第8卷 第3期 自 动 化 学 报 Vol. 8, No. 3
1982年7月 ACTA AUTOMATICA SINICA July 1982

研究简报

光 滑 公 式

朱 学 煜[1)]
(洛阳农机学院)

摘 要

本文提出了光滑公式应满足的条件及三个新的光滑公式.

在数据处理(一维情况)中通常使用三点光滑公式. 设连续函数 $x = f(t)$ 的离散取样值为

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \tag{1}$$

光滑后的数据为 $x^* = f^*(t)$, 对应的离散值为

$$x_1^*, x_2^*, \cdots x_n^* \tag{2}$$

并且有光滑公式

$$x_1^* = (x_1 + x_2)/2,\ x_i^* = (x_{i-1} + x_i + x_{i+1})/3,$$
$$x_n^* = (x_{n-1} + x_n)/2,\ (1 < i < n) \tag{3}$$

根据定积分性质,可将公式(3)转换成

$$x^* = f^*(t) = \frac{1}{a}\int_{t-a/2}^{t+a/2} f(u)du,\ (a > 0) \tag{4}$$

a 为平均范围.

一、理 论 分 析

公式(4)具有下面三条性质: 1) $a \to 0$ 时, $x^* = x$; 2) $x = f(t) =$ 常数时, $x^* = x$; 3) $x = f(t) = t$ 时, $x^* = x$. 因为积分是线性运算,由2)及3)立即得到当 $x = At + B$ 时, $x^* = x$. 因为 $x = At + B$ 为线性函数,所以有较好的光滑性. 上述三条基本性质可以规定为光滑公式都应具备的条件.

为什么(4)式能起到光滑的功能呢?经频谱分析,可以看出(4)式相当于低通滤波器. 设:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega u} f(u)du, \tag{5}$$

$$F^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega u} f^*(u)du. \tag{6}$$

本文于1981年1月16日收到.

1) 洛阳农机学院赵正芳同志帮助制图,特此致谢.

将(4)式代入(6),经过化简得到:

$$F^*(\omega) = F(\omega)\sin(a\omega/2)/(a\omega/2), \tag{7}$$

$$F^*(\omega) = (e^{j\omega a/2} - e^{-j\omega a/2})F(\omega)/aj\omega. \tag{8}$$

由(8)得到:

$$F(\omega) = F^*(\omega)aj\omega/(e^{j\omega a/2} - e^{-j\omega a/2}) = F^*(\omega)aj\omega e^{-j\omega a/2}/(1 - e^{-j\omega a})$$
$$= aj\omega(e^{-j\omega a/2} + e^{-j\omega\frac{3}{2}a} + \cdots + e^{-j\omega\frac{2k+1}{2}a} + \cdots)F^*(\omega). \tag{9}$$

由富氏变换的基本性质,得到复原公式:

$$f(t) = a\frac{d}{dt}\left(f^*\left(t-\frac{a}{2}\right) + f^*\left(t-\frac{3}{2}a\right) + \cdots + f^* \times\left(t - \frac{2x+1}{2}a\right) + \cdots\right). \tag{10}$$

复原公式(10)给出了由光滑后数据恢复原数据的方法.

由(7),得振幅谱为:

$$|F^*(\omega)| = |F(\omega)|\left|\sin\frac{a}{2}\omega\right| \Big/ \left|\frac{a}{2}\omega\right|. \tag{11}$$

由(11)可知,(4)式相当于低通滤波器(其中 $\sin\frac{a}{2}\omega\Big/\frac{a}{2}\omega$ $(a=\pi)$ 和 ω 的关系见图1). 因此,能起光滑作用. 又由于(11)式的因子 $\left|\sin\frac{a}{2}\omega\right|\Big/\left|\frac{a}{2}\omega\right|$ 侧向泄漏大,并按 $\frac{1}{\omega}$ 衰减(衰减较慢). 为了克服此缺点,本文提出新的光滑公式:

$$\hat{x} = \hat{f}(t) = \frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}\int_{t-\frac{a}{2}}^{t+\frac{a}{2}} \cos(u-t)fudu. \tag{12}$$

