

半平面搜索法——用电子计算机计算并校正根轨迹的一种方法

黄志祥

(新疆工学院)

摘要

本文介绍一种用电子计算机计算根轨迹的方法,称为半平面搜索法。其几何意义是,在复平面上作一系列平行于虚轴的直线,用计算机求解这一系列直线与根轨迹的交点。由于根轨迹方程中未出现可变增益 K ,从而使计算大为简化。比传统的伊文思法要简便准确得多。

—

线性定常系统闭环传递函数特征方程根的分布,直接决定了系统过渡过程的品质。当闭环传递函数只有一对主导极点靠近虚轴和坐标原点,而其它零、极点相对于这对主导极点都被认为是远离虚轴的,则该线性定常系统对单位阶跃的瞬态响应,可以用一个典型的二阶系统来近似,其闭环传递函数由下式表征:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (1)$$

其瞬态响应为:

$$C(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_d t + \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right), \quad 0 < \xi < 1, \quad t \geq 0 \quad (2)$$

随着阻尼系数 ξ 的不同,用相对时间坐标 $\omega_n t$ 来描述,其瞬态响应曲线¹⁾如图1。当闭环系统增加一个负实极点 $s = -p$,则系统成为三阶,其闭环传递函数为:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2 p}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + p)}. \quad (3)$$

如令

$$\beta = \frac{p}{\xi\omega_n}, \quad (4)$$

则三阶系统对单位阶跃的瞬态响应为:

$$C(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\beta(\beta-2)\xi^2 + 1} \left\{ \beta(\beta-2)\xi^2 \cos \sqrt{1-\xi^2} \omega_n t \right.$$

本文于1980年10月28日收到。

1) 文中瞬态响应均指单位阶跃作用的。

$$+ \frac{[\beta(\beta - 2)\xi^2 + \beta]\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t \left. \right\} + \frac{-e^{-\beta t}}{\beta(\beta - 2)\xi^2 + 1} \quad (5)$$

