

步进电机锁相控制系统的分析和设计

郭兆曾

(北京控制工程研究所)

摘要

本文介绍了一种步进电机的锁相控制系统，为实现这一系统提出了步进电机速度误差阻尼方法，并给出了便于工程使用的设计方法。经过模拟试验和实际使用，证明设计方法是完全正确的。

一、前言

目前，对步进电机的控制大都采用开路驱动。这种控制方法对步进电机、编码器等主要部件的机械加工、安装的要求较高，系统的动态品质和控制精度也难以提高。为了解决这些问题，在文献[1]的基础上，利用步进电机的同步特性，提出了步进电机的锁相控制方案。步进电机的阻尼，是实现本方案的重要问题之一。过去已有的阻尼方法都存在一定的缺点，本文提出一种新的阻尼方法——速度误差阻尼。

步进电机控制系统是一个比较复杂的非线性系统。传统的Ляпунов 和 Popov 方法都难于应用。本文提出一种适用于工程设计的简化分析方法，即用非线性振动理论中的渐近方法^[2]，在分析了步进电机的速度误差阻尼和同步特性的基础上，将原系统化为一个等效的、简单的非线性系统，再用采样控制系统理论求出它的稳定条件。

本方法已用于实际系统，取得了理想的结果。

二、系统结构和数学模型

图1是利用作者提出的数字锁相迴路^[1]和步进电机的同步特性设计的以步进电机为控制对象的锁相控制系统，两个磁编码器分别作为电机转角的相位反馈和电机转速的速度反馈^[3]。电机每旋转一周，位置编码器输出一个脉冲，测速编码器则输出多个脉冲（具体个数视需要而定）。R作为参考输入，是周期不变的脉冲序列。L是相位反馈信号，经鉴频-鉴相器鉴频鉴相后输出方波。该方波一方面经前沿微分后，使可逆计数器归零；另一方面，根据系统的要求调制成为两种不同频率的计数窄脉冲，分别送到可逆计数器和累加可逆计数器^[1]。可逆计数器为比例环节，累加可逆计数器是积分环节。当鉴频-鉴相器输出

的下一个方波到达后,两个计数器才再次计数,因此还兼作零阶保持器。总括起来,其传递函数为 $(1 - e^{-Ts})(\tau_1 + \tau_2/s)/s$ 。当可逆计数器记满后,输出停止计数指令,以实现宽度限止^[1](兼作限幅器),其主要作用是防止因步进电机在启动和稳态运行时 VCO 的频率变化过大导致电机失步(详见下文)。

VCO(是比例环节)。采用数字式的为好,因为可以省掉 D-A 转换,且频率稳定度较高。分配器(是积分环节)把 VCO 输出的脉冲序列在步进电机定子中形成旋转磁场。在进行理论分析时步进电机采用类似于文献[4]中给出的模型。

VCO 的控制电压 V_c 反映了步进电机应该达到的平均转速。测速编码器

输出经单稳态触发器整形后,得到具有等宽度的脉冲串,再经滤波后输出的电压 V_s ,则反映了电机的实际转速^[3]。由 V_c 和 V_s 之差控制时延线路改变 VCO 输出脉冲的后沿,再经分配器改变绕组的激磁相位,从而改变电磁力矩大小,以改变步进电机的转速,由此实现了速度误差阻尼。又因为 VCO 的控制电压 V_c 相对于速度波动可以看作常值,因此,也可用隔直后的 V_s 控制时延线路(见图 2)实现速度误差阻尼。

