

高阶无静差采样控制系统的动态综合

徐凤安

(中国科学院沈阳自动化研究所)

摘 要

本文利用“最小响应法”^[1,2]给出了 $N \geq 2$ 阶无静差采样控制系统的设计公式。作者指出：对于某类闭环控制系统，在给定阶跃响应最大超调量 σ_{\max} 的条件下，可以找出最佳比值 $T/T_{3\theta}$ (T 为系统的采样周期， $T_{3\theta}$ 为对象的不便克服的等效小时间常数之和)，使系统获得相应阶最大误差系数 K_{N+1} ，从而可使系统达到快速精密的控制指标。为了在工程设计中应用方便，文中还给出了二至六阶无静差的 σ_{\max} ， $T/T_{3\theta}$ ， $K_{N+1}T_{3\theta}^N$ 最佳参数组，使得这类闭环控制系统的设计最佳化和简易化。

一、引 言

对于一个线性反馈控制系统，为了达到快而精的最佳控制指标，许多学者进行了艰苦的工作。随着数字技术的日渐成熟和发展，人们倾向于采用数字控制，并结合数字控制的特点，提出了适合于工程应用的算法和参数综合公式。这些方法和公式对实际工作起着很大的指导作用，但就目前情况来看，无论是在系统工程实践方面，还是在系统数字仿真方面，如果数字控制器的运算速度和运算精度满足控制要求，同时采样周期 T 的选取又满足“仙农准则”，则剩下来的一个最关键的问题就是怎样进一步选取采样周期 T 和对象的等效不便克服掉的小时间常数 $T_{3\theta}$ 之比值，使闭环控制系统达到快而精的最佳控制指标。这一最佳综合问题的提出基于下述两个原因：其一，传感器的线性范围都有限；其二，元件动作的幅度和能量也有限。因此，系统对单位阶跃或扰动的响应，其最大超调量 σ_{\max} 必须控制在所规定的范围内。否则，因超调而进入饱和区后，在没有采用非线性控制手段的情况下，系统可能产生振荡或失控，那就谈不上什么控制指标了。所以，在限定 σ_{\max} 的前提下，使系统满足式(1.1)和(1.2)极值条件是非常必要的。

$$\partial K_{N+1}T_{3\theta}^N / \partial (T/T_{3\theta}) = 0, \quad (1.1)$$

$$\partial^2 K_{N+1}T_{3\theta}^N / \partial (T/T_{3\theta})^2 < 0. \quad (1.2)$$

由于 $T_{3\theta}$ 是对象固有的小时间常数，所以如满足上式，就可以使系统获得相应阶的最大误差系数 K_{N+1} ，同时，系统将以最少的拍节达到 σ_{\max} ，从而使系统达到快而精的控制指标。

通过归纳，本文首先给出一般采样控制系统的动态综合设计式，然后给出一类二至六阶无静差最佳动态综合式及供设计者参考的最佳参数组。

二、 $N \geq 2$ 阶无静差采样控制系统动态综合设计式

设采样控制系统由两部分组成: 一部分是连续的被控对象, 另一部分是离散的数字控制器, 系统方框图如图 1 所示。

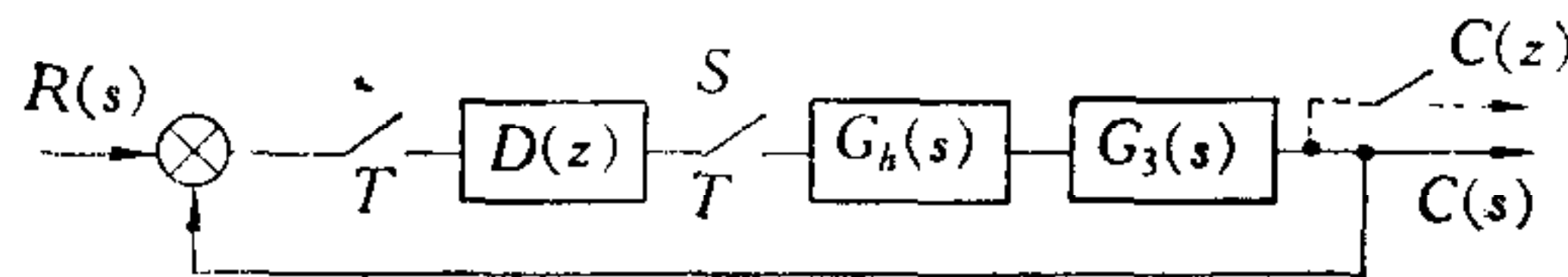


图 1

图 1 中的 S 为采样开关, S' 为虚拟的采样开关, T 为采样周期, $D(z)$ 代表能满足 N 阶无静差要求的相应数字滤波器, $G_h(s) = (1 - e^{-Ts})/s$ 为零阶保持器, $G_3(s)$ 为被控对象的传递函数, 为了使被控对象更具有代表性, 令

$$G_3(s) = \frac{K_3 \left(1 + \sum_{j=1}^m Q_j s^j \right)}{s^v \left(1 + \sum_{i=1}^n R_i s^i \right) (1 + T_0 s)} e^{-m_0 T s} e^{-\Delta m_0 T s} \quad (2.1)$$

