

随机服务系统一般模型的仿真和应用

孙国基 汪荣鑫 宣慧玉 贺大愚
(西安交通大学)

摘 要

本文提出了多服务台随机服务系统的一般模型,给出了仿真框图及通用计算程序。对某些系统的仿真结果进行理论分析和计算。分析表明:对有理论计算公式的系统,理论值和仿真结果基本一致;对难以用解析理论加以处理的系统,计算机仿真可提供数值解。最后介绍了该仿真模型在机械加工自动线设计中的应用。

一、引 言

计算机网络、通讯系统、交通管理、企业设计及计划调度等各种工程技术和社会经济系统都属于“离散事件系统”。在这类系统中,系统状态的变化是在离散时刻发生的,由于离散事件的产生往往是随机的,因此系统会产生所谓“拥挤”或“阻塞”现象,为此必须用排队论(或称随机服务理论)加以解决。

图1为一般多服务台串并联随机服务系统。它由若干个服务段串联而成,每一段又

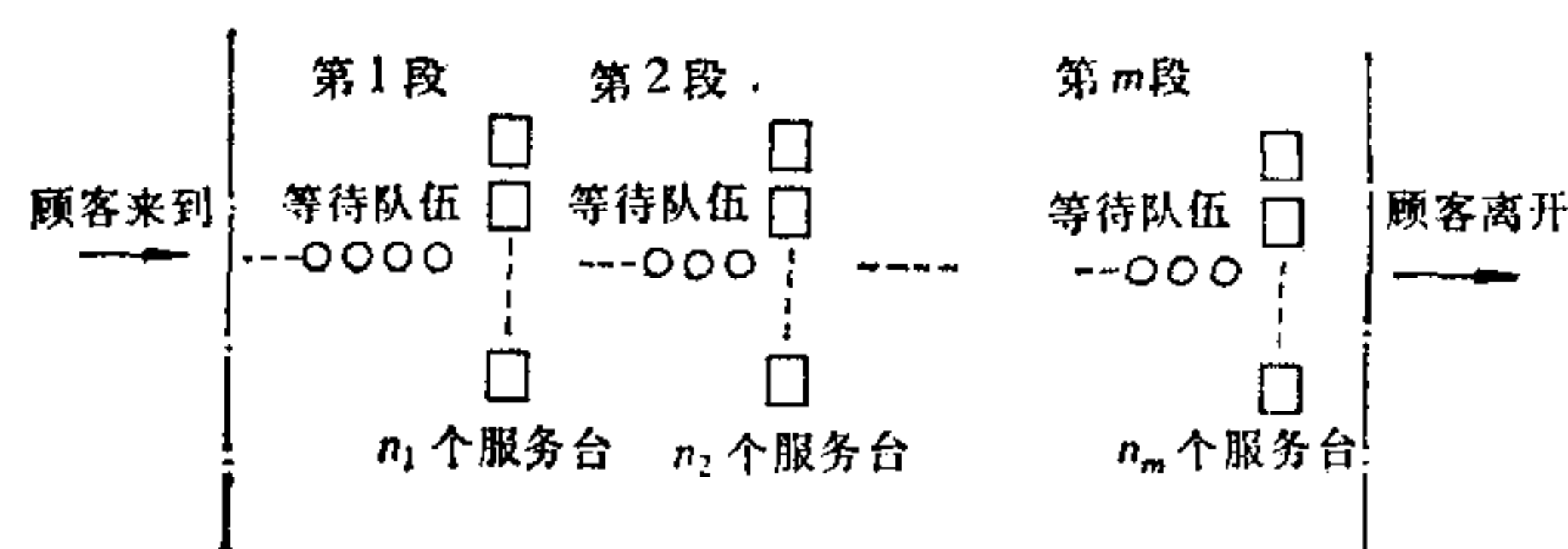


图1 多服务台串并联随机服务系统

有若干个服务台。只有一个服务段的系统,称为多服务台并联系统。目前除一部分并联系统有理论计算公式外,一般串并联系统的理论研究成果和计算公式很少。特别是比较复杂的实际系统很难进行理论分析,而仿真技术是解决这类问题的有效手段。

二、多服务台并联排队系统的模型及仿真框图

1. 输入过程

假定各顾客来到时间 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}, \tau_n, \dots$ 的相邻时间间隔 $t_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots$) 是独立同分布的,分布函数是

$$A(t) = P\{t_i \leq t\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

分布密度为

$$A'(t) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{C}} e^{-\frac{t}{\bar{C}}}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