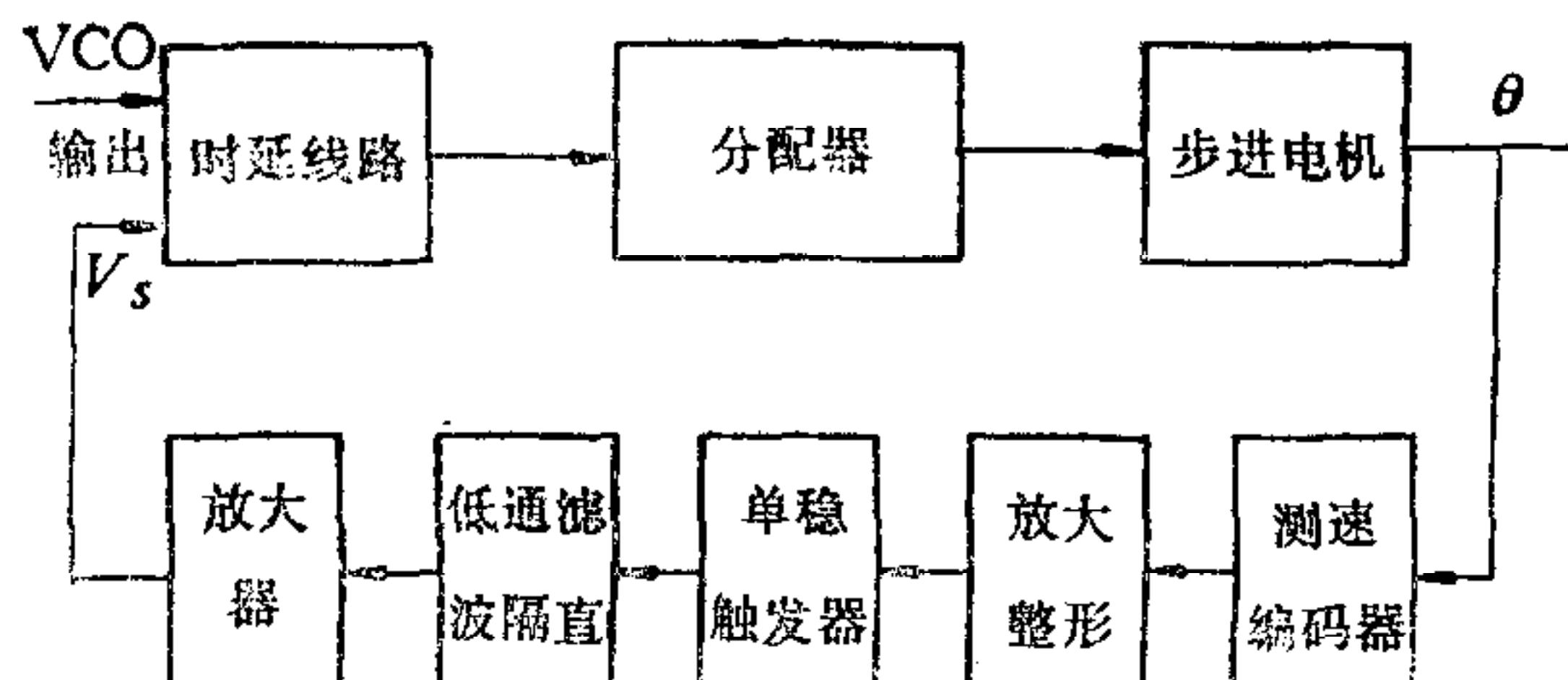


图 2 阻尼回路方框图

当由于意外原因使步进电机失步时,累加可逆计数器很快就达到饱和,饱和清除电路使之自动归零,即把 VCO 的频率降下来,使步进电机可以重新启动。

三、系统分析

图 3 为步进电机锁相控制系统的数学模型。图中 R 为速度输入,令 $R = V_0 t$, N_r 为步进电机的极数。

首先利用非线性振动理论中的渐近方法,分析步进电机的速度误差阻尼和采用速度误差阻尼时的动力学特性:阻尼效果、启动频率、跟踪频率、失调角等。利用所得结果找出简化条件,建立简化模型。最后利用简化模型分析整个系统的稳定性,进而给出一种简单的设计方法。