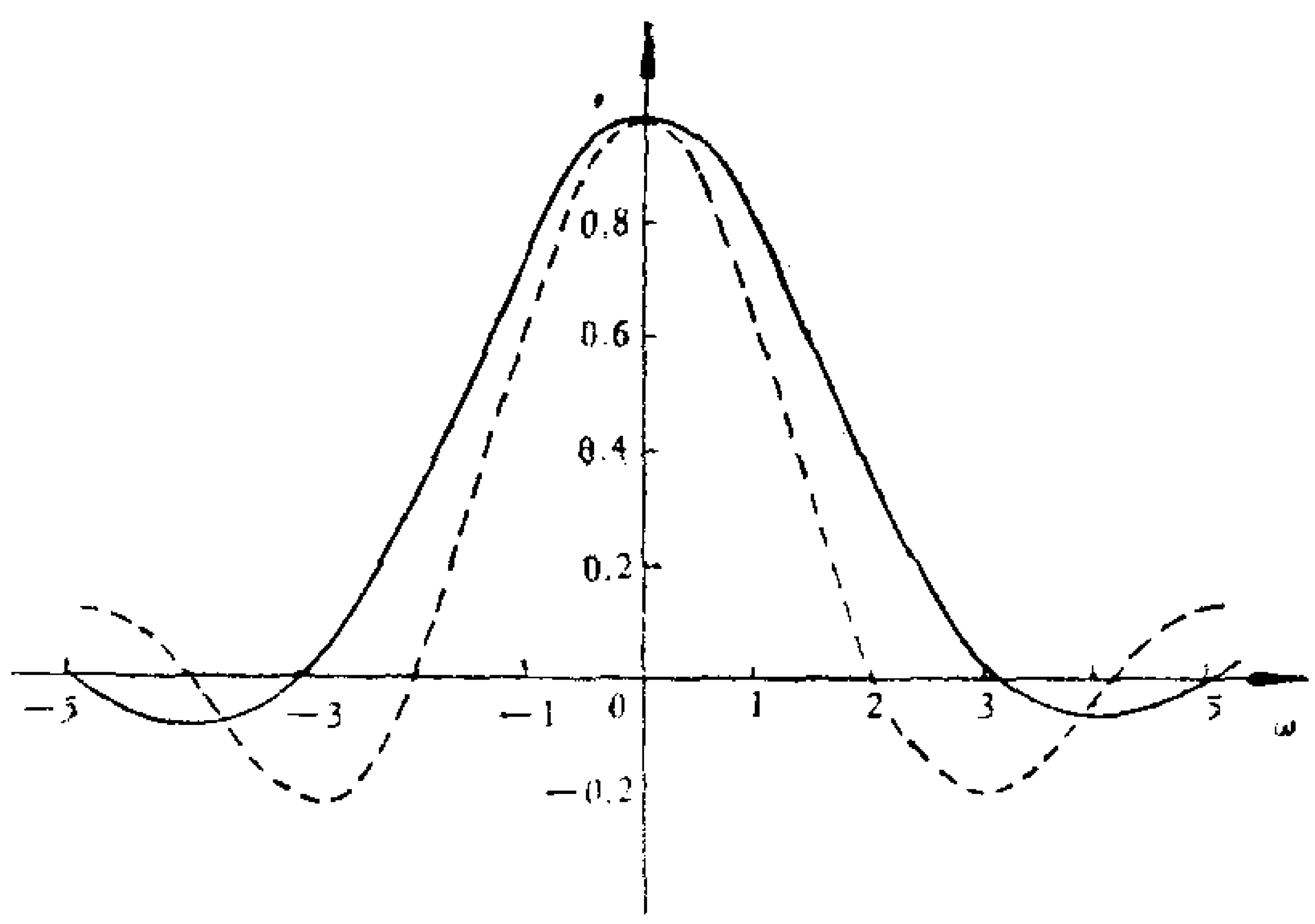

图 1

——$\cos\frac{\pi}{2}\omega/(1-\omega^2)$; $\cdots\cdot\sin\frac{\pi}{2}\omega\Big/\frac{\pi}{2}\omega$