或

$$A'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e_1}} e^{-\frac{(t-a_1)^2}{2e_1^2}}.$$

本文在计算中采用两种分布——负指数分布和正态分布(分别用M和N表示)。

负指数分布的抽样值计算式

$$t_i = -\bar{C} \ln r.$$

其中 r 为均匀分布的伪随机数。

正态分布的抽样值计算式

$$t_i = a_1 + e_1 \times \sqrt{2} \times (r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6).$$

其中 $r_j (j = 1, 2, \dots, 6)$ 为六个独立的均匀分布的伪随机数。

2. 服务机构

有 n 个服务台, 并标以号码 $1, 2, \dots, n$ 。各顾客服务时间 v 相互独立, 且与输入独立, 其分布函数是

$$B(t) = P\{v \leq t\}.$$

同样采用负指数分布和正态分布计算, 分布密度分别为

$$B'(t) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{S}} e^{-\frac{t}{\bar{S}}}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

和

$$B'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e_2}} e^{-\frac{(t-a_2)^2}{2e_2^2}}.$$

两种分布的抽样值计算式同上。

3. 排队规则

这里不考虑优先级别而是采用先到先服务的原则。排队按等待消失制, 即当顾客来到时, 如服务台全忙而队长数又大于允许值时, 顾客就离开系统(消失), 否则顾客就排队等待。

要求的指标: 1) 系统上人数分布及其平均值、等待队长平均值; 2) 刚来到顾客需要等待的概率、等待时间分布及其平均值; 3) 忙期长度分布及平均值。

图2为简化的仿真框图。本文采用了“最小事件原则”, 把下一个顾客来到的时间间隔和 n 个服务台为顾客服务的时间都作为特定时刻, 分别存于数组 $S(0)$ 和 $S(1) \sim S(n)$ 中。时钟依这些特定时刻从小到大阶跃增长。框图可分为五个部分:

(I) 寻找非零的最小特定时刻 m , 即求得数组 S 的 $n+1$ 个元素中的最小非零值, 时钟阶跃增加到此时刻, 其余各非零的特定时刻均减少 m , 然后按顾客来到或服务结束分