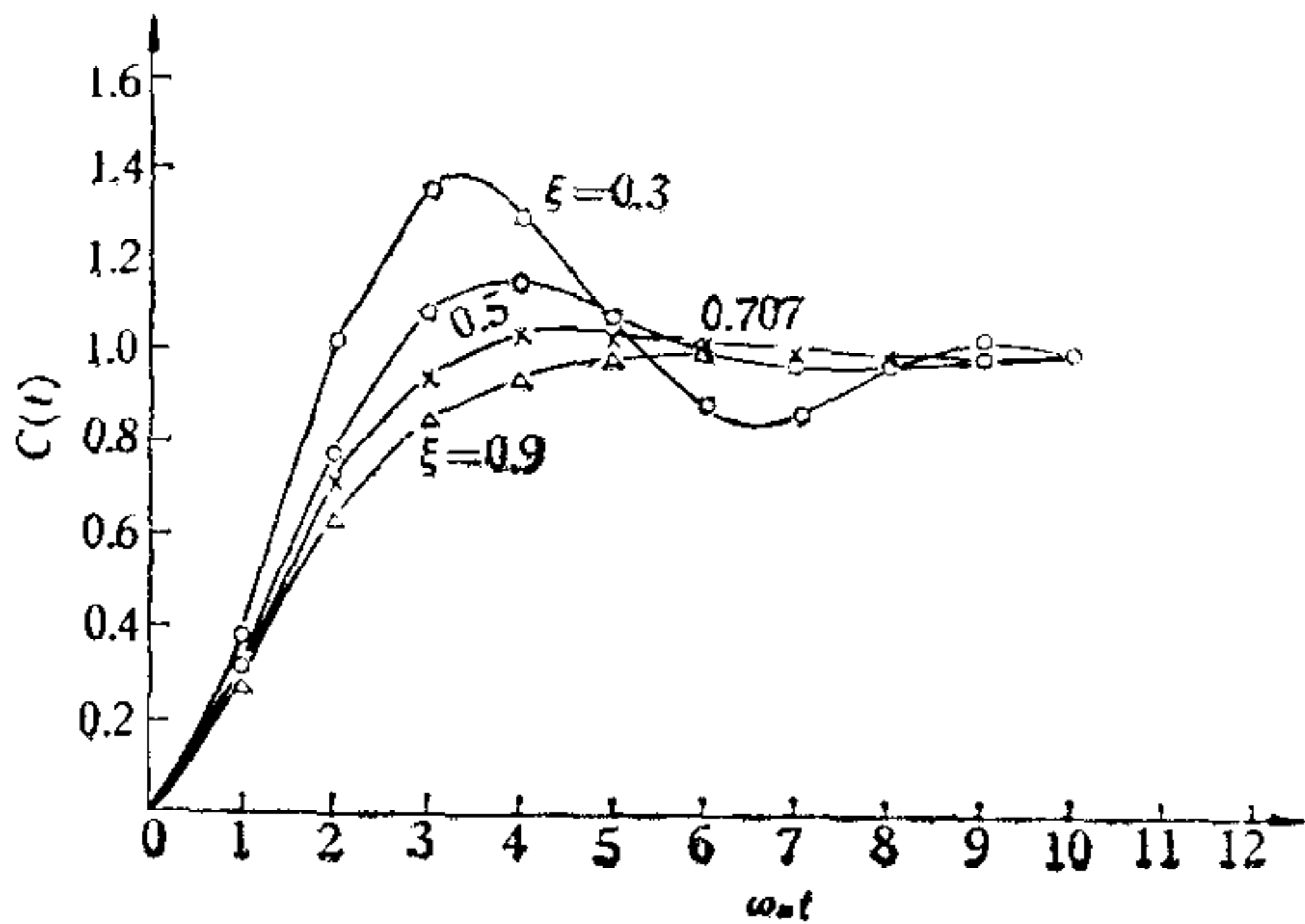


图 1 二阶系统单位阶跃响应曲线

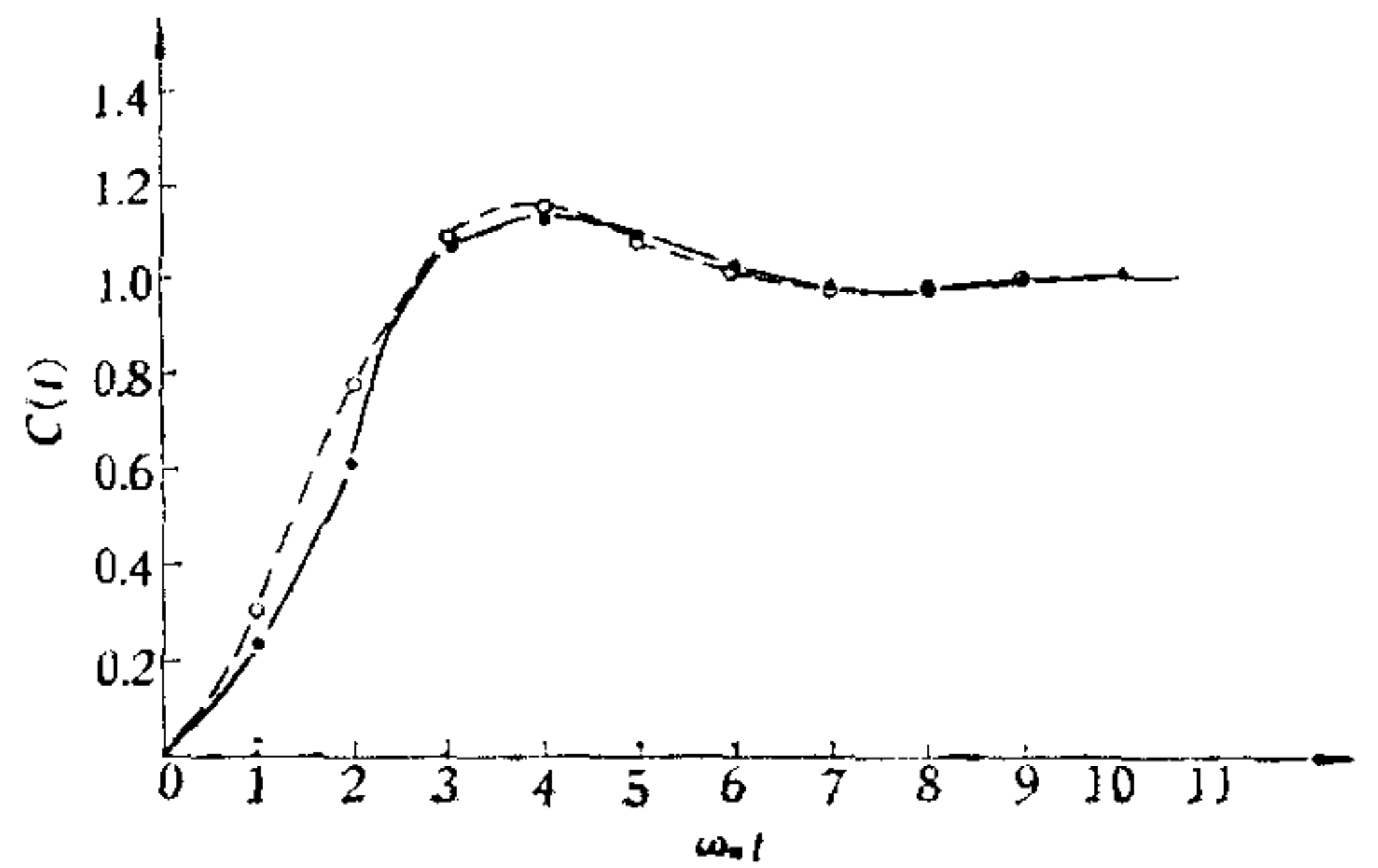


图 2

当 $\xi = 0.5$, $\beta = 6.91$ 时, 该瞬态响应曲线如图 2 中实线所示。虚线为 $\xi = 0.5$ 时二阶系统瞬态响应曲线。实际上二者差别甚少, 一般 $\beta > 5$ 之后, 三阶系统就可以用二阶来近似。

从根轨迹寻找系统闭环主导极点甚为方便。

—
—

设线性定常系统开环传递函数为下列形式:

$$G(s)H(s) = \frac{K(B_m s^m + B_{m-1} s^{m-1} + \dots + B_1 s + B_0)}{A_n s^n + A_{n-1} s^{n-1} + \dots + A_1 s + A_0}, \quad (6)$$

则闭环系统特征方程可表达为:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + K \frac{B_m s^m + B_{m-1} s^{m-1} + \dots + B_1 s + B_0}{A_n s^n + A_{n-1} s^{n-1} + \dots + A_1 s + A_0} = 0. \quad (7)$$

移项可得:

$$K \frac{B_m s^m + B_{m-1} s^{m-1} + \dots + B_1 s + B_0}{A_n s^n + A_{n-1} s^{n-1} + \dots + A_1 s + A_0} = -1. \quad (8)$$

式(8)是 n 阶线性定常系统根轨迹一般表达式。令 $s = \sigma + j\omega$ 代入(8)式, 对该式分母而言, 有

$$\begin{aligned} A_n s^n + A_{n-1} s^{n-1} + \dots + A_1 s + A_0 &= A_n (\sigma + j\omega)^n + A_{n-1} (\sigma + j\omega)^{n-1} + \dots \\ &+ A_1 (\sigma + j\omega) + A_0 = C_0 + \sum_{i=0}^l \omega^{(4i+4)} C_{4i+4} - \sum_{i=0}^l \omega^{(4i+2)} C_{4i+2} \\ &+ j \left[\sum_{i=0}^l \omega^{(4i+1)} C_{4i+1} - \sum_{i=0}^l \omega^{(4i+3)} C_{4i+3} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)中各项系数 $C_0, C_{4i+1}, C_{4i+2}, C_{4i+3}, C_{4i+4}$ 都是 σ 的函数, 它们分别表示为:

$$C_0 = \sum_{k=0}^n A_{n-k} \sigma^{n-k}, \quad (10)$$

$$C_{4i+1} = \sum_{k=0}^{n-(4i+1)} A_{n-k} \binom{n-k}{4i+1} \sigma^{n-[k+(4i+1)]}, \quad (11)$$

$$C_{4i+2} = \sum_{k=0}^{n-(4i+2)} A_{n-k} \binom{n-k}{4i+2} \sigma^{n-[k+(4i+2)]}, \quad (12)$$

$$C_{4i+3} = \sum_{k=0}^{n-(4i+3)} A_{n-k} \binom{n-k}{4i+3} \sigma^{n-[k+(4i+3)]}, \quad (13)$$

$$C_{4i+4} = \sum_{k=0}^{n-(4i+4)} A_{n-k} \binom{n-k}{4i+4} \sigma^{n-[k+(4i+4)]}. \quad (14)$$