其中, T_0 表示任何一个实际系统中必须存在而又克服不掉的等效小时间常数, 它反映到 z 平面上去以后, 尽管形成的极点在单位圆内, 然而在综合设计过程中, 也必须把它当作在单位圆外的极点来处理, 否则, 意味着任何一个实际系统都可以综合成一个传递系数为 1 的系统, 实际上这是做不到的。在实际系统中都存在不同程度的迟延环节, 令 $m_0 T + \Delta m_0 T = \tau$ 代表开环系统总的迟延时间, 其中 $m_0 = 0, 1, 2, \dots$ 为自然数, 取 $0 \leq \Delta m_0 \leq 1$ 。

由于要进行采样控制, 所以应把对象的传递函数 $G_1(s) = G_h(s)G_3(s)$ 转换到 z 平面上去, 对 $G_1(s)$ 进行修正 z 变换得:

$$G_1(s) = \frac{K_3' z^{-(1+m_0)} \left(1 + \sum_{j=1}^P B_j' z^{-j} \right) \left(1 + \sum_{j=1}^{\nu+n+1-P} B_j'' z^{-j} \right)}{(1 - z^{-1})^v \left(1 + \sum_{i=1}^q A_i' z^{-i} \right) \left(1 + \sum_{i=1}^{n-q} A_i'' z^{-i} \right) (1 + B_0 z^{-1})} \quad (2.2)$$

式(2.2)中 $B_0 = -e^{-T/T_0}$; 其分子中 $\left(1 + \sum_{j=1}^P B_j' z^{-j} \right)$ 经过因式分解可写成 $\prod_{j=1}^P (1 + b_j' z^{-1})$,

其零点 $(-b_j')$ 在单位圆外或单位圆上; 式(2.2)中的分子 $\left(1 + \sum_{j=1}^{\nu+n+1-P} B_j'' z^{-j} \right)$ 部分, 经

过因式分解可写成 $\prod_{j=1}^{\nu+n+1-P} (1 + b_j'' z^{-1})$, 其零点 $(-b_j'')$ 在单位圆内; 式(2.2)分母中的

$\left(1 + \sum_{i=1}^q A_i' z^{-i} \right)$ 部分, 经过因式分解可写成 $\prod_{i=1}^q (1 + a_i' z^{-i})$, 其极点 $(-a_i')$ 在单位圆外或

单位圆上;式(2.2)分母中的 $\left(1 + \sum_{i=1}^{n-q} A'_i z^{-i}\right)$ 部分,可写成 $\prod_{i=1}^{n-q} (1 + a'_i z^{-1})$,其极点 $(-a'_i)$ 在单位圆内.

由图 1 可知,系统的误差脉冲传递函数为:

$$W_e(z) = [1 + D(z)G_1(z)]^{-1}, \quad (2.3)$$

相应的闭环脉冲传递函数为:

$$\phi(z) = W_e(z)D(z)G_1(z). \quad (2.4)$$

N 阶无静差的误差系数为:

$$K_i \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$K_{N+1} = [\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})W_e(z)Z\{t^N/N!\}]^{-1}. \quad (2.5)$$

根据“最小响应法”原理并考虑设计要求,可以直接写出期望的误差和闭环脉冲传递函数为:

$$W_e(z) = (1 - z^{-1})^N \left(1 + \sum_{i=1}^q A'_i z^{-i}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{m_0+p} C_k z^{-k}\right) (1 + B_\theta z^{-1}) (1 - \alpha z^{-1})^{1-N}, \quad (2.6)$$

$$\phi(z) = K_0 z^{-(1+m_0)} \left(1 + \sum_{j=1}^P B'_j z^{-j}\right) \left(1 + \sum_{h=1}^{N+q} D_h z^{-h}\right) (1 - \alpha z^{-1})^{1-N}. \quad (2.7)$$