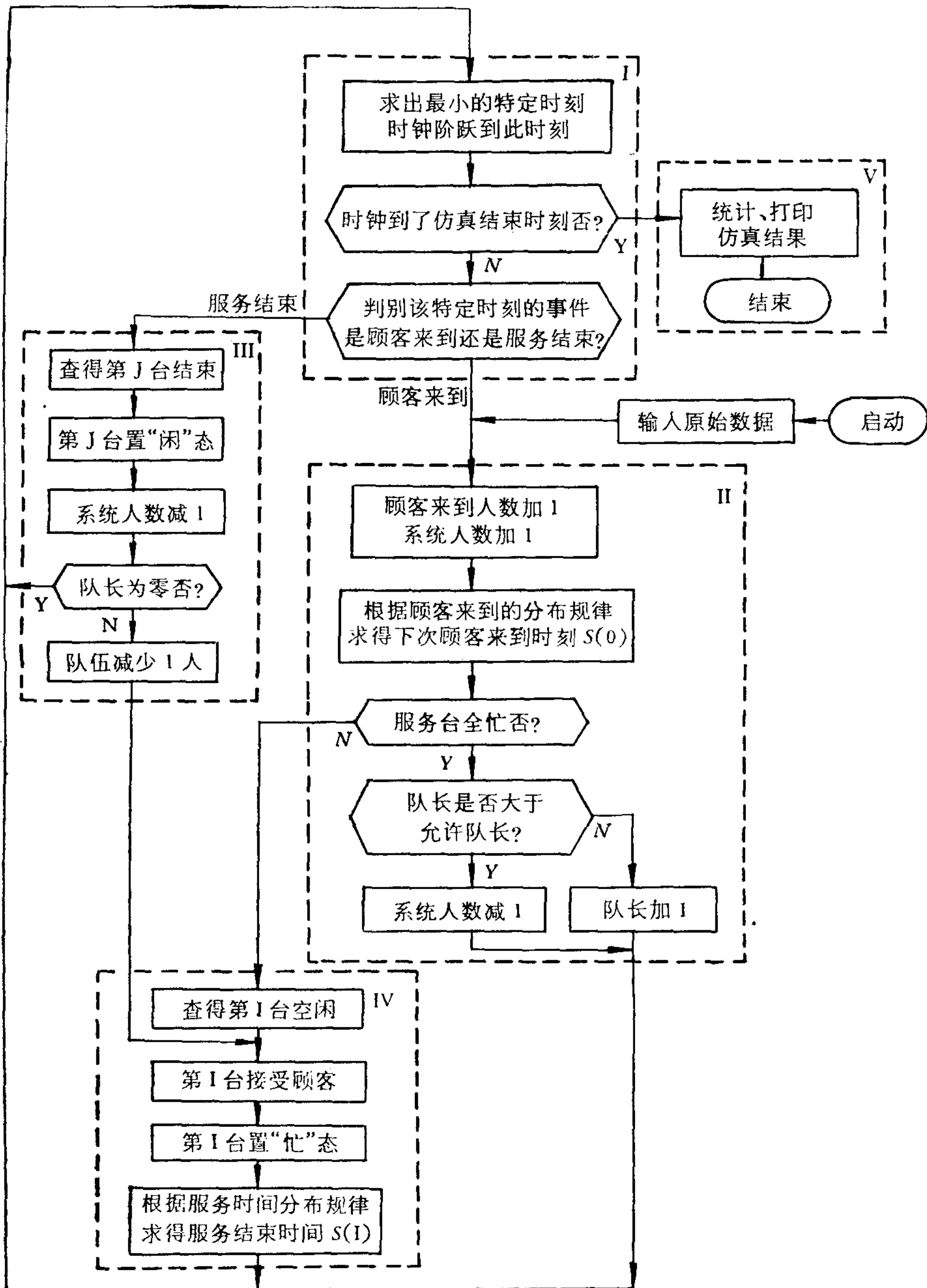


图2 多服务台并联系统仿真框图

别转到 (II) 或 (III)。

(II) 顾客来到: 此时如服务台有空则转入 (IV); 如服务台全忙就根据队长是否超过允许值而决定顾客是消失还是排队等待。仿真开始 (时钟为零) 时假设第一个顾客来到, 根据顾客来到的分布求得下一个顾客来到的时间间隔并存于 $S(0)$ 中。

(III) 服务结束: 将服务结束的 (第 J 个) 服务台置闲态。如台前有顾客排队, 则队伍减少一人, 转入 (IV); 如台前无队伍, 则返回 (I)。

(IV) 服务段: 当顾客来到时有几个服务台都空闲, 那么号码最小的服务台接受顾客服务; 当服务台结束一个顾客服务时而且台前有排队, 则本服务台接受队伍中第一个顾客服务。服务台每接受一个顾客就要根据服务时间的分布规律, 求得需要服务的时间并存在于 $S(I)$ 中, I 为该服务台号码。

(V) 当时钟到了仿真结束时刻, 则统计、打印出仿真结果(即系统的各项指标)。

本文只讨论随机服务系统的平衡状态(即 $t \rightarrow \infty$ 的情况), 不统计结果的暂态过程。

三、多服务台并联系统仿真结果分析

图 2 所示仿真框图为用 BASIC 语言编制的通用计算程序, 据此在内存为 32K 的 DJS-130 计算机上对多种类型的排队系统进行了仿真计算。

1. $M/M/n$ 等待消失制系统

取来到时间间隔平均值 $\bar{c} = 16$ 分钟, 平均服务时间 $\bar{s} = 60$ 分钟, 服务台数 $n = 5$, 允许队长 $Q_1 = 5$ 。

令 $\lambda = 1/\bar{c}$, $\mu = 1/\bar{s}$, $N = n + Q_1$, $\rho = \bar{s}/\bar{c}$ 。利用文献 [1] 中的基本公式进行一些初等推算可得到计算这类系统的理论公式。

系统平均人数:

$$M_0 = \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n\rho)^j}{(j-1)!} + \frac{n^n}{n!} \rho^n \frac{[n - (N+1)\rho^{N-n+1}](1-\rho) + \rho - \rho^{N+2-n}}{(1-\rho)^2} \right] p_0$$

$$= 4.342,$$

其中

$$p_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^j}{j!} + \frac{(n\rho)^n}{n!} \times \frac{1 - \rho^{N+1-n}}{1 - \rho} \right]^{-1} = 0.02035,$$

平均等待队长

$$Q_1 = p_0 \frac{n^n}{n!} \sum_{j=n+1}^N (j-n)\rho^j = 0.703,$$

需要等待概率

$$P_0 = p_0 \frac{(n\rho)^n}{n!} \times \frac{1 - \rho^{N-n}}{1 - \rho} = 0.384,$$