1. 阻尼分析

因为我们研究的是采样系统,所以在任意两次采样之间,系统是开路的,即对任意 n ,

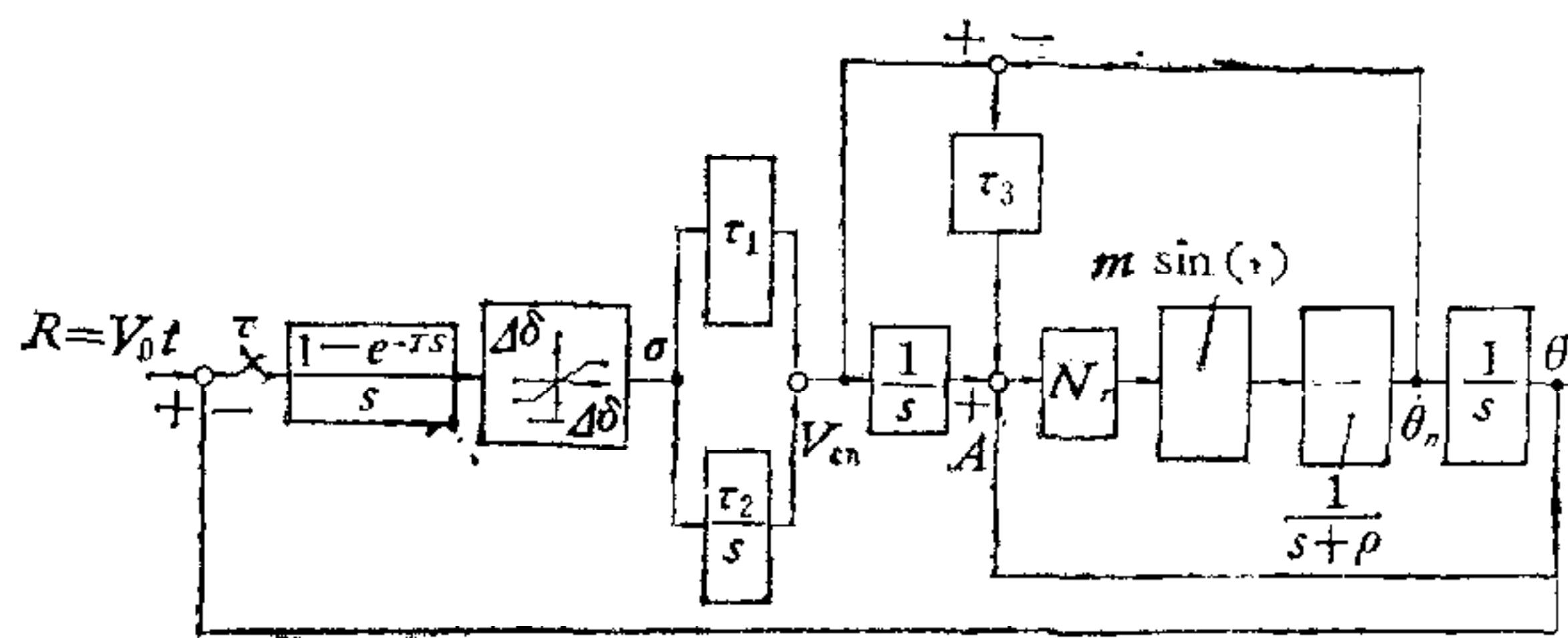


图3 系统的传递函数

当 $nT < t \leq (n+1)T$ 时, 图 3 中的 VCO 的控制电压 V_{cn} 保持不变, 且步进电机在前一个采样周期的终了状态, 是后一个采样周期的初始状态. 由此, 步进电机的运动方程和初始条件为:

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta_n}{dt^2} + 2\rho \frac{d\theta_n}{dt} = m \sin N_r [(t - nT)V_{cn} - \theta_n + \tau_3(V_{cn} - \dot{\theta}_n)], \\ nT < t \leq (t+1)T. \\ \theta_0(0) = 0, \dot{\theta}_0(0) = 0, \\ \theta_n(nT) = \theta_{n-1}(nT), \dot{\theta}_n(nT) = \dot{\theta}_{n-1}(nT), n = 1, 2, 3, \dots. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\theta_n(t)$ 是电机转角.

$$V_{cn} = \tau_1 \sigma_n + \tau_2 \sum_{i=1}^n \sigma_i. \quad (2)$$

σ_i 是第 i 个周期的采样误差, $m = N_r T_K / J$, $2\rho = D / J$, T_K 是电磁力矩幅值, J 是负载惯量, D 是电机本身的粘性阻尼系数, 一般 D 很小. 令:

$$\begin{cases} \varphi_n(t) = N_r [(t - nT)V_{cn} - \theta_n] \\ M = mN_r. \end{cases} \quad (3)$$

把 (3) 式代入 (1) 式得:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_n + 2\rho \dot{\varphi}_n = -M \sin(\varphi_n + \tau_3 \dot{\varphi}_n) + 2\rho V_{cn} N_r, \quad nT < t \leq (n+1)T. \\ \varphi_n(nT) = -N_r \theta_n(nT), \\ \dot{\varphi}_n(nT) = N_r [V_{cn} - \dot{\theta}_n(nT)]. \end{cases} \quad (4)$$

以下先用平均法^[2]求 (4) 的渐近解. 为此, 对式 (4) 中的 $\sin(\cdot)$ 项进行泰勒展开, 取前两项, 并令

$$\phi_n = \varphi_n - \frac{2\rho V_{cn} N_r}{M}, \quad (5)$$

把 (5) 代入 (4) 得:

$$\begin{cases} \ddot{\phi}_n + M \phi_n = -(2\rho + \tau_3 M) \dot{\phi}_n + \frac{M}{3!} \left(\phi_n + \frac{2\rho V_{cn} N_r}{M} + \tau_3 \dot{\phi}_n \right)^3 \\ \quad nT < t \leq (n+1)T \\ \phi_n(nT) = \varphi_n(nT) - \frac{2\rho V_{cn} N_r}{M} \\ \dot{\phi}_n(nT) = \dot{\varphi}_n(nT). \end{cases} \quad (6)$$

令 (6) 的解为

$$\phi_n = a_n \cos \alpha_n, \quad \dot{\phi}_n = -\sqrt{M} a_n \sin \alpha_n. \quad (7)$$

容易证明

$$\frac{da_n}{dt} = -p_n a_n + q_n a_n^3, \quad \frac{d\alpha_n}{dt} = \sqrt{M}(1 - r_n - sa_n^2). \quad (8)$$