必须指出,被控对象 $G_1(z)$ 中表征那些在单位圆外和单位圆上的极点 $(-A'_i)$ 和零点 $(-B'_j)$,必须在(2.6),(2.7)式分子中反映出来,否则,就要反映到数字滤波器 $D(z)$ 中去. 这样在用专门的数字控制器或微处理机实现 $D(z)$ 时,不可能严格复现表征极零点的系数 $(-A'_i)$ 和 $(-B'_j)$. 即使能实现,也会因对象参数的摄动,引起 $(-A'_i)$ 和 $(-B'_j)$ 的改变,从而导致系统振荡. 还要特别指出的是假若在 $D(z)$ 中出现了零点 $(-a'_i)$, 输出就会在采样点上产生明显的振荡,称为显振荡. 假若在 $D(z)$ 中出现了极点 $(-b'_j)$, 输出就会在采样点间产生振荡,称为隐振荡. 同样等效时间常数 T_θ 所形成的极点 $(-B_\theta)$, 尽管在单位圆内也是综合不掉的,所以必须要反映到(2.6)式中去. 系数 D_h 和 C_k 为式(2.6),(2.7)中待定的平衡项系数,最后反映到 $D(z)$ 中去. 定义一个系数 α , 使之在系统的动态特性和误差系数 K_{N+1} 之间起调合作用,称之为调合系数. 对于动态过程小于一次振荡的系统来说, α 在 0 和 1 之间取值.

系统的数字滤波器 $D(z)$ 为:

$$D(z) = \phi(z)W_e^{-1}(z)G_1^{-1}(z)$$

$$= \frac{K_0 \left(1 + \sum_{h=1}^{N+q} D_h z^{-h}\right) \left(1 + \sum_{i=1}^{n-q} A'_i z^{-i}\right)}{K'_3 (1 - z^{-1})^{N-\nu} \left(1 + \sum_{k=1}^{m_0+p} C_k z^{-k}\right) \left(1 + \sum_{j=1}^{\nu+n+1-p} B'_j z^{-j}\right)}. \quad (2.8)$$

通过式(2.5)可得误差系数为:

$$K_{N+1} = T^{1-N} (1 - \alpha)^{N-1} \left[\left(1 + \sum_{i=1}^q A'_i\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{m_0+p} C_k\right) (1 + B_\theta) \right]^{-1}. \quad (2.9)$$

到此,可以总结出 $N \geq 2$ 阶无静差采样控制系统的动态综合步骤如下:

(1) 求出被控对象(包括零阶保持器和控制器 $D(z)$ 的延迟时间 τ_0) 的修正 z 变换 $G_1(z)$, 并找出其在单位圆外和单位圆上的极点 $(-a'_i)$ 和零点 $(-b'_j)$, 从而, 确定出式(2.2) 的诸系数。

(2) 展开恒等式

$$1 - W_c(z) = \phi(z), \quad (2.10)$$

利用等号两边 z^{-i} 对应项系数相等的原则, 可得 $(1 + N + q + m_0 + P)$ 个联立方程式, 并可求得 $D_k = f_k(B'_j, A'_i, \alpha)$, $C_k = q_k(B'_j, A'_i, \alpha)$, $K_0 = g_0(B'_j, A'_i, \alpha)$ 。

(3) 试选定调合系数 α 后 (α 趋向 1 时, σ_{\max} 减小, K_{N+1} 也减小), 就可求得系数 C_k , D_k , K_0 。再利用式(2.8)确定所需要的 $D(z)$ 。

(4) 整个综合系统的参数求出后, 可在计算机上作改变系统开环增益的仿真实验, 从而更清楚地了解所设计系统增益的变化同系统 σ_{\max} 和 t_r (过渡过程时间) 之间的关系, 也可输入等效正弦进行跟踪精度的仿真实验(具体设计例子从略)。

通过上述综合过程, 可以看到系统的采样周期 T 是凭经验大致选取的, α 系数也是在反复求取系统动态特性中确定的。这显然存在着一定的盲目性及在设计上的重复计算, 设计出的系统也不一定是最佳的。针对这些问题, 本文结合一类控制系统作最佳化的动态综合, 尤其是对采样周期 T 的最佳确定, 在理论上会对采样控制系统的动态综合起到一定的指导作用。

