曲线

$\Delta t = 1.71428$ 秒
 $R = 0.1^\circ$

○——方案 II
 ×——方案 III
 △——方案 V 最小二乘

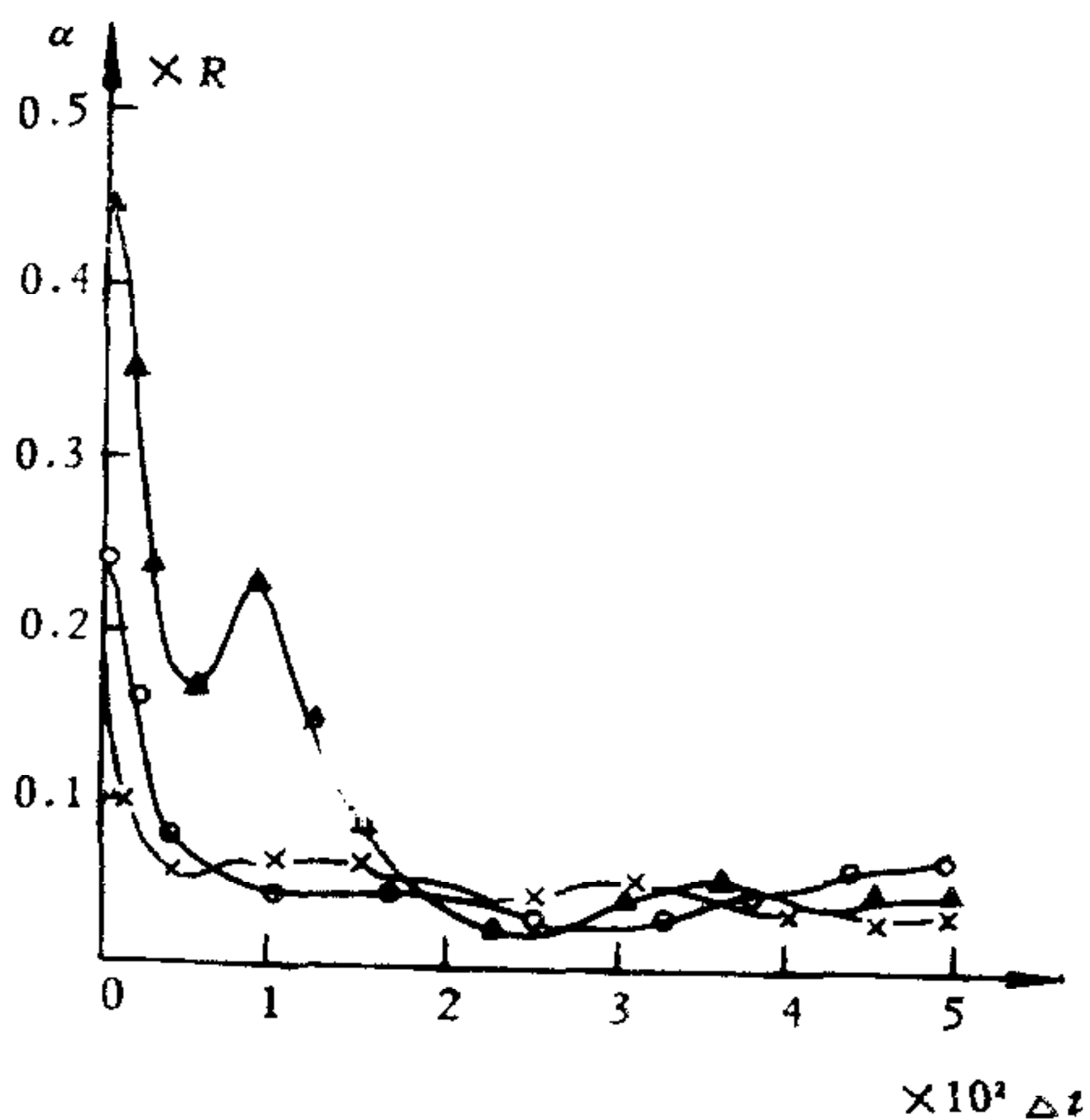


图13 α 误差均方根曲线

$\Delta t = 1.71428$ 秒
 $R = 0.1^\circ$

○——方案 II
 ×——方案 III
 △——方案 V 最小二乘

六、结 论

(1) 本文提出同时利用三个量测量的地球同步自旋卫星的姿态确定方法, 简便易行, 可唯一确定卫星姿态, 不必解算超越联立方程组, 有良好的确定精度和滤波估计, 几何限小, 利于实际应用.

(2) 同时采用三个量测量 $(\theta_e, \theta_s, \lambda_{se})$ 或 $(\phi_{Nh}-\phi_{sh}, \phi_s, \phi_\lambda)$ 的推广卡尔曼滤波方法, 效果比较好(收敛快、精度高).

(3) 在这类卫星姿态滤波器估计问题中, 采用推广卡尔曼滤波器和最小二乘滤波器达到的精度基本相同.

(4) 在这类卫星姿态滤波器估计问题中, 应用间接状态量(方案 II)、间接量测量(方案 V)和应用直接状态量、直接量测量(方案 III) 的推广卡尔曼滤波器的效果基本相同.

参 考 文 献

- [1] James R. Wertz, *Spacecraft Attitude Determination and Control*, D. Reidel Publishing Company Dordrecht: Holland/Boston: U.S.A/ London: England, 1978.
- [2] Carl Grubin, Simple Algorithm for Intersecting Two Conical Surfaces, *Journal of Spacecraft and Rockets* 14(1977), 251—252.

AN ATTITUDE DETERMINATION METHOD OF SPIN-STABILIZED GEOSTATIONARY SATELLITE

ZHOU WENZHONG HU ZHICAI

(Beijing Institute of Control Engineering)

ABSTRACT

In this paper a method is presented, in which the rotation angle from sun-earth midscan λ_{se} in addition to the earth angle θ_e and sun angle θ_s , are simultaneously used for determining spinstabilized geostationary satellite attitude.

This method gives uniquely one unambiguous attitude. Solution, simplifies the algorithm, eliminates regions of high correlation and low measurement density occurring when using two attitude measurements, and provides geometric condition where singularity occurs only if the earth and sun vectors are co-linear. By this method, the angle λ_{se} is conveniently incorporated into the kalman or least square filter.

Digital simulation showed that better accuracy of attitude determination and filter estimation can be obtained by this method.