其中：

$$\begin{cases} p_n = \frac{1}{16} \left[2\rho + \tau_3 M - \frac{\tau_2}{2M} (2\rho V_{cn} N_r)^2 \right], \\ q_n = \frac{1}{2} \left[\tau_3^2 M^2 + M \tau_3 + 3\tau_3^2 M (2\rho V_{cn} N_r) \right], \\ r_n = \left(\frac{\rho V_{cn} N_r}{M} \right)^2, \\ s = \frac{1}{16} (1 + \tau_3^2 M). \end{cases} \quad (9)$$

对(8)式积分得

$$\begin{cases} a_n = e^{-p_n(t-nT)} \sqrt{\frac{C_n p_n}{1 + C_n q_n e^{-2p_n(t-nT)}}}, \\ \alpha_n = \sqrt{M} \left[(1 - r_n)(t - nT) + \frac{s}{2q_n} \ln (1 + C_n q_n e^{-2p_n(t-nT)}) \right] + \alpha_{n0}. \end{cases} \quad (10)$$

把(10)式代入(7)式得到(6)式的解为

$$\begin{cases} \phi_n(t) = e^{-p_n(t-nT)} \sqrt{\frac{C_n p_n}{1 + C_n q_n e^{-2p_n(t-nT)}}} \cos \left\{ \sqrt{M} \left[(1 - r_n)(t - nT) + \frac{s}{2q_n} \ln (1 + C_n q_n e^{-2p_n(t-nT)}) \right] + \alpha_{n0} \right\}, \\ \dot{\phi}_n(t) = -\sqrt{M} e^{-p_n(t-nT)} \sqrt{\frac{C_n p_n}{1 + C_n q_n e^{-2p_n(t-nT)}}} \sin \left\{ \sqrt{M} \left[(1 - r_n)(t - nT) + \frac{s}{2q_n} \ln (1 + C_n q_n e^{-2p_n(t-nT)}) \right] + \alpha_{n0} \right\}. \end{cases} \quad (11)$$

式中 $nT < t \leq (n+1)T$, C_n 和 α_{n0} 是由初始条件确定的常数。容易求得

$$C_n = \left[\dot{\phi}_n^2(nT) + \left(\frac{\dot{\phi}_n(nT)}{\sqrt{M}} \right)^2 \right] \left\{ p_n - q_n \left[\dot{\phi}_n^2(nT) + \left(\frac{\dot{\phi}_n(nT)}{\sqrt{M}} \right)^2 \right] \right\}^{-1}. \quad (12)$$

由(3), (5)和(11)式求得转子的转角为

$$\theta_n(t) = V_{cn} \cdot (t - nT) - \frac{2\rho V_{cn}}{M} - N_r^{-1} e^{-p_n(t-nT)} \sqrt{\frac{C_n p_n}{1 + C_n p_n e^{-2p_n(t-nT)}}} \cos \left\{ \sqrt{M} \left[(1 - r_n)t + \frac{s}{2q_n} \ln (1 + C_n q_n e^{-2p_n(t-nT)}) \right] + \alpha_{n0} \right\}. \quad (13)$$

式中 C_n 由(12)式表示, $(t - nT)V_{cn}$ 为定子磁场在 $nT < t \leq (n+1)T$ 时的转角, 即转子应该实现的转角, $-2\rho V_{cn}/M$ 是由于粘性阻尼引起的滞后角, 第三项是由于初始条件产生的振动。在(13)式中, 若取 $p_n > 0$, 则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_n(t) = (t - nT)V_{cn} - \frac{2\rho V_{cn}}{M}. \quad (14)$$

一般情况下,步进电机的 ρ 很小,所以在实际设计中可近似地取

$$p_n = \frac{1}{2} \left[\tau_3 M - \frac{\tau_2}{M} (2\rho V_{cn} N_r)^2 \right] > 0. \quad (15)$$

由此可得出如下结论:

结论 1. 若选择 τ_3 使(15)式成立,则速度误差阻尼使电机转角 $\theta_n(t)$ 的振动受到抑制。速度误差阻尼不产生稳态误差,但它不能消除由于粘性阻尼产生的角度滞后 $2\rho V_{cn}/M$ 。