三、一类二阶无静差采样控制系统的最佳设计公式和数组表

见图 1, 当 $\nu = 0$ 时, 可把式(2.1)等效成:

$$G_3(s) = K_3 e^{-m_0 T s} (1 + T_{30} s)^{-1}.$$

其中 T_{30} 为系统的等效不便克服的小时间常数之和(包括 $\Delta m_0 T$), 由式(2.2)可以写出该对象的脉冲传递函数:

$$G_1(z) = K'_3 z^{-(1+m_0)} (1 + B_{30} z^{-1})^{-1}. \quad (3.1)$$

其中 $B_{30} = -e^{-T/T_{30}}$, $K'_3 = K_3(1 + B_{30})$, 利用第二节的设计原则和公式, 不难写出这类系统的期望综合式:

$$\phi(z) = K_0 z^{-(1+m_0)} (1 + D_1 z^{-1} + D_2 z^{-2}) (1 - \alpha z^{-1})^{-1}, \quad (3.2)$$

$$W_c(z) = (1 - z^{-1})^2 \sum_{k=0}^{m_0} C_k z^{-k} (1 + B_{30} z^{-1}) (1 - \alpha z^{-1})^{-1}, \quad (3.3)$$

$$K_3 T_{30}^2 = (1 - \alpha) \left[\left(\frac{T}{T_{30}} \right)^2 \sum_{k=0}^{m_0} C_k (1 + B_{30}) \right]^{-1}. \quad (3.4)$$

在给定阶跃响应的最大超调量 σ_{\max} 的情况下, 可归纳出待设计的参数关系公式:

$$C_k = (1 - \alpha) \sum_{j=0}^k (-1)^j (k - j) B_{30}^j + \sum_{j=0}^k (-1)^j B_{30}^j. \quad (3.5)$$

其中 $k = 0, 1, 2, \dots, m_0$, 当 $k - j < 0$ 时, 其相应项取零值, 有归纳式:

$$1 + \sigma_{\max} = (1 - \alpha) \sum_{i=0}^{m_0} (-1)^i (m_0 + 1 - i) B_{30}^i + \sum_{i=0}^{m_0+1} (-1)^i B_{30}^i. \quad (3.6)$$

其中在 $m_0 + 1 - i < 0$ 时, 相应项取零值.

在 $m_0 = 0$ 时, 满足最佳条件式(1.1), (1.2)可得约束方程式:

$$1 + \sigma_{\max} + (1 - \sigma_{\max})T/T_{3\theta} + \sigma_{\max}e^{T/T_{3\theta}} - e^{-T/T_{3\theta}} = 0. \quad (3.7)$$

在给定 σ_{\max} 的条件下, 由式(3.7), 利用“等间距搜索法”, 可以找出使 $K_3 T_{3\theta}^2$ 获得最大值时的最佳比值 $T/T_{3\theta}$. 对于 $m_0 > 0$ (意味着系统的总迟延时间 $\tau + \tau_0 = m_0 T + \Delta m_0 T$), 可直接通过式(3.6), (3.5), (3.4) 利用搜索法找出最佳比值 $T/T_{3\theta}$, 从而可得供设计参考用的表 1. 依据表中的数组, 可画出最佳曲线族. 在实际设计中, 对数组中间点的设计参数值可以从曲线中获得.

表 1 一类二阶无静差最佳参数组

σ_{\max}	m_0 最佳值	0		1		2		3	
		$T/T_{3\theta}$	$K_3 T_{3\theta}^2$	$T/T_{3\theta}$	$K_3 T_{3\theta}^2$	$T/T_{3\theta}$	$K_3 T_{3\theta}^2$	$T/T_{3\theta}$	$K_3 T_{3\theta}^2$
5%		4.05	2.02×10^{-3}	4.15	4.89×10^{-4}	4.15	2.16×10^{-4}	4.15	1.21×10^{-4}
15%		2.70	1.22×10^{-2}	2.90	2.68×10^{-3}	2.90	1.16×10^{-3}	2.90	6.43×10^{-4}
30%		1.75	5.00×10^{-2}	2.05	9.04×10^{-3}	2.10	3.73×10^{-3}	2.10	2.04×10^{-3}
50%		1.03	2.10×10^{-1}	1.54	2.55×10^{-2}	1.55	9.63×10^{-3}	1.6	5.11×10^{-3}

设计中对 m_0 的确定方法如下: 假如已经辨识出系统为一个惯性环节, 其时间常数为 T_{θ} , 迟延时间为 τ , 数字滤波器 $D(z)$ 的运算迟延时间为 τ_0 , 则 m_0 选取同时满足式(3.8)和不等式(3.9)的最大值, 就可获得最佳设计.