平均等待时间

$$W_1 = p_0 \frac{(n\rho)^n}{n!} \times \frac{1}{1-\rho} \times \frac{\rho}{\lambda} \left[\frac{1 - \rho^{N-n}}{1 - \rho} - (N-n)\rho^{N-n} \right] = 11.256.$$

表 1

仿真时间(分)	系统平均人数 M_0	平均等待队长 Q_1	需要等待概率 P_0	平均等待时间 W_1
90000	4.348	0.704	0.386	11.478
理论值	4.342	0.703	0.384	11.256

注: 仿真时间是指系统实际经历的时间, 而不是计算机计算时间。下同。

仿真结果与理论计算值基本一致(见表 1)。另外, $M/M/n$ 等待制系统(允许队长无限长)的仿真结果与理论计算值也极为接近。

2. $D/M/n$ 系统 (D 表示常数分布)

取 $a_1 = 16$, $e_1 = 0$, $\bar{S} = 60$, $n = 5$, 服务强度 $\rho = 0.75$ 。此系统可用文献[1]中的有关公式进行理论计算。

平均等待队长

$$Q_1 = \frac{K\theta}{(1-\theta)^2} = 0.311,$$

系统上平均人数

$$M_0 = U_1 + K \frac{\theta + n(1-\theta)}{(1-\theta)^2} = 3.69,$$

需要等待概率

$$P_0 = \frac{K}{1-\theta} = 0.26,$$

平均等待时间

$$W_0 = \frac{K}{n\mu(1-\theta)^2} = 6.8.$$

仿真结果(表 2)与理论计算值基本一致。作者还对 $N/M/n$ 系统进行了仿真, 参数不变, 仅增加 $e_1 = 3$, 仿真结果和理论值较接近, 且与 $D/M/n$ 系统的计算值相差不大, 这是由于 e_1 相对 a_1 很小之故。

表 2

仿真时间(分)	系统平均人数 M_0	平均等待队长 Q_1	需要等待概率 P_0	平均等待时间 W_0	平均忙期长度 t_0
160000	3.696	0.312	0.259	6.868	26.316
理论值	3.69	0.311	0.26	6.8	

3. $M/N/n$ 系统

取 $n = 3$, $\bar{C} = 4$, $a_2 = 9$, $e_2 = 3$ 。此类系统没有理论计算公式, 只能用计算机仿真, 仿真结果见表 3。

表 3

仿真时间(分)	系统平均人数 M_0	平均等待队长 Q_1	需要等待概率 P_0	平均等待时间 W_0	忙期平均长度 t_0
10000	3.179	0.921	0.558	3.617	10.778

关于系统人数分布及等待时间长度分布, 可在计算机上仿真获得频率分布(图 3, 4), 由经验分布拟合适当分布密度曲线, 可作为理论分布的近似式。

作者曾对 $M/D/n$ 系统进行过仿真。关于此系统理论计算, 文献[2]给出计算系统人数的母函数 $P(z)$ 、不需等待概率 $P(t=0)$ 、平均等待时间 W_g 的公式。这些公式都建立在已知 n 个概率 p_k (p_k 表示系统上有 k 个人的概率, 而 $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) 的基础上, n 个概率数值可通过仿真得到, 于是作者得到一些半理论半经验的公式。