二、新的光滑公式

显然(12)式具有与(4)式相同的三条基本性质. 当 $a=\pi$ 时,对(12)式进行频谱分

析：

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega u}\left\{\frac{1}{2}\int_{u-\frac{\pi}{2}}^{u+\frac{\pi}{2}} \cos(v-u) f(v) dv\right\} du$$
$$= F(\omega)\left(\cos\frac{\pi}{2}\omega\right) \Big/ (1-\omega^2). \tag{13}$$

$\cos\frac{\pi}{2}\omega \Big/ (1-\omega^2)$ 和 $\sin\frac{\pi}{2}\omega \Big/ \frac{\pi}{2}\omega$ 与 ω 的关系见图 1. 由于

$$\left|\cos\frac{\pi}{2}\omega \Big/ (1-\omega)^2\right|$$

按 $\frac{1}{\omega^2}$ 衰减，测向泄漏小，衰减速度快，因此式(12)比(4)的光滑效果好．根据(12)式建议用三点公式(14)(在式(12)中取 $a=\pi$，离散化时取 $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，$\cos 0$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$，利用加权系数之和为 1，便得到公式(14))和五点公式(15)(式(12)中，取 $a=\pi$，$\cos(-80°)$，$\cos(-40°)$，$\cos 0$，$\cos(40°)$，$\cos(80°)$，并利用加权系数之和为 1，便得到公式(15))代替通常的光滑公式(3).

$$\hat{x}_1 = (x_1+x_2)/2;\ \hat{x}_i = 0.3x_{i-1} + 0.4x_i + 0.3x_{i+1};\ \hat{x}_N = (x_{N-1}+x_N)/2;\ (1<i<N). \tag{14}$$

$$\hat{x}_1 = (x_1+x_2)/2;\ \hat{x}_2 = (x_2+x_3)/2;\ \hat{x}_i = 0.06x_{i-2} + 0.27x_{i-1} + 0.34x_i$$
$$+ 0.27x_{i+1} + 0.06x_{i+2};\ \hat{x}_{N-1} = (x_{N-2}+x_{N-1})/2;$$
$$\hat{x}_N = (x_{N-1}+x_N)/2. \quad (2<i<N-1). \tag{15}$$

从上面的频谱分析，可见新公式(14)的效果要优于旧公式(3)，特别对于变化较快的数据更为显著，见图 2 (原数据由两个为半周期的余弦波，稍作修改拼接而成). 图 3 (原数据取自服从标准正态分布 $N(0,1)$ 的随机数表[2]). 由图 2 可看出新公式比旧公式优越. 由图(3)看出新公式比旧公式也有改进，特别在 $t=2$，$t=8$ 附近. 又由于从式