$$T/(\tau + \tau_0 - m_0 T + T_{\theta}) = T/T_{3\theta} \text{ (最佳比)}, \quad (3.8)$$

$$\tau + \tau_0 - m_0 T \geq 0. \quad (3.9)$$

例如, 已辨识出系统的 $\tau = 0.5$ 秒; $T_{\theta} = 0.1$ 秒; $\tau_0 = 0.001$ 秒, 当要求 $\sigma_{\max} = 30\%$ 时, 利用表 1 把不同的 m_0 值和相应的最佳比值 $T/T_{3\theta}$ 代入式(3.8), (3.9)中, $m_0 = 0, 1, 2$ 均满足, 当把 $m_0 = 3$ 代入不等式(3.9)中, 将出现 -0.02 秒 < 0 , 因此, 只能选取最大的 $m_0 = 2$, 依表 1 可得 $T/T_{3\theta} = 2.1$, $K_3 T_{3\theta}^2 = 3.73 \times 10^{-3}$ 的最佳值, 达 σ_{\max} 时间快, 而且加速度误差系数 K_3 也最高.

四、一类三阶无静差采样控制系统的最佳设计公式和数组表

对象仍然由式(3.1)给出时, 用第二节提出的设计原则和公式, 可直接写出三阶无静差采样控制系统的综合设计式:

$$\phi(z) = K_0 z^{-(1+m_0)} \left(1 + \sum_{h=1}^3 D_h z^{-h} \right) (1 - \alpha z^{-1})^{-2}, \quad (4.1)$$

$$W_c(z) = (1 - z^{-1})^3 \sum_{k=0}^{m_0} C_k z^{-k} (1 + B_{3\theta} z^{-1}) (1 - \alpha z^{-1})^{-2}, \quad (4.2)$$

$$K_4 T_{3\theta}^3 = (1 - \alpha)^2 \left[\left(\frac{T}{T_{3\theta}} \right)^3 \sum_{k=0}^{m_0} C_k (1 + B_{3\theta}) \right]^{-1}. \quad (4.3)$$

在给定阶跃响应的最大超调量 σ_{\max} 时, 可归纳出待设计用的参数关系式:

$$C_k = (1 - \alpha)^2 \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{i=0}^{k-1-j} (-1)^j B_{3\theta}^j i + 2(1 - \alpha) \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (k - i) B_{3\theta}^i + \sum_{i=0}^k (-1)^i B_{3\theta}^i, \quad (4.4)$$

$$1 + \sigma_{\max} = (1 - \alpha)^2 \sum_{j=0}^{m_0-1} \sum_{i=0}^{m_0-j} (-1)^j B_{3\theta}^j i + 2(1 - \alpha) \sum_{i=0}^{m_0} (-1)^i (m_0 + 1 - i) B_{3\theta}^i + \sum_{i=0}^{m_0+1} (-1)^i B_{3\theta}^i. \quad (4.5)$$

上两式中 $k = 0, 1, 2, \dots, m_0$. 当 $k - 2 < 0$, $k - 1 - j < 0$, $m_0 - 1 < 0$, $m_0 - j < 0$ 时, 其相应项均取零值.

在 $m_0 = 0$ 时, 满足最佳条件式(1.1), (1.2), 可得约束方程式:

$$3(1 + \sigma_{\max}) + (2 - \sigma_{\max}) \frac{T}{T_{3\theta}} - 3(\sigma_{\max} e^{T/T_{3\theta}} + e^{-T/T_{3\theta}}) - \frac{T}{T_{3\theta}} e^{-T/T_{3\theta}} = 0. \quad (4.6)$$

仍然用搜索法, 在给定 σ_{\max} 的条件下, 找出最大 $K_4 T_{3\theta}^3$ 对应下的最佳比值 $T/T_{3\theta}$. 对 $m_0 > 0$ 时, 可直接通过式(4.5), (4.4), (4.3)找出最大 $K_4 T_{3\theta}^3$ 对应下的最佳比值 $T/T_{3\theta}$, 由此, 可得到供设计参考用的最佳参数组表 2. 对 m_0 的最后和最佳的确定方法如前节所述.

表 2 一类三阶无静差最佳参数组

σ_{\max}	m_0 最佳值	0		1		2	
		$T/T_{3\theta}$	$K_4 T_{3\theta}^3$	$T/T_{3\theta}$	$K_4 T_{3\theta}^3$	$T/T_{3\theta}$	$K_4 T_{3\theta}^3$
5%		4.34	4.23×10^{-6}	4.4	5.08×10^{-7}	4.4	1.49×10^{-7}
10%		3.48	3.33×10^{-5}	3.6	3.33×10^{-6}	3.6	9.65×10^{-7}
25%		2.25	5.45×10^{-4}	2.5	4.71×10^{-5}	2.5	1.31×10^{-5}
45%		1.39	5.01×10^{-3}	1.8	3.10×10^{-4}	1.9	7.89×10^{-5}
60%		0.92	2.18×10^{-2}	1.5	8.44×10^{-4}	1.6	1.99×10^{-4}

从表 1 和表 2, 可以发现, 对同一个 σ_{\max} 值, 当 $m_0 \geq 1$ 以后, 其最佳比值 $T/T_{3\theta}$ 几乎不变(当 $\sigma_{\max} > 30\%$ 以后, 随着 m_0 值的增加, $T/T_{3\theta}$ 略有增加). 这对确定高 m_0 系统最佳参数组是有重要参考价值的.