图 4 是仿真试验结果。试验结果和理论分析结果完全一致。

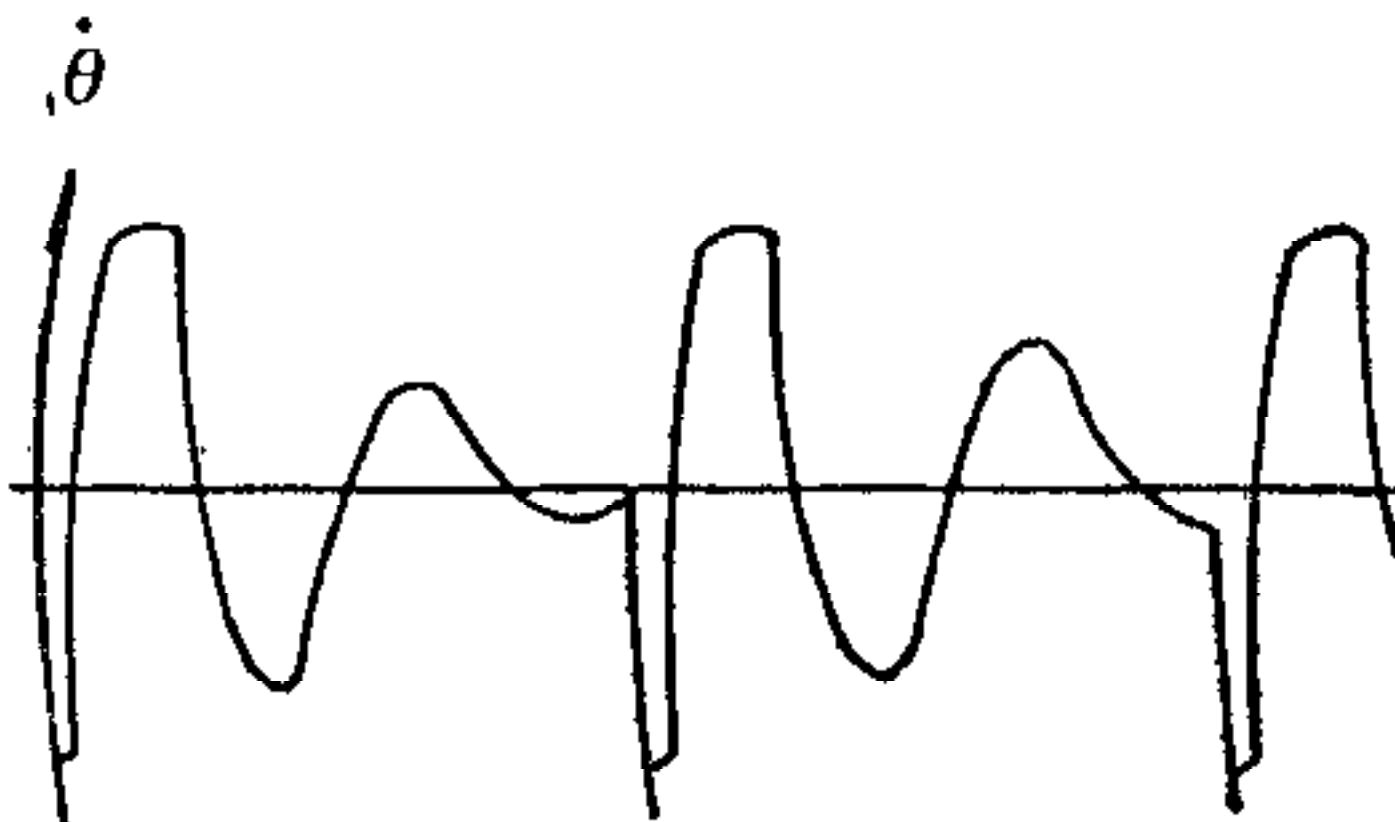


图 4

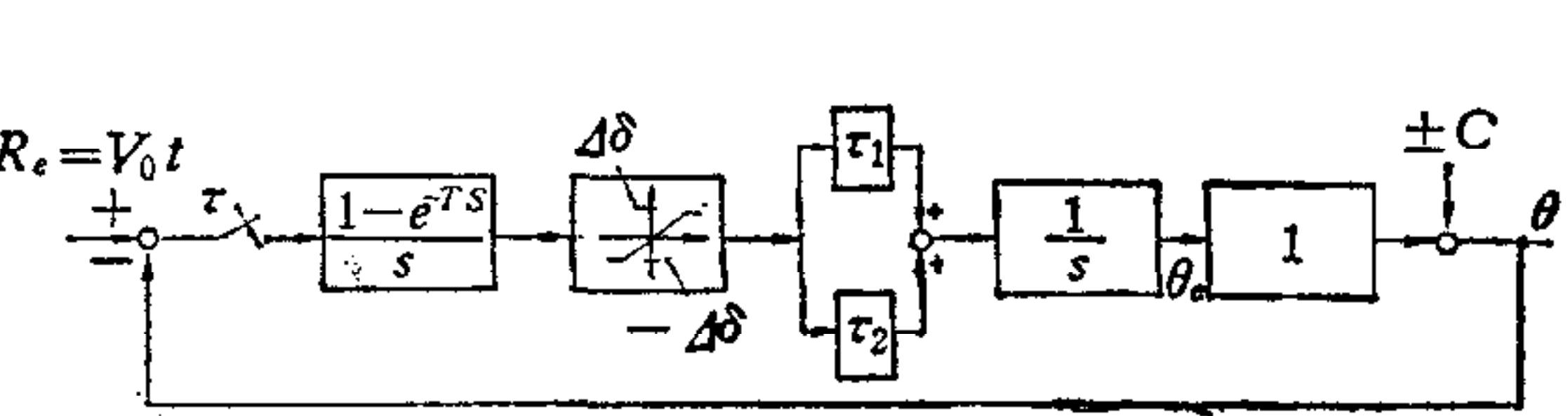


图 5 简化系统传递函数

结论 2. 由(1), (11) 和 (13) 式知, 若要求步进电机不失步, 则除了应满足 $p_n > 0$ 外, 还应满足电机的电磁力矩大于零和 $C_n > 0$ 两个条件, 即:

$$\begin{cases} 0 < \frac{2\rho V_{cn} N_r}{M} + \phi_n(nT) + \tau_3 \dot{\phi}_n(nT) < \pi \\ p_n - q_n \left[\phi_n^2(nT) + \left(\frac{\dot{\phi}_n(nT)}{\sqrt{M}} \right)^2 \right] > 0. \end{cases} \quad (16)$$

式中 $\phi_n(nT)$, $\dot{\phi}_n(nT)$ 由(11)式令 $t = nT$ 得到。由(16)式可求得满足不等式的最大 C_n , 且可求得步进电机能达到的最大转速。

2. 简化模型的建立

设 $t = 0$ 时, 步进电机处于静止状态, 即 $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$, 并设参考输入 $R = V_0 t$, V_0 为常数。当 $n = 0$ 即 $0 < t \leq T$ 时, $V_{c0} = 0$, 所以

$$\begin{cases} \phi_0(t) = 0 & \theta_0(t) = 0 \\ \dot{\phi}_0(t) = 0, & \dot{\theta}_0(t) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

当 $n = 1$, 即 $T < t \leq 2T$ 时, 易知

$$V_{c1} = (\tau_1 + \tau_2) T V_0. \quad (18)$$

V_{c1} 确定了步进电机的启动频率。把(17)和(18)式代入(3)和(5)式得:

$$\phi_1(T) = -\frac{2\rho V_{c1} N_r}{M}, \quad \dot{\phi}_1(T) = N_r V_{c1}. \quad (19)$$

把(19)式代入(11)式, 再利用(16)式, 易知, 当步进电机和阻尼选定后, V_{c1} 不能取任意值, 即启动频率不能过高, 否则电机将不能启动。这和试验结果是一致的。另一方面, 鉴频-鉴相器的输出可能很大。为了解决这个问题, 就需要在鉴频-鉴相器后增加限幅器, 以保证(16)式成立。由此, 又可得出

结论 3. 若(18)式中的 $V_0 > 0$ 可取任意值, 并且 τ_1 , τ_2 , τ_3 , ρ , N_r 和 M 已给定, 则由(16)式可知, 若要求步进电机不失步, 就必须在鉴频-鉴相器后增加限幅器。限幅值 $\Delta\sigma$

取以下两个不等式中最小的。

$$\begin{aligned}\Delta\sigma &\leq \frac{\pi}{T(\tau_1 + \tau_2)} \left[\frac{2\rho N_r}{M} + (1 + \tau_3 \sqrt{M}) \sqrt{\left(\frac{2\rho N_r}{M}\right)^2 + \frac{N_r^2}{M}} \right]^{-1}, \\ \Delta\sigma &\leq \frac{1}{\sqrt{2} T(\tau_1 + \tau_2)} (2\rho + \tau_3 M)^{1/2} \left\{ \frac{\tau_3}{M} (2\rho N_r)^2 + q_n \left[\left(\frac{2\rho N_r}{M}\right)^2 + \frac{N_r^2}{M} \right] \right\}^{-1/2}.\end{aligned}\quad (20)$$

由(3)和(5)式可知 $\varphi_n(t) = \phi_n(t) + 2\rho V_{cn} N_r / M$. 是在采样周期 $nT < t \leq (n+1)T$ 内, 步进电机转子相对定子旋转磁场的滞后角。由(11)式可知, 当 $t = (n+1)T$ 时转子转过的角度为:

$$\theta((n+1)T) = T \sum_{i=0}^n V_{ci} - \frac{2\rho V_{cn}}{M} - N_r^{-1} \phi_n((n+1)T). \quad (21)$$