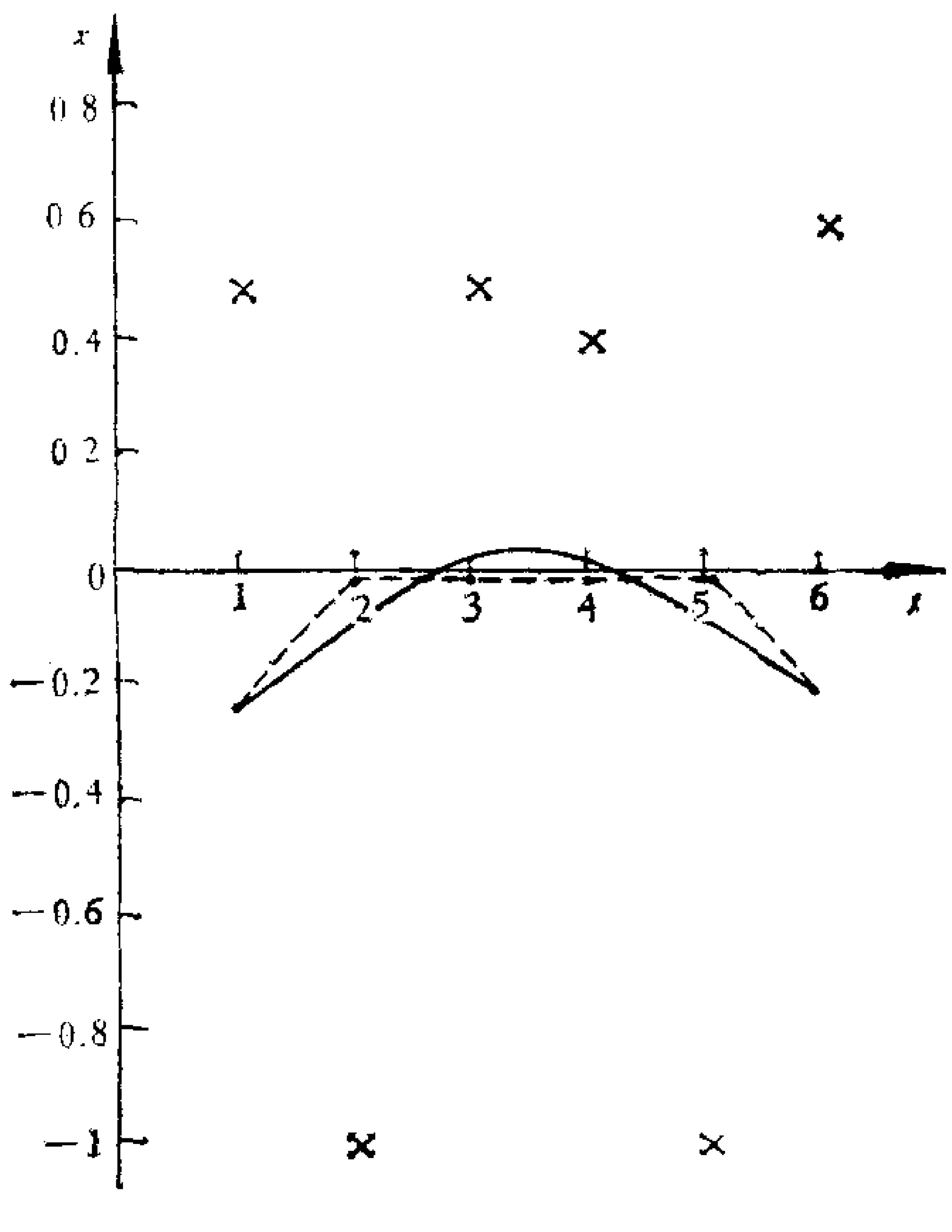

图 2

×原数据　一新公式　…旧公式

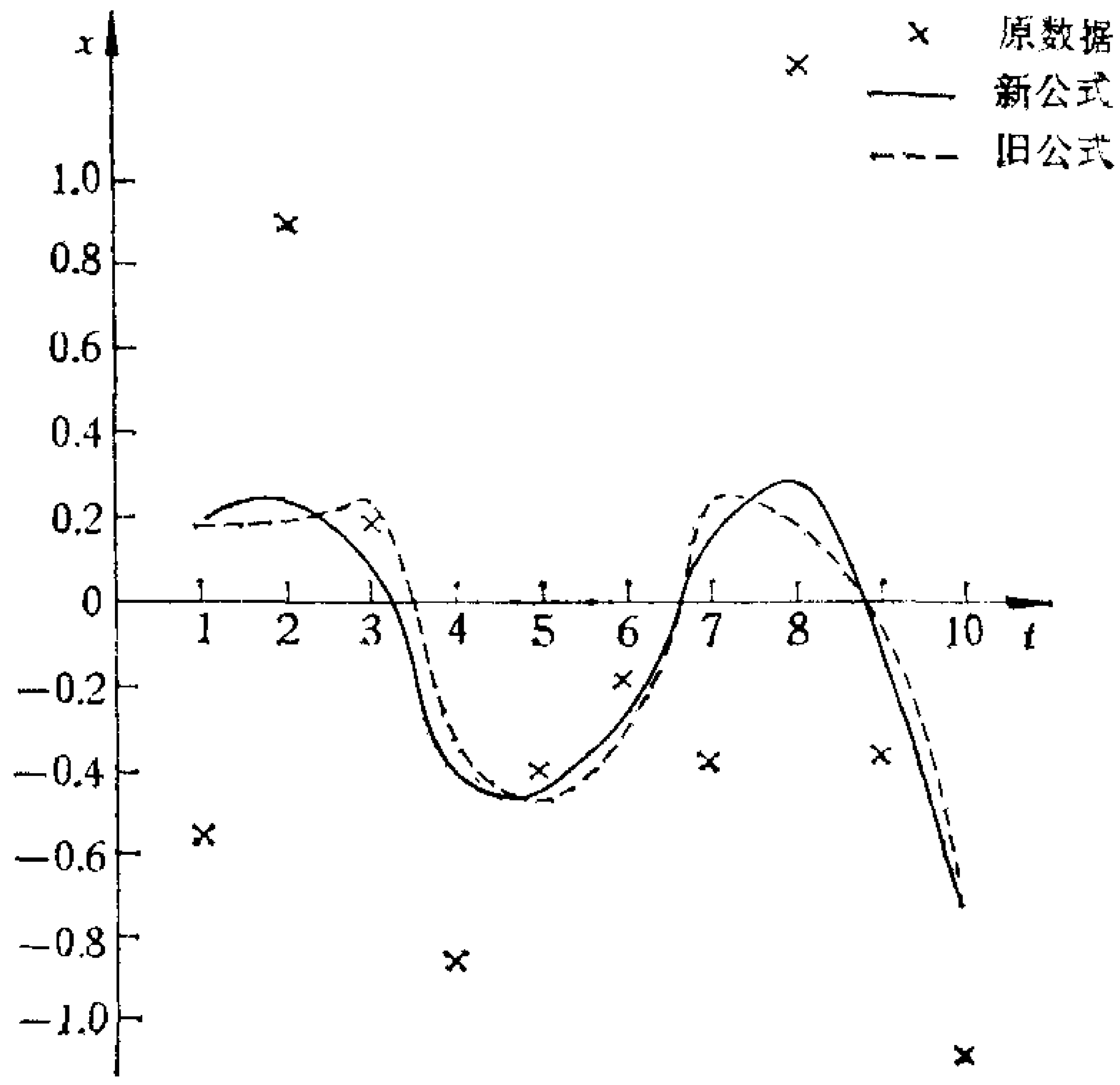

图 3

(12)得出式(14)时，固定 $a=\pi$ 及特殊角度．因此式(12)的灵活性更强，可以机动地应付更为广泛的实际情况．

由式(14)，可推广到二维数据的光滑．如取九点格式，由于 (i,j) 至 $(i+1,j-1)$ 的距离为对角线，即为 (i,j) 至 $(i,j-1)$ 的 $\sqrt{2}$ 倍，因此在 $(i+1,\ j-1)$，$(i+1,\ j+1)$，$(i-1,\ j-1)$，$(i-1,\ j+1)$ 四点上用 0.1 作加权系数．

$$\begin{aligned}\hat{x}(i,j) = & 0.025x(i-1,j-1)+0.075x(i-1,j)+0.025x(i-1,j+1) \\ & +0.075x(i,j-1)+0.6x(i,j)+0.075x(i,j+1)+0.025 \\ & x(i+1,j-1)+0.075x(i+1,j)+0.025x(i+1,j+1).\end{aligned} \tag{16}$$

式(16)作为改进的数字图象处理的光滑公式．

参 考 文 献

[1] R. G. Brown, J. W. Nilsson, Introduction to Linear Systems Analysis. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1962.

[2] F. Mostelley, R. K. Rourkn, G. B. Thomas, Probability with Statistical Applications (Second Edition). Addison-wesley Publishing Company, 1973.

SMOOTHING FORMULAE

ZHU XUEYU

(*Luoyang Institute of Agricultural Machinery*)

ABSTRACT

This paper deals with the condition of smoothing formulae and develops three new smoothing formulae.

第8卷 第2期更正

页	行	误	正
128	倒 11	……寄存点(…移存点)	……寄存器(……移存器)
128	倒 5	……多项式中，有最长……	……多项式中能得到最长……
135	倒 8	…… if ……	…… of ……