五、一类四, 五, 六阶无静差控制系统的最佳设计公式和数组表

在某些特殊的工程中, 有可能用到比三阶无静差更高的无静差控制系统, 为此, 对于被控对象如式(3.1)表示时, 依式(2.7), (2.6), (2.5), 在 $m_0 = 0$ 时, 可直接写出 N 阶无静差

的期望综合式:

$$\phi(z) = K_0 z^{-1} \left(1 + \sum_{i=1}^N D_i z^{-i} \right) (1 - \alpha z^{-1})^{1-N}, \quad (5.1)$$

$$W_c(z) = (1 - z^{-1})^N (1 + B_{3\theta} z^{-1}) (1 - \alpha z^{-1})^{1-N}, \quad (5.2)$$

$$K_{N+1} T_{3\theta}^N = (1 - \alpha)^{N-1} (T/T_{3\theta})^{-N} (1 + B_{3\theta})^{-1}. \quad (5.3)$$

满足式(1.1),(1.2)的最佳条件,可得最佳约束方程式:

$$N(1 + \sigma_{\max}) + (N - 1 - \sigma_{\max}) \frac{T}{T_{3\theta}} - N(\sigma_{\max} e^{T/T_{3\theta}} + e^{-T/T_{3\theta}}) - (N - 2) \frac{T}{T_{3\theta}} e^{-T/T_{3\theta}} = 0. \quad (5.4)$$

在 σ_{\max} 给定的条件下,当 $N = 4, 5, 6$ 时,可得最佳参数组表 3.

在 $m_0 = 1$ 时,可直接给出期望综合式:

$$\phi(z) = K_0 z^{-2} \left(1 + \sum_{i=1}^N D_i z^{-i} \right) (1 - \alpha z^{-1})^{1-N}, \quad (5.5)$$

$$W_c(z) = (1 - z^{-1})^N (1 + C_1 z^{-1}) (1 + B_{3\theta} z^{-1}) (1 - \alpha z^{-1})^{1-N}, \quad (5.6)$$

$$K_{N+1} T_{3\theta}^N = (1 - \alpha)^{N-1} (T/T_{3\theta})^{-N} (1 + C_1)^{-1} (1 + B_{3\theta})^{-1}. \quad (5.7)$$

归纳出参数约束方程式:

$$\sum_{i=0}^{N-2} i \alpha^2 + (N - 1)(B_{3\theta} - N) \alpha + (B_{3\theta} - N)(B_{3\theta} + 1 - N) + (N - 1)B_{3\theta} - \sum_{i=0}^{N-2} i - \sigma_{\max} = 0, \quad (5.8)$$

表 3 一类四、五、六阶无静差最佳参数组

无静差阶次 N	m_0	σ_{\max}	$T/T_{3\theta}$	$K_{N+1} T_{3\theta}^N$
四	0	5%	4.47	5.37×10^{-9}
		15%	3.05	4.28×10^{-7}
		35%	1.88	2.70×10^{-5}
	1	5%	4.70	3.10×10^{-10}
		20%	2.92	8.40×10^{-8}
五	0	5%	4.52	4.89×10^{-12}
		15%	3.13	1.85×10^{-9}
		35%	1.96	2.98×10^{-7}
	1	5%	4.71	1.43×10^{-13}
		20%	3.10	2.00×10^{-10}
六	0	5%	4.57	3.43×10^{-15}
		15%	3.17	4.87×10^{-12}
		35%	2.00	2.65×10^{-9}
	1	5%	4.70	5.00×10^{-17}
		20%	3.15	2.74×10^{-13}

$$C_1 = N - B_{30} - (N - 1)\alpha. \quad (5.9)$$

在此可直接利用式(5.7), (5.8), (5.9), 用搜索法直接求得 σ_{\max} , T/T_{30} , $K_{N+1}T_{30}^N$ ($N = 4, 5, 6$) 最佳参数组, 见表 3.