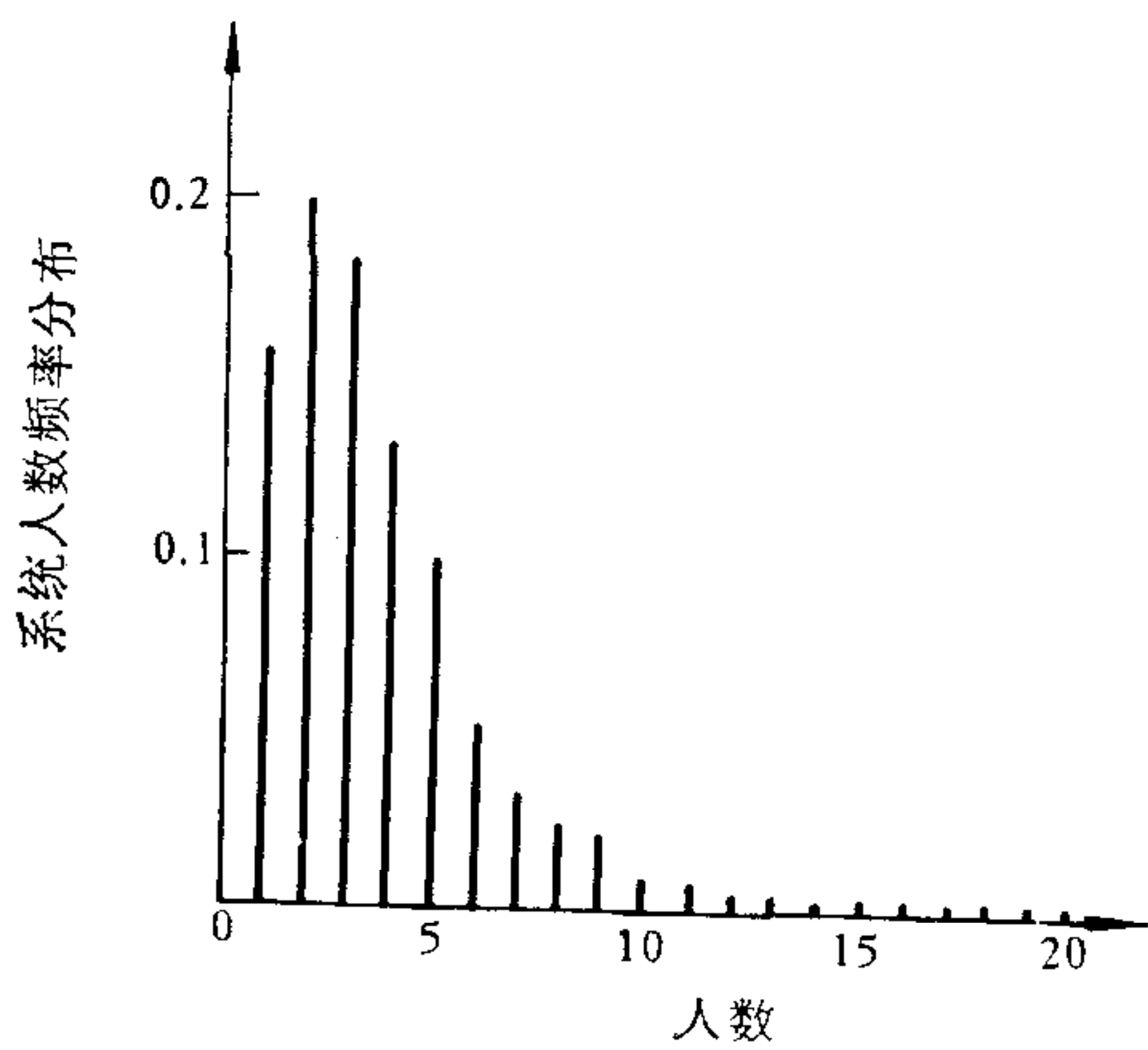


图3 系统人数频率分布

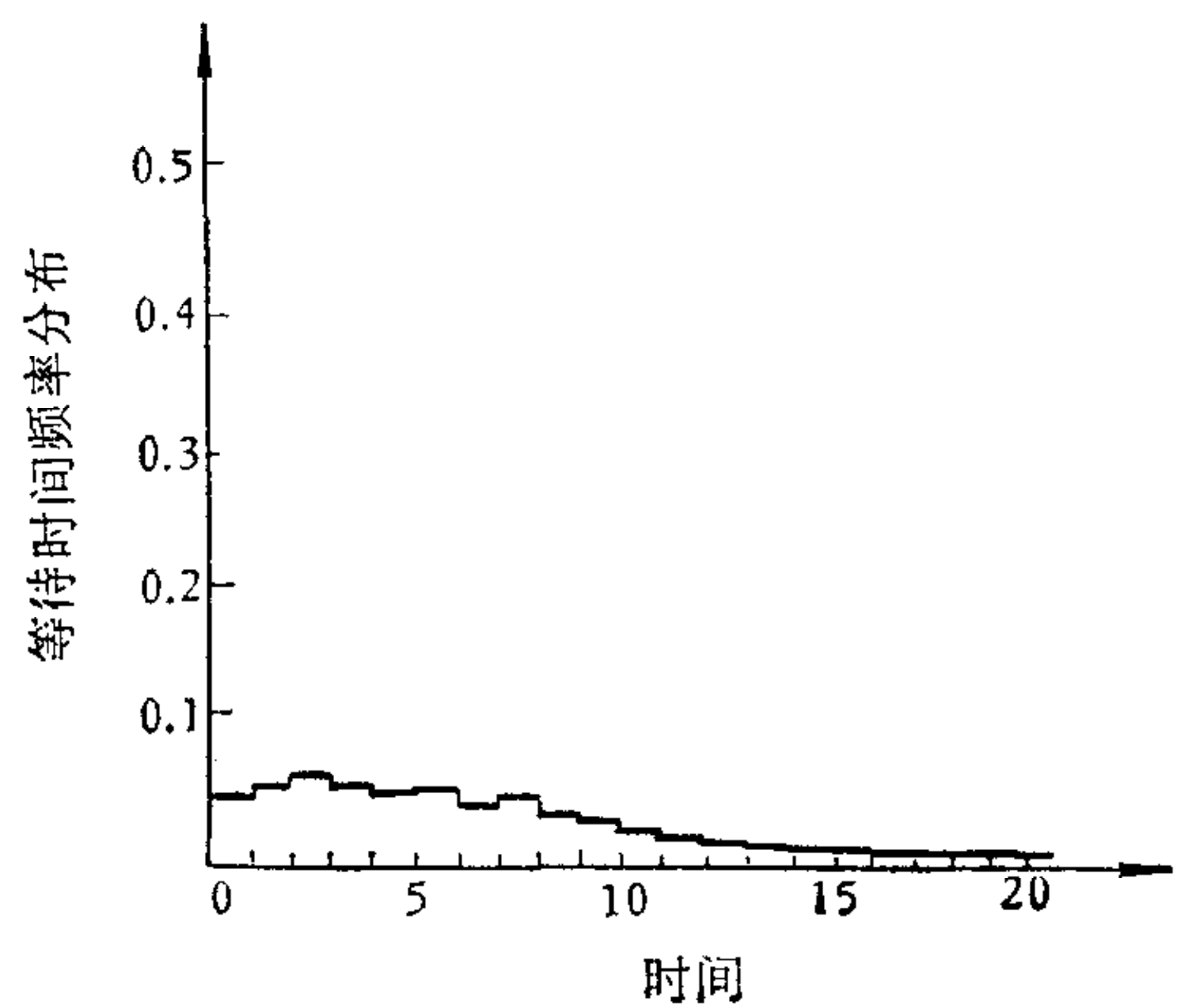


图4 等待时间频率分布

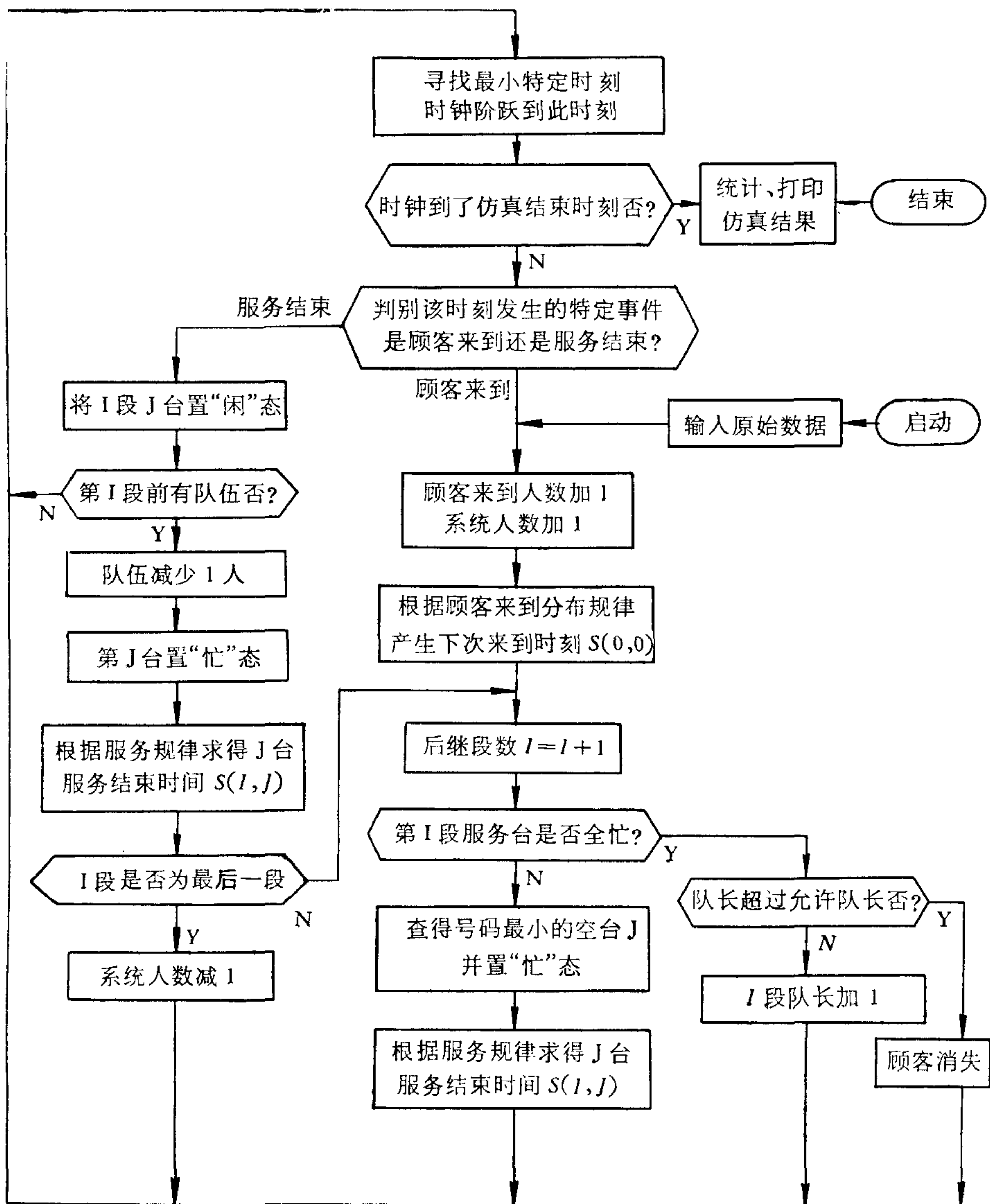


图5 多服务台串并联系统仿真框图

四、串并联系统的模型和仿真框图

串并联服务系统分 m 段, 第 i 段有 n_i 个服务台, $i = \overline{1, m}$. 其仿真框图见图 5. 图 5 和图 2 基本思路一致, 并联系统中仅有一个服务段, 而在串并联系统中有 m 个服务段串联起来, 所以存放特定时刻的数组应是二维数组 $S(m, g)$, m 表示服务段数, g 表示各段中服务台数最多一段的并联台数. $S(0, 0)$ 表示下一个顾客来到的间隔时间, $S(i, j)$ 表示第 i 段第 j 个服务台尚需服务的时间. 队长、等待时间、需要等待概率等中间变量及仿真结果都应是一维数组, 数组各元素表示了各服务段的参数. 