分子多项式为:

$$\begin{aligned} B_m s^m + B_{m-1} s^{m-1} + \dots + B_1 s + B_0 &= B_m (\sigma + j\omega)^m + B_{m-1} (\sigma + j\omega)^{m-1} + \dots \\ &+ B_1 (\sigma + j\omega) + B_0 = D_0 + \sum_{r=0}^q \omega^{(4r+4)} D_{4r+4} - \sum_{r=0}^q \omega^{(4r+2)} D_{4r+2} \\ &+ j \left[\sum_{r=0}^q \omega^{(4r+1)} D_{4r+1} - \sum_{r=0}^q \omega^{(4r+3)} D_{4r+3} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

式(15)中各项系数也是 σ 的函数:

$$D_0 = \sum_{k=0}^m B_{m-k} \sigma^{m-k}, \quad (16)$$

$$D_{4r+1} = \sum_{k=0}^{m-(4r+1)} B_{m-k} \binom{m-k}{4r+1} \sigma^{m-[k+(4r+1)]}, \quad (17)$$

$$D_{4r+2} = \sum_{k=0}^{m-(4r+2)} B_{m-k} \binom{m-k}{4r+2} \sigma^{m-[k+(4r+2)]}, \quad (18)$$

$$D_{4r+3} = \sum_{k=0}^{m-(4r+3)} B_{m-k} \binom{m-k}{4r+3} \sigma^{m-[k+(4r+3)]}, \quad (19)$$

$$D_{4r+4} = \sum_{k=0}^{m-(4r+4)} B_{m-k} \binom{m-k}{4r+4} \sigma^{m-[k+(4r+4)]}. \quad (20)$$

式(9)及(15)中 l 及 q 的值取正整数, 决定于系统阶次.

当 $n = 1, 2, 3, 4$ 时, $l = 0$; 当 $m = 1, 2, 3, 4$ 时, $q = 0$; 当 $n = 5, 6, 7, 8$ 时, $l = 1$; 当 $m = 5, 6, 7, 8$ 时, $q = 1$, 如此类推.

将(9)式及(15)式代入根轨迹方程式(8)中, 得到 n 阶线性定常系统通用方程式:

$$\begin{aligned} &\left[C_0 + \sum_{i=0}^l \omega^{(4i+4)} C_{4i+4} - \sum_{i=0}^l \omega^{(4i+2)} C_{4i+2} \right] \left[\sum_{r=0}^q \omega^{(4r+1)} D_{4r+1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{r=0}^q \omega^{(4r+3)} D_{4r+3} \right] = \left[\sum_{i=0}^l \omega^{(4i+1)} C_{4i+1} - \sum_{i=0}^l \omega^{(4i+3)} C_{4i+3} \right] \\ &\quad \times \left[D_0 + \sum_{r=0}^q \omega^{(4r+4)} D_{4r+4} - \sum_{r=0}^q \omega^{(4r+2)} D_{4r+2} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

式(21)的特点是方程式中不包含参变量 K , 即不包含增益值, 当给出复平面上某一

实部 σ 值, 就可求得系数 $C_0, C_{4i+1}, C_{4i+2}, C_{4i+3}, C_{4i+4}$ 及 $D_0, D_{4r+1}, D_{4r+2}, D_{4r+3}, D_{4r+4}$, 从而求得 ω 值. 然后, 再由已经求得的根轨迹坐标 $\sigma + j\omega$ 求出增益 K . 这一方法的几何意义是, 作一系列平行于复平面虚轴的直线 $\sigma = \text{const.}$, 由式(21)寻找根轨迹与直线 $\sigma = \text{const.}$ 的交点, 这一系列直线之间的间距就是计算机的步长. 这样求解根轨迹的数据就可由计算机来完成.

例如, 某四阶线性定常系统结构如图 3 所示. 该系统由一个一阶惯性环节, 一个二阶非周期环节, 一个比例微分环节, 一个积分环节和一个比例环节组成. $n = 4, m = 1$.

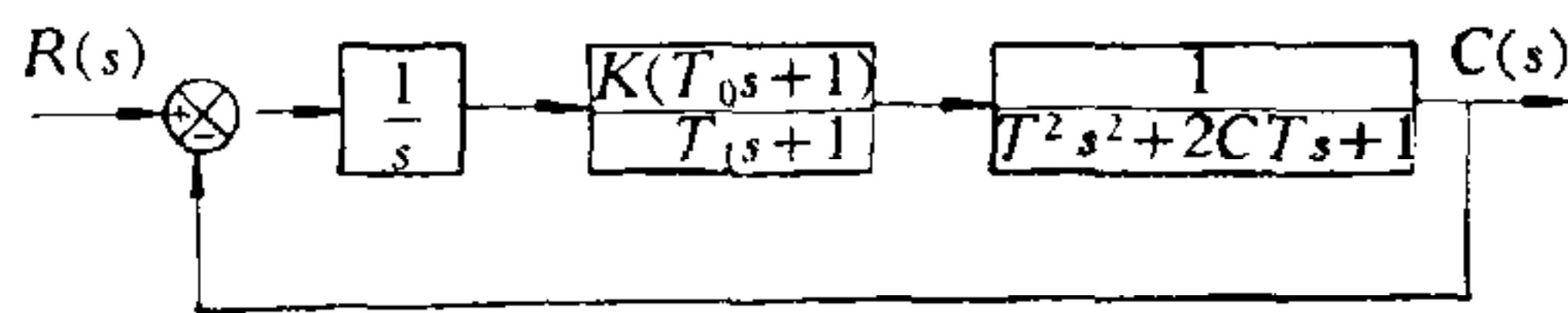


图 3 典型四阶系统结构图

式(8)可以列写为:

$$G(s)H(s) = \frac{K(B_1s + B_0)}{A_4s^4 + A_3s^3 + A_2s^2 + A_1s + A_0} = -1. \quad (22)$$