其中 V_{ci} 由(2)式表示, 且 $|\sigma_i| \leq \Delta\sigma$. 当 $(n+1)$ 次采样过后, 即当 $t = (n+1)T + 0$, 定子磁场的旋转速度发生了突变, 从 V_{cn} 变到了 $V_c(n+1)$. 则当 $(n+1)T < t \leq (n+1)T$ 时, 滞后角为 $\varphi_{n+1}(t) = 2\rho V_c(n+1)N_r/M + \phi_{n+1}(t)$. 由此, 当 $t = (n+1)T + 0$ 时有

$$\theta((n+1)T + 0) = T \sum_{i=0}^n V_{ci} - 2\rho V_c(n+1)/M - N_r^{-1} \phi_{n+1}((n+1)T + 0). \quad (22)$$

由于转子的转角不能突变, 应有 $\theta((n+1)T) = \theta((n+1)T + 0)$. 则由(21)和(22)式得到 $\phi_n((n+1)T) + 2\rho V_{cn} N_r / M = \phi_{n+1}((n+1)T + 0) + 2\rho V_c(n+1)N_r / M$. 设 $t = nT$ 时的采样误差为 σ_n , $t = (n+1)T$ 时的采样误差为 σ_{n+1} , 则有:

$$\phi_{n+1}((n+1)T + 0) = \phi_n((n+1)T) - \frac{2\rho}{M} [\tau_1(\sigma_{n+1} - \sigma_n) + \tau_2 \sigma_{n+1}] N_r. \quad (23)$$

因速度不可突变, 所以有

$$\dot{\phi}_{n+1}((n+1)T + 0) = \dot{\phi}_n((n+1)T) - [\tau_1(\sigma_{n+1} - \sigma_n) + \tau_2 \sigma_{n+1}] N_r. \quad (24)$$

式中 $|\sigma_n| \leq \Delta\sigma$, $|\sigma_{n+1}| \leq \Delta\sigma$. 又由(11)式有

$$\begin{cases} |\phi_n((n+1)T)| \leq e^{-p_n T} \sqrt{\frac{C_n p_n}{1 + C_n q_n e^{-2p_n T}}}, \\ |\dot{\phi}_n((n+1)T)| \leq \sqrt{M} e^{-p_n T} \sqrt{\frac{C_n p_n}{1 + C_n q_n e^{-2p_n T}}}. \end{cases} \quad (25)$$

以下仍用递推关系估算(23)式. 当 $n = 1$, 因为 $|V_{c1}| \leq \Delta\sigma(\tau_1 + \tau_2)$, 利用(9), (12), (19)和(25)式很容易证明, 只要 M 足够大, 就能保证 p_1 足够大, 使以下不等式成立:

$$|\phi_1(2T)| \leq \frac{2\rho}{M} \tau_2 \Delta\sigma N_r, \quad (26)$$

$$|\dot{\phi}_1(2T)| \leq \tau_2 \Delta\sigma N_r. \quad (27)$$

$\phi_1(2T)$, $\dot{\phi}_1(2T)$ 是第二次采样时刻的采样值. 把(26)式代入(23)式, (27)式代入(24)式, 又可估算出第二个采样周期 ($2T < t \leq 3T$) 时 ϕ_2 和 $\dot{\phi}_2$ 的初值:

$$\begin{cases} |\phi_2(2T + 0)| \leq |\phi_1(2T)| + \frac{2\rho}{M} |(\sigma_2 - \sigma_1)\tau_1 + \tau_2 \sigma_2| \leq \frac{4\rho}{M} (\tau_1 + \tau_2) \Delta\sigma N_r, \\ |\dot{\phi}_2(2T + 0)| \leq 2\Delta\sigma(\tau_1 + \tau_2) N_r. \end{cases} \quad (28)$$

反复利用上面的关系,可以证明,(26)和(27)式对任意 n 都成立。只要实际系统是稳定的,则一定存在最大的 $V_{c\max}$,对任意 n ,都有 $|V_{cn}| \leq V_{c\max}$ 。这样,就可以选择一个固定的 M ,使所有 p_n 足够大,且保证 $n+1$ 次采样时刻的采样值以及 $n+1$ 个采样周期的初值满足关系式

$$|\phi_n((n+1)T)| \leq \frac{2\rho}{M} \tau_2 \Delta \sigma N_r, \quad |\dot{\phi}_n((n+1)T)| \leq \tau_2 \Delta \sigma N_r. \quad (29)$$

及

$$\begin{aligned} |\phi_{n+1}((n+1)T + 0)| &\leq \frac{4\rho}{M} \Delta \sigma (\tau_1 + \tau_2) N_r, \\ |\dot{\phi}_{n+1}((n+1)T + 0)| &\leq 2 \Delta \sigma (\tau_1 + \tau_2) N_r. \end{aligned} \quad (30)$$