此外, 在此框图中当一个服务台结束了对某一顾客的服务后, 对服务台来说, 与并联系统一样, 根据台前有无排队决定是否再接待一个新顾客; 而对服务完的顾客来说, 只要不是最后一个服务段就应该进入下一服务段, 作为来到下一个服务段的顾客, 否则就离开系统.

五、串并联系统仿真结果分析

对于一个五段的串联服务系统(即每段只有一个服务台), 设第 1 段顾客来到时间间隔和每一段服务时间都服从负指数分布, 且各段服务时间分布的参数相同. 取

$$m = 5, N(i) = 1, (i = \overline{1, 5})$$

其中: m 为段数, $N(i)$ 为 i 段的服务台数. 平均来到时间间隔 $C_1 = 16$, 每一段平均服务时间 $Y(i) = 12, (i = \overline{1, 5})$.

对于这种系统理论上能进行计算. 在平衡状态, 负指数来到、负指数服务时间的多服务台系统的输出也是 Poisson 流, 而且参数 λ 与来到的 Poisson 流相同^[2]. 对各段顺次利用这个命题, 因此五段服务情况可分别看成负指数来到和负指数服务的单服务台系统. 由于各段参数相同, 故理论结果相同. 在计算机上对这个系统进行了 5000 分钟仿真, 得到各段的平均值. 两种方法的结果列于表 4 中.

表 4

		各段平均人数	各段平均等待队长	各段平均等待时间	各段需要等待概率
仿真结果	第 1 段	2.815	2.069	32.779	0.75
	第 2 段	3.192	2.416	38.293	0.783
	第 3 段	3.012	2.258	35.788	0.764
	第 4 段	3.012	2.266	35.901	0.746
	第 5 段	2.888	2.129	33.733	0.765
理论值		3	2.25	36	0.75

由表 4 可见仿真结果与理论值比较接近. 作者还曾对输入过程及服务时间为各种分布的一般串并联系统(如两段分别有二个和三个服务台的串并联系统、各段分别有一、二、三、三、一个服务台的五段串并联系统等)进行了仿真, 这类系统数学上很难解决, 通过数字仿真可以获得系统的有关指标.