由于 $n = 4, m = 1$, 故 $l = 0, q = 0$, 系数分别为:

$$C_0 = \sum_{k=0}^4 A_{4-k} \sigma^{(4-k)} = A_4 \sigma^4 + A_3 \sigma^3 + A_2 \sigma^2 + A_1 \sigma + A_0 \quad (23)$$

$$C_1 = \sum_{k=0}^{4-1} A_{4-k} \binom{4-k}{1} \sigma^{4-(k+1)} = 4A_4 \sigma^3 + 3A_3 \sigma^2 + 2A_2 \sigma + A_1, \quad (24)$$

$$C_2 = \sum_{k=0}^{4-2} A_{4-k} \binom{4-k}{2} \sigma^{4-(k+2)} = 6A_4 \sigma^2 + 3A_3 \sigma + A_2, \quad (25)$$

$$C_3 = \sum_{k=0}^{4-3} A_{4-k} \binom{4-k}{3} \sigma^{4-(k+3)} = 4A_4 \sigma + A_3, \quad (26)$$

$$C_4 = \sum_{k=0}^{4-4} A_{4-k} \binom{4-k}{4} \sigma^{4-(k+4)} = A_4, \quad (27)$$

$$D_0 = \sum_{k=0}^1 B_{1-k} \sigma^{1-k} = B_1 \sigma + B_0, \quad (28)$$

$$D_1 = \sum_{k=0}^0 B_{1-k} \sigma^{1-[k+1]} \binom{1-k}{0} = B_1, \quad (29)$$

$$D_2 = 0; \quad D_3 = 0; \quad D_4 = 0. \quad (30)$$

式(22)到(30)中各项参数 $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, B_0, B_1$ 按图 3 可推算如下:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \frac{1}{T_1 T^2}, \quad A_2 = \frac{2CT + T_1}{T_1 T^2}, \quad A_3 = \frac{2C}{T} + \frac{1}{T_1},$$

$$A_4 = 1, \quad B_0 = \frac{1}{T_0}, \quad B_1 = 1.$$

代入根轨迹方程(21)式, 可得:

$$\begin{aligned}
 & [(A_4\sigma^4 + A_3\sigma^3 + A_2\sigma^2 + A_1\sigma + A_0)] + A_4\omega^4 \\
 & - (6A_4\sigma^2 + 3A_3\sigma + A_2)\omega^2] B_1\omega = [(4A_4\sigma^3 \\
 & + 3A_3\sigma^2 + 2A_2\sigma + A_1)\omega \\
 & - (4A_4\sigma + A_3)\omega^3](B_1\sigma + B_0). \quad (31)
 \end{aligned}$$

化简得

$$E_4\omega^4 + E_2\omega^2 + E_0 = 0. \quad (32)$$

式中

$$\begin{aligned}
 E_4 &= 1, \quad E_2 = -2\sigma^2 - (2A_3 - 4B_0)\sigma - (A_3B_0 - A_2), \\
 E_0 &= -3\sigma^4 - (2A_3 + 4B_0)\sigma^3 - (A_2 + 3A_3B_0)\sigma^2 \\
 &\quad - 2A_2B_0\sigma + A_0 - A_1B_0.
 \end{aligned}$$

根据图 3 所示结构图及根轨迹方程式 (32) 编制四阶及四阶以下根轨迹计算通用程序, 只要输入四阶系统参数 T_0, T_1, T, C, n, m 以及搜索步长 H 值, 就可由计算机计算出根轨迹数据. 如果再给出根轨迹上主极点 (可由根轨迹数据中选择), 计算机还可直接绘制瞬态响应曲线, 并给出相应数据. 根轨迹图形还可以通过图象显示装置从荧光屏上直接显示 (如图 4 所示).

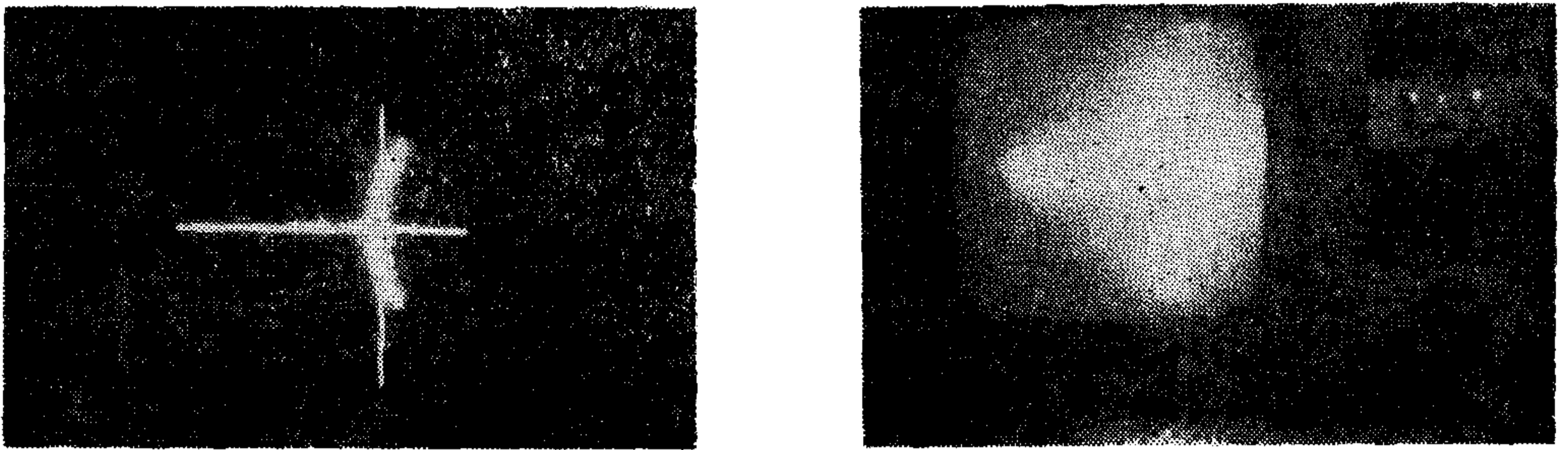


图 4 CRT 显示根轨迹图形

三

例 1. 如图 5 所示的二阶系统, 其开环传递函数为:

$$G(s)H(s) = \frac{K(0.5s+1)}{s(s+1)},$$

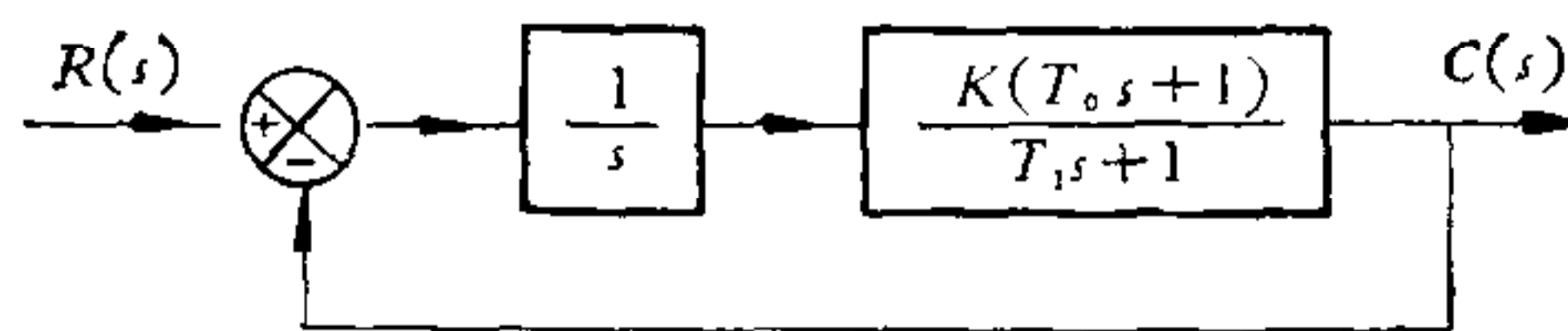


图 5 二阶系统

按典型四阶系统结构图 (图 3) 的参数符号规定, 对该二阶系统有

$$T_0 = 0.5; \quad T_1 = 1; \quad T = 0; \quad C = 1; \quad n = 2; \quad m = 1$$

将上述数据用键盘输入后, 计算机算出根轨迹数据如下:

```

run
a computer algorithm for obtaining the root loci
the open loop transmitte is:
gh(s) = k*(t0*s + 1)/(s*(t1*s + 1)*(t*t*s*s + 2*c*t*
    s + 1))
t0, t1, t, c, m, n, h, n0
=0.5, 1, 0, 1, 1, 2, -0.1, 10
there are real roots
z1 = -2, p1 = 0, p2 = -1
b(0) = 0
b(1) = -1
b(2) = -2
there are root loci between b0 and b1
there are root loci from b2 to far away
are there any breakaway point between b0 to b1*
1 = yes, 0 = no
=1
finding the breakaway point or break in point
interval (lower limit, upper limit)
=-1, 0
the break point is x = -0.585937
-0.585937 0 0.343145
finding the root loci from the break point
    
```

s0 = -3		
x	y	k
-0.685937	0.523239	0.744459
-0.785937	0.72629	1.1455
-0.885937	0.871246	1.54397
-0.985937	0.985765	1.9438
-1.08593	1.07912	2.34376
-1.18593	1.15642	2.74375
-1.28593	1.2207	3.14375
-1.38593	1.27394	3.54375
-1.48593	1.31821	3.94475
-1.58593	1.35267	4.34423
-1.68593	1.37915	4.74397
-1.78593	1.39804	5.14382
-1.88593	1.40965	5.54376
-1.98593	1.41415	5.94374
-2.08593	1.4116	6.34374
-2.18593	1.40197	6.74373
-2.28593	1.3851	7.14366
-2.38593	1.36075	7.54352
-2.48593	1.32849	7.94324
-2.58593	1.28776	8.34277
-2.68594	1.23672	8.74375
-2.78594	1.17571	9.14376
-2.88594	1.10232	9.54375
-2.98594	1.01387	9.94375
-3.08594	0.90596	10.3437
-3.18594	0.770483	10.7436
-3.28594	0.588898	11.1431
-3.38594	0.281502	11.5436

stop at 1330

根据计算机所计算的数据, 绘制的根轨迹图形为图 6.

如果确定性能指标 $\xi = 0.707$, 意味着通过复平面坐标原点在第二象限作一倾角为 $\cos \theta = \xi$ 的斜线与根轨迹相交, 得到闭环主极点为:

$$\sigma = -1.085, \quad \omega = 1.079.$$

将主极点数据用键盘输入计算机, 由电传打字机打出瞬态响应曲线及数据如图 7 所示.