再利用(13)式可以证明:如果系统稳定,只要 M 足够大, $\theta_A(t)$ 和 $\theta(t)$ 在采样时刻的差小于预先给定的常数 C 。因为

$$\begin{aligned} |\theta_n((n+1)T) - \theta_A((n+1)T)| &\leq \frac{2\rho V_{c\max}}{M} + N_r^{-1} |\phi_n((n+1)T)| \\ &\leq \frac{2\rho V_{c\max}}{M} + \frac{2\rho \tau_2 \Delta \sigma}{M} < C. \end{aligned} \quad (31)$$

由此可见,只要(20)式成立,并适当选择参数 τ_3 , M 和 ρ ,就能保证图3中 A 点的输出 $\theta_A(t)$ 和 B 点的输出 $\theta(t)$ 在采样时刻的差小于任意预先给定的常数 C 。

所以,如果图3所示的系统是稳定的,并且 M 取足够大,则取 A 点的 θ_A 作反馈量和取 B 点的 θ 作反馈量,两者最多相差一个预先给定的常数。反之,如果图5所示的系统是稳定的,则 $\dot{\theta}_e$ 一定存在最大值 $\dot{\theta}_{e\max}$ 。若以 θ_e 作为步进电机的输入量,只要选取足够的 M 以使(31)式成立,即相当于图3中 $R = V_0 t$, $\theta_n((n+1)T) = \theta_{en}((n+1)T) \pm C$ 。则图3所示的系统是稳定的。由此得出

结论4. 图3所示的系统,当参考输入为: $R = V_0 t$,满足结论1—3的条件,且 M 足够大时系统是稳定的。图5所示的系统,当其输入也为 $R_e = V_0 t$, $\Delta \sigma$ 由(18)式确定, C 为任意给定的常数时,系统也是稳定的。反之亦然。

3. 简化系统的稳定性分析

通过以上讨论,把一个复杂非线性系统的稳定性问题,简化为一个二阶非线性采样系统的稳定性问题。可以很容易地利用 Popov 定理证明它的稳定性,并利用终值定理证明这个系统是速度无差系统,从而进一步证明了常数 C 对系统的稳定性不起作用。还可以利用求暂态过程求出 V_e 的最大值^[1],然后确定步进电机的参数,保证(31)式成立,这点本文不再赘述。

利用 Popov 定理和 Jury 准则很容易证明^[1]: 若系统满足下列条件,限幅器线性部分的斜率为 1; $0 < \tau_2 T^2 / 2 < 2$; $0 < \tau_1 T < 2$,则简化系统是绝对稳定的。

利用终值定理很容易证明^[1]本系统是速度无差系统;对加速度输入是有差系统,而且误差正比于 $1/\tau_1$ 。因此,当参考信号为恒定频率的脉冲信号时,系统的稳态误差仅取决于部件本身的精度。

四、试验结果

根据以上方法设计的以步进电机为控制对象的锁相系统,进行了模拟试验的验证,并已用于实际系统。在实际系统中选用以下参数: $V_0 = 2\pi/1.2$ 秒; $T = 1.2$ 秒; $\tau_1 = 0.611$; $\tau_2 = 0.170$; 限幅器线性部分的斜率等于 1。稳态误差为 $0.02\text{--}0.07^\circ$ 。试验结果证明,设计思想和分析方法是完全正确的。实际设计时,我们先利用简化系统求出稳定条件和 V_{cmax} , 然后再利用文中的结果确定步进电机力矩 M 、阻尼系数 τ_3 和限幅 $\Delta\sigma$ 等参数。

费珣、王长龙、郭崇喜和李宝缓等同志给了作者很多有益的帮助,深致谢意。

参 考 文 献

- [1] 郭兆曾, 数字锁相迴路的设计, 自动化学报, 第 8 卷第 1 期, 1982.
- [2] H. H. 包戈留包夫, I.O. A. 米特罗波尔斯基著, 金福临等译, 非线性振动理论中的渐近方法, 上海科学技术出版社, 1963.
- [3] M. Fleming, S. Marx, A. Mechanically Despun Antenna for Communications Satellite Application, AIAA paper, 68—428.
- [4] K. Venkataratnam, Subhas, C. Sarkar and S. Palani, Synchronizing Characteristics of Step Motor, *IEEE Trans. on Auto. Control* AC-14(1969), 510—517.

ANALYSIS AND DESIGN OF STEP MOTOR PHASE LOCKING CONTROL SYSTEM

GUO ZHAOZENG

(Beijing Institute of Control Engineering)

ABSTRACT

A step motor phase locking control system and it's velocity error damping method is presented in this paper. A convenient method for engineering design is also given. The results of simulation and practical application show that the given method is correct.