六、模型的实际应用

作者曾将上述模型用于机械加工自动线的仿真,该自动线由十一台机床串联而成,进入第一台机床工件是连续不断的,每一台机床的加工时间是确定的,但在加工过程中都有可能发生故障,故障来到时间和排除故障时间都是随机的。假定它们都服从负指数分布,为了提高自动线的可靠性,可在每两台机床间设置贮料器。实际上这是一个单服务台的串联随机服务系统,工件相当于顾客,机床相当于服务台,对于这种串联排队系统要从理论上推导出计算公式是极为困难的,我们用计算机仿真的方法比较满意地解决了这个问题。

考虑到机床有可能发生故障以及需要一定的修复时间以排除故障。为此对上述一般模型作部分修正:如果故障来到时间大于或等于加工时间,那么工件加工完成,工件进到下一台机床加工或等待(如果该台机床已是最后一台,工件加工全部完成离开自动线);如果故障来到时间小于加工时间,工件就要报废,要等到机床修复后才能接受新的工件。把报废工件所用的加工时间(等于故障来到时间)和排除故障时间的总和称为“虚加工时间”。

对上述有十一台机床串联而成的机械加工自动线的几种不同参数进行了仿真。系统中每台机床加工一个工件的时间为 0.25 分,故障来到平均时间为 4 分,排除故障平均时间为 1 分,从系统进入稳态开始仿真 1200 分钟。表 5 列出了其中的一组结果。

表 5

段号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
平均队长	0	11.3	7.50	4.64	3.11	1.34	0.91	2.26	1.18	0.92	0.33
最大队长	0	32	25	23	28	14	16	21	15	14	10

仿真结果表明,由于故障来到比较频繁(平均加工 16 个工件就要报废一个),因此前面几台机床的平均等待队伍较长。

作者曾对第二台机床的平均队长的仿真结果进行理论校核。由于该台机床是一般的 $GI/G/1$ 系统,平衡状态的平均队长没有理论公式,只能用 $M/G/1$ 的公式进行计算^[1],得到平均队长(包括正在加工的工件)近似参考值

$$Eq_n = 16.5$$

多次仿真结果的平均队长(不包括正在加工的工件)约为 11—12,和上述近似参考值相差不大,仿真结果是可信的。

自动线各台机床间料斗的大小应该根据最大队长设计,但由于最大队长的随机性,所以各次仿真结果相差甚大。如表 6 中第二台机床前的最大队长为 32,而另外几次仿真结果各为 30, 28, 51 等,因此必须进行足够次数的重复仿真,才能得到它的频率分布。这是队长的极值分布(与时间长度有关)。据此可确定一数值,使最大队长不超过此值,以保证有一定可靠性(譬如 90%)。此值可作为料斗体积设计值。

上述模型还曾用于城市公共汽车路线及电话交换系统的仿真，并获得了较满意的结果。

本校张文修和蒋馥同志参加了论文的讨论。作者感谢胡保生同志对本文的支持和帮助。

参 考 文 献

- [1] 徐光辉, 随机服务系统, 科学出版社, 1980.
- [2] Saaty T. L., Elements of Queueing Theory, 1961.
- [3] Takács L., Introduction to the Theory of Queues, 1962.
- [4] Gordon G., System Simulation, 1977.
- [5] Emshoff J. R., Sisson R. L., Design and Use of Computer Simulation Models, 1970.
- [6] Rectman J., Computer Simulation Application—Discrete-event Simulation of Synthesis and Analysis of Complex Systems, 1971.

GENERAL MODEL OF STOCHASTIC SERVICE SYSTEMS FOR SIMULATION AND ITS APPLICATIONS

SUN GUOJI WANG RONGXIN XUAN HUIYU HE DAYU

(*Xi'an Jiaotong University*)

ABSTRACT

This paper provides the general model for stochastic service systems with many servers, the simulated flowchart and an universal algorithm for computation are given. The results of simulating some stochastic service systems have theoretically analysed. That: the results of simulation are quite well coincided with the theoretical analysis for those systems which can be described by analytical formulation; and the numerical solution can be offered by computer simulation for those systems which cannot be easily described by analytical theory. Finally, the application of the simulation model for an automatic manufacturing system is introduced.