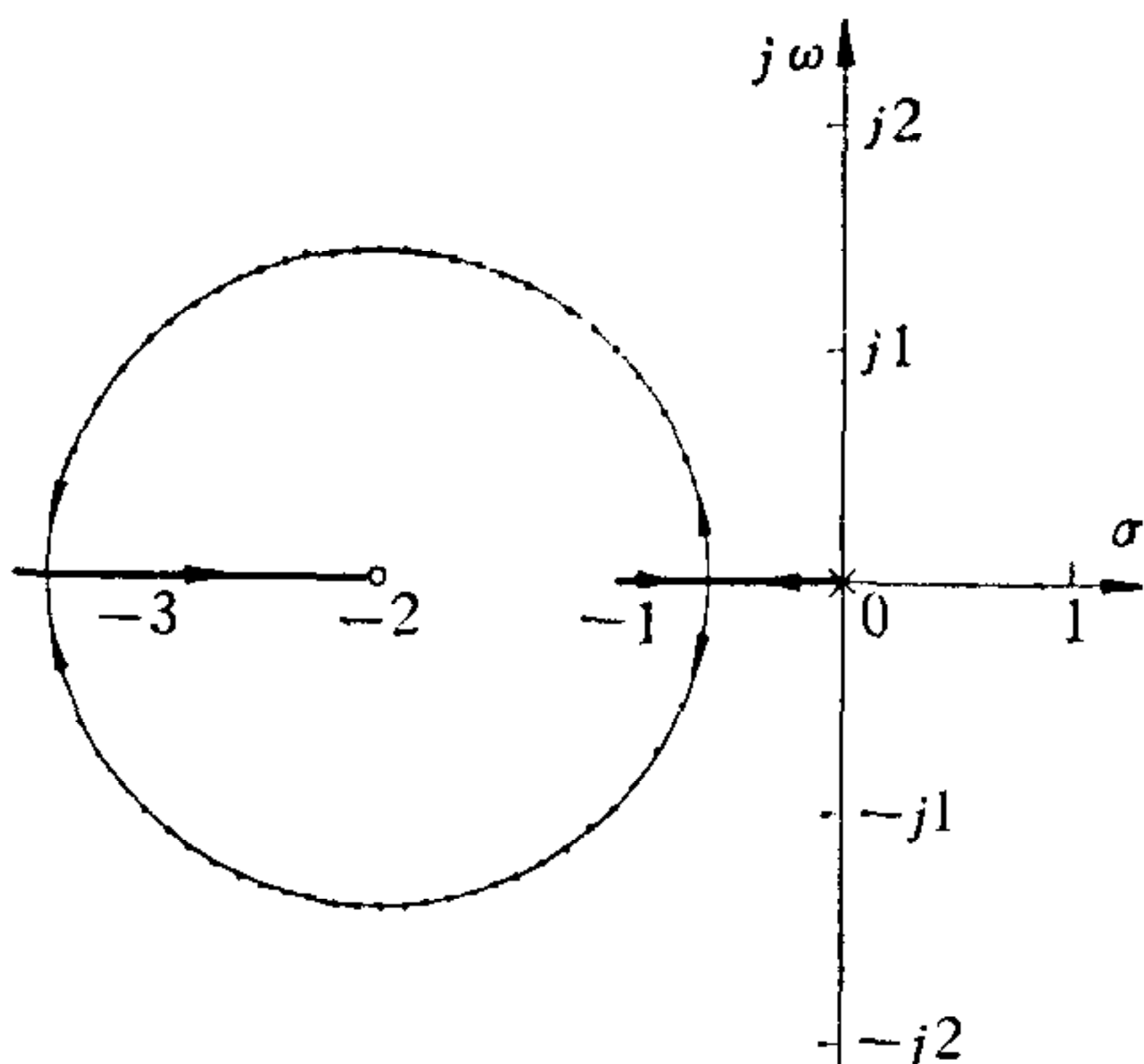


图 6

```

run2000
value of the real part of main poles
input x and y
=-1.085, 1.079
the value of transient
0      1.07288e-6
0.5    0.200995
1      0.540927
1.5    0.812078
2      0.967677
2.5    1.03125
3      1.0421
3.5    1.03143
4      1.01712
4.5    1.00646
5      1.00065
5.5    0.998473
6      0.998254
6.5    0.998775
7      0.999367
7.5    0.999783
    
```

图 7

例 2. 三阶系统结构图如图 8 所示,其开环传递函数为:

$$G(s)H(s) = \frac{2K}{s(s+1)(s+2)}$$

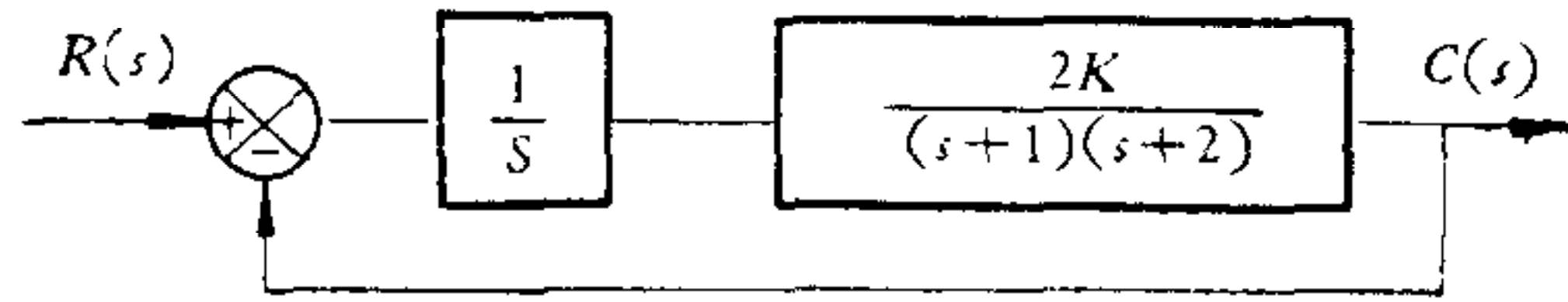


图 8 三阶系统

化成图 3 所示标准形式计算结果如下:

```

run
a computer algorithm for obtaining the root loci
the open loop transmittance is:
gh(s) = K*(t0*s + 1)/(s*(t1*s + 1)*(t2*s**2 + 2*c*t*s + 1))
t0, t1, t, c, m, n, h, n0
=0.25, 0.5, 0.25, 1, 1, 4, -0.1, 10
x1 = -4 x2 = -4
z1 = -4 p1 = 0 p2 = -2 p3 = -4 p4 = -4
b(0) = 0
b(1) = -2
b(2) = -4
b(3) = -4
b(4) = -4
finding the breakaway point or break in point
interval (lower limit, upper limit)
=-2, 0
the break point is x = -0.859375
-0.859375 0 0.384814
finding the root loci from the break point
f(0) = 1.04719
f(1) = 8.37757
f(2) = 15.7079
s0 = -2

```

x	y	k
-0.759374	0.785812	0.668906
-0.659375	1.17981	1.06891
-0.559375	1.49204	1.54925
-0.459375	1.7675	2.1181
-0.359375	2.01921	2.77675
-0.259375	2.25632	3.53418
-0.159375	2.48295	4.3615
-5.93751e-2	2.7017	5.36862
4.06248e-2	2.91434	6.45756
0.140624	3.12212	7.66897
0.240624	3.32594	9.00882
0.340624	3.5265	10.4831
0.440624	3.72431	12.0978
0.540624	3.9198	13.859
0.640624	4.11329	15.7726
0.740624	4.30505	17.8447
0.840624	4.49531	20.0812
0.940624	4.68425	22.4881
1.04062	4.87201	25.0715
1.14062	5.05874	27.8374
1.24062	5.24454	30.7916
1.34062	5.42951	33.9403
1.44062	5.61373	37.2894
1.54062	5.79726	40.845
1.64062	5.98019	44.613
1.74062	6.16255	48.5995
1.84062	6.34439	52.8104
1.94062	6.52577	57.2517
2.04062	6.70672	61.9294

```

contine working
= 0