前几节所论及的一类采样控制系统, 达 σ_{\max} 时间均为 $1+m_0$ 拍节, 反应速度是足够快的. 在给定 σ_{\max} 的条件下, 不能随意通过缩短采样周期来得到系统的最大误差系数 K_{N+1} . 这里存在一个最佳比值 T/T_{30} 和一个最佳(最大)的 m_0 值. 从表 1 至表 3 还可以看出, 在相同的 σ_{\max} 时, 无静差阶次越高, T/T_{30} 值也随着增加, 但相对变化比较缓慢, 随着 σ_{\max} 的增加, T/T_{30} 值随之减少; T_{30} 越小, K_{N+1} 就可设计得高些. 在实际设计和调试中, 依据已给的最佳数组, 就能很容易地将系统调到最佳状态.

六、设计举例

为了便于读者掌握上述一类采样控制系统的最佳动态综合过程, 特举一例. 已知被控对象的传递特性为:

$$G_3(s) = \frac{35.4(1 + 0.1s)e^{-0.008s}}{(1 + 0.082s)(1 + 2 \times 0.665s/73.5 + s^2/73.5^2)(1 + 0.005s)},$$

限定阶跃的最大超调量 $\sigma_{\max} = 30\%$, 并达到三阶无静差控制之目的.

设计: 依据文献[3]的式(1.1), 可以算出对象的等效小时间常数之和为 $T_{30} = 0.0225727$ 秒, 由式(3.8)和(3.9)知本例的 $m_0 = 0$, 在 $\sigma_{\max} = 30\%$ 时, 依表 2 插值查得最佳比 $T/T_{30} = 2$, 此时有 $K_4 T_{30}^3 = 9.86 \times 10^{-4}$, 可得冲击加速度误差系数为 $K_4 = 85.6 \text{ 秒}^{-3}$.

求最佳数字滤波器 $D(z)$: 已知 T_{30} , 把对象等效地写成 $G_3(s) = 35.4/(1 + 0.0225727s)$. 由式(2.2)得 $G_1(z) = 30.609z^{-1}/(1 - 0.13534z^{-1})$, 由式(4.5)得 $\alpha = 0.91767$, 由式(4.1), (4.2)和 $m_0 = 0$ 有:

$$\phi(z) = K_0 z^{-1}(1 + D_1 z^{-1} + D_2 z^{-2} + D_3 z^{-3})(1 - 0.91767z^{-1})^{-2},$$

$$W_c(z) = (1 - z^{-1})^3(1 - 0.13534z^{-1})(1 - 0.91767z^{-1})^{-2}.$$

由式(2.10)得 $K_0 = 1.3$, $D_1 = -1.97223$, $D_2 = 1.08155$, $D_3 = -1.04108$. 再由式(2.8)得:

$$D(z) = 0.042471 \times (1 - 1.97223z^{-1} + 1.08155z^{-2} - 0.104108z^{-3})(1 - z^{-1})^{-3}.$$

至于 $D(z)$ 本身便于实现的最佳变化形式问题可参看文献[4]的第 13 章.

下面给出该闭环控制系统在 DJS-130 计算机上仿真实验的结果. 上机模拟图为图 2.