```

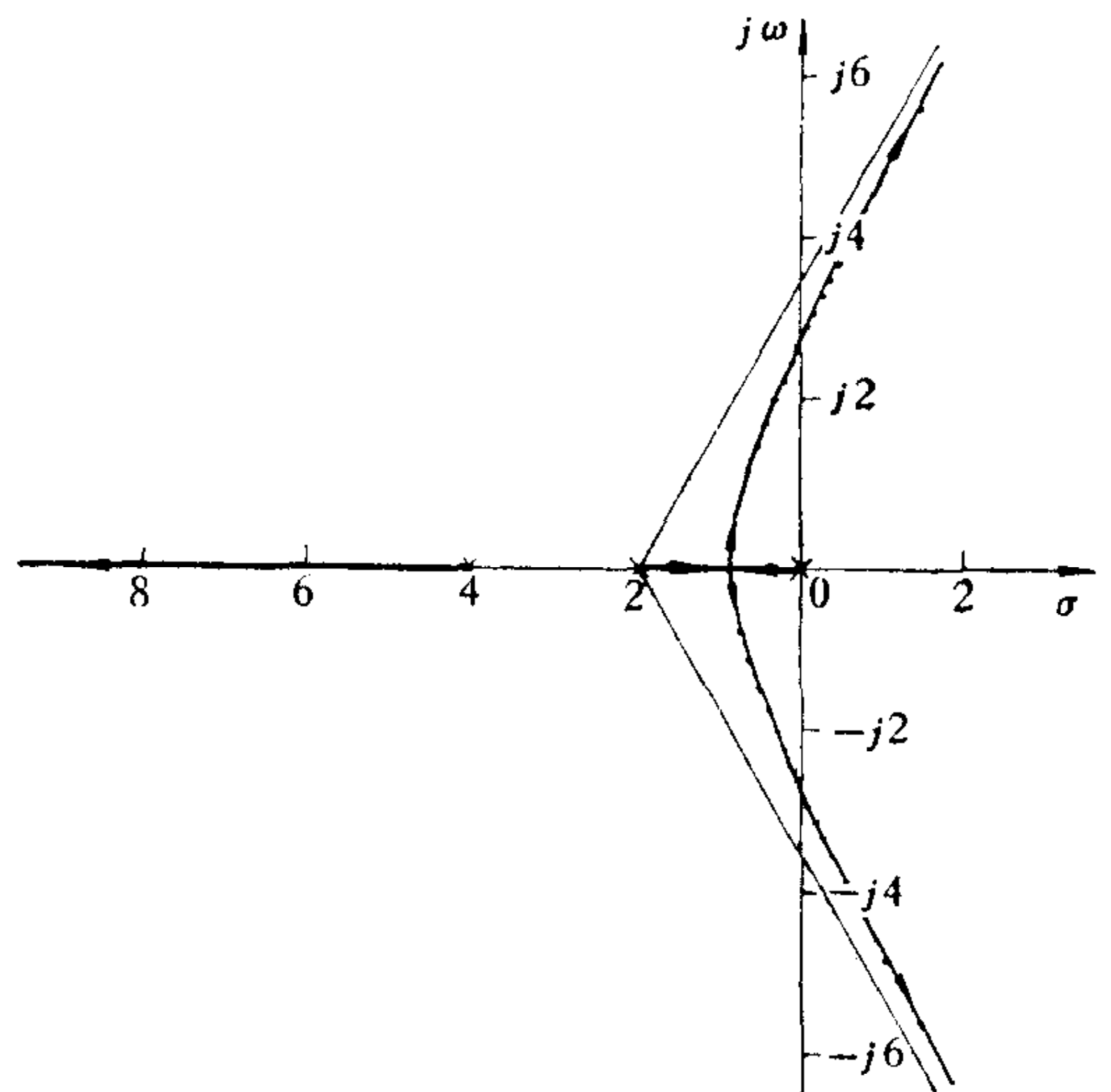


图 9 三阶系统根轨迹

give the parameters of the main poles
input x and y

=-0.659375,1.17981
the value of transient

0	1.07288e-6
0.5	0.178811
1	0.535677
1.5	0.869731
2	1.08443
2.5	1.16829
3	1.15747
3.5	1.10118
4	1.03949
4.5	0.994872
5	0.973447
5.5	0.970915
6	0.97897
6.5	0.989906
7	0.998812
7.5	1.0038
8	1.00515
8.5	1.00419
9	1.00235
9.5	1.00063
10	0.999547

stop at 2150

图 10

将计算机计算数据绘成如图 9 所示的根轨迹图
形。

若取阻尼系数 $\xi = 0.5$ ，也就是通过复平面坐
标原点作 60° 斜线（在第二象限）与根轨迹相交，查
得坐标为： $\sigma = -0.659375$ ； $\omega = 1.17981$ 。则系统瞬态响应如图 10。

例 3. 图 3 为四阶系统结构图，参数为： $T_0 = 0.5$ ； $T_1 = 0.3333$ ； $T = 0.707$ ； $C = 0.707$

根据计算机计算结果绘制根轨迹图如图 12 所示。计算机计算结果如下：

```
run
t0, t1, t, c, m, n, h, n0
= 0.5, 0.333333, 0.7071, 0.7071, 1, 4, -0.05, 5
x1 real = -1 x2 real = -1
x1 imag = 1.00002 x2 imag = -1.00002
there are real roots
z1 = -2 p1 = 0 p2 = -3
```

x	y	k
-0.8		
	0.927155	0.265034
-0.6	0.94133	0.455644
-0.4	1.07569	0.729512
-0.2	1.31366	1.29317
-5.96046e-8	1.61426	2.34275
0.199999	1.9453	4.03831
0.4	2.28997	6.51731
0.599999	2.64042	9.90805
0.799999	2.99311	14.3362
0.999999	3.34645	19.9273
1.2	3.69972	26.807
1.4	4.05263	35.1016
1.6	4.40506	44.9378
1.79999	4.75797	56.4681
1.99999	5.10923	6.7664
2.19999	5.4601	84.9884

contine working

= 0

give the parameters of the main poles
input x and y

=-0.6,0.941

the value of transient

0	1.07288e-6
0.5	0.125542
1	0.393962
1.5	0.679552
2	0.909403
2.5	1.05621
3	1.12396
3.5	1.13286
4	1.10742
4.5	1.06895
5	1.03211
5.5	1.00456
6	0.988403
6.5	0.98218
7	0.982831
7.5	0.987105
8	0.992393
8.5	0.997031
9	1.00025
9.5	1.00196
10	1.00245
10.5	1.00216
11	1.00151
11.5	1.0008
12	1.00023
12.5	0.99987
13	0.999698
13.5	0.999672
14	0.999733