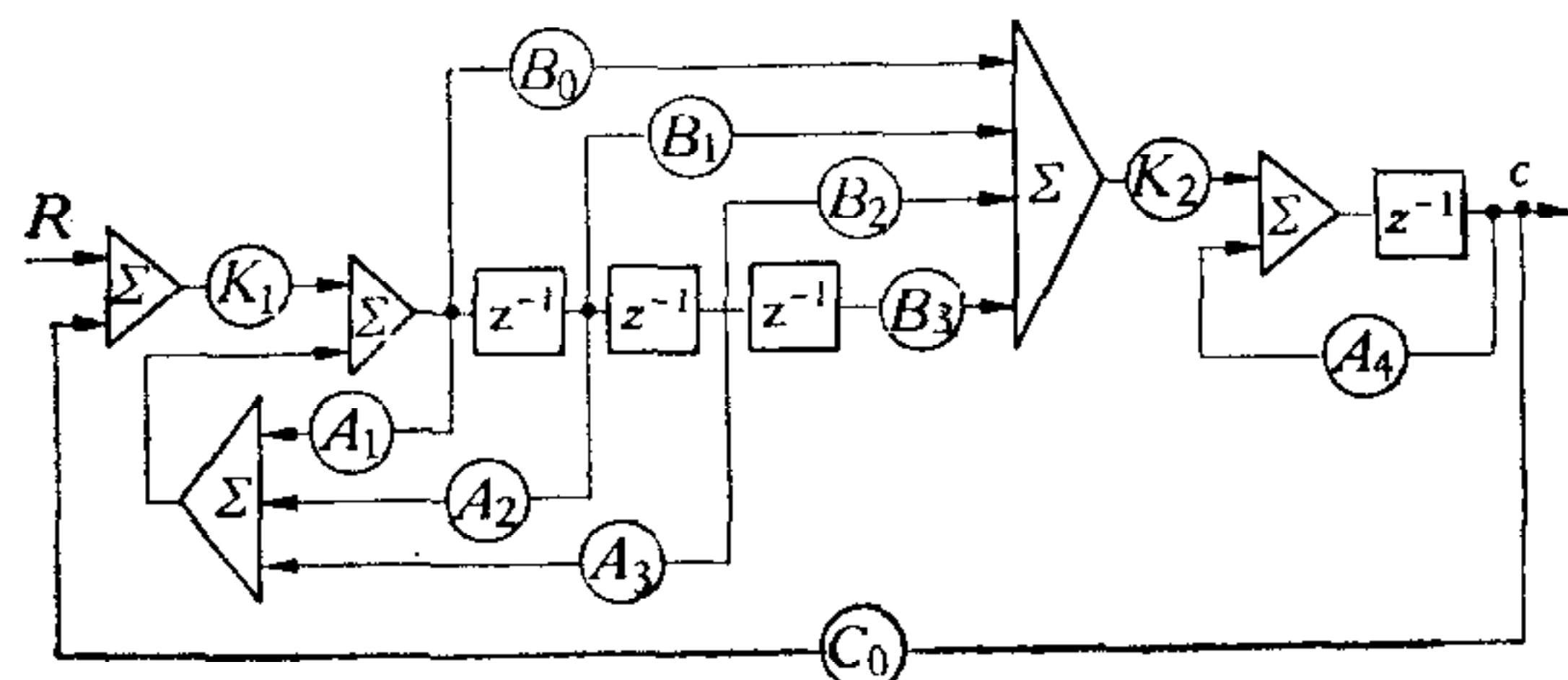


图 2

第一个实验是输入单位阶跃 $R = u(nT)$, 系统输出为 $C_1(nT)$. 通过对数据的观察, 可知达到 $\sigma_{\max} = 30\%$ 的时间为 0.045 秒, 而达 5% 的时间 $t_s = 8T = 0.36$ 秒. 第二个实验是输入等效正弦(模拟飞行体的位置输入) $R = \sin(0.4t)$, 系统输出为 $C_2(nT)$. 通过对记录数据的观察, 可得在输入最大角速度 $\omega = 0.4$ 弧度/秒, 最大角加速度 $\dot{\omega} = 0.16$ 弧度/秒², 最大冲击角加速度 $\ddot{\omega} = 0.064$ 弧度/秒³ 时, 只需经过 $67T \doteq 3$ 秒, 系统便可以进入稳态跟踪. 其最大跟踪角误差为 $\varepsilon < 15$ 角秒(相应的仿真实验程序清单和宽行打字机记录略).

通过此例, 不难看出应用本文所介绍的方法和设计思想, 去综合一类采样控制系统, 可以达到最佳、快速、准确、精密的综合指标.

最后, 感谢童世璜先生对本文的指导和帮助.

参 考 文 献

- [1] Julius T. Tou, Digital and Sampled-data Control Systems, 1959.
- [2] Benjamin C. Kuo, Analysis and Synthesis of Sampled-data Control Systems, 1964.
- [3] 徐凤安, 高阶无静差随动系统的动态综合, 信息与控制, 9 (1980), No. 2.
- [4] Harry Y-F Lan, Analog and Digital Filters: Design and Realization, 1979, Chapter 13, 1.

OPTIMUM DYNAMIC SYNTHESIS OF HIGH ORDER ASTATIC SAMPLED-DATA CONTROL SYSTEM

XU FEN'AN

(Shenyang Institute of Automation, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper, by using "the fastest response method", A formula for the design of $N \geq 2$ order astatic sampled data control system is proposed. It was shown that for a class of closed loop control systems with a given maximum step response overshoot σ_{\max} , the optimum ratio $T/T_{3\sigma}$ (T is the sample period, $T_{3\sigma}$ is the equivalent time constant of the controlled object) could be found, and thus the error coefficient K_{N+1} of corresponding order systems could be obtained with the result of achieving a fast and accurate system. Moreover, a list of optimum parameters σ_{\max} , $T/T_{3\sigma}$, K_{N+1} , $T_{3\sigma}^N$ had been included to make the optimal design of the closed loop control system easier.