图 11

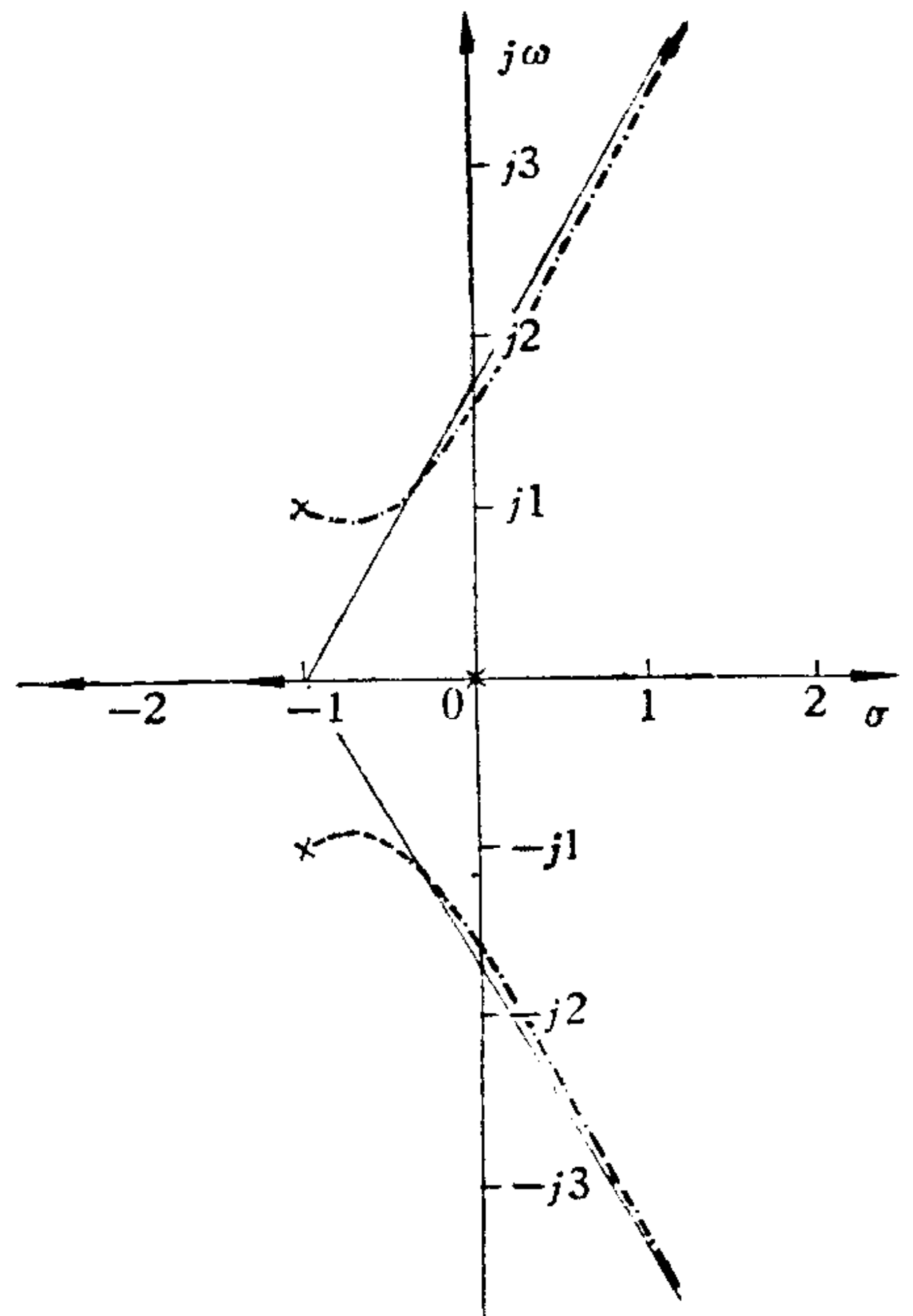


图 12 四阶系统根轨迹图

例 4. 四阶系统具有重极点,其参数为: $T_0 = 0.25, T_1 = 1, T = 0.5; C = 1, n = 4, m = 1$.
计算机计算根轨迹数据及由性能指标确定主导极点后系统瞬态响应曲线(图 13)及数据如下:

```
run
a computer algorithm for obtaining the root loci
the open loop transmittance is:
gh(s) = k*(t0*s + 1)/(s*(t1*s + 1)*(t*t*s*s + 2
*c*t*s + 1))
t0, t1, t, c, m, n, h, n0
= 0.25, 1, 0.5, 1, 1, 4, - 0.1, 10

x1 = - 2  x2 = - 2
z1 = - 4  p1 = 0  p2 = - 1  p3 = - 2  p4 = - 2
b(0) = 0
b(1) = - 1
b(2) = - 2
b(3) = - 2
b(4) = - 4
finding the breakaway point or break in point
interval (lower limit, upper limit)
= - 1, 0
the break point is x = - 0.386718
- 0.386718 0 0.170833
finding the root loci from the break point
f(0) = 1.04719
f(1) = 8.37757
f(2) = 15.7079
s0 = - 0.333333
```

x	y	k
-0.286718	0.505298	0.432385
-0.186718	0.742031	0.832369
-8.67187e-2	0.942056	1.40257
1.32812e-2	1.12447	2.17181
0.113281	1.29825	3.17851
0.213281	1.46687	4.45924
0.313281	1.63231	6.05231
0.413281	1.79578	7.9974
0.513281	1.95806	10.3353
0.613281	2.11963	13.108
0.713281	2.28086	16.3582
0.81328	2.44198	20.123
0.91328	2.60316	24.4657
1.01328	2.76449	29.412
1.11328	2.92607	35.0135
1.21328	3.08795	41.3159
1.31328	3.25016	48.3653
1.41328	3.41272	56.208
1.51328	3.57563	64.8907
1.61328	3.73892	74.4603
1.71328	3.90256	84.9637
1.81328	4.06656	96.4483
1.91328	4.23092	108.961
2.01327	4.39561	122.55

```
contine working
= 3
finding the breakaway point or break in point
interval (lower limit, upper limit)
= - 6, - 4
the break point is x = - 4.8125
- 4.8125 0 178.625
finding the root loci from the break point
f(0) = 1.04719
f(1) = 8.37757
f(2) = 15.7079
s0 = - 0.333333
```

```
= -0.286718, 0.505298
the value of transient
0 1.07288e-6 *
0.5 3.81683e-2 *
1 0.136892 *
1.5 0.273882 *
2 0.429623 *
2.5 0.588094 *
3 0.737068 *
3.5 0.868061 *
4 0.976012 *
4.5 1.0588 *
5 1.11666 *
5.5 1.15161 *
6 1.1668 *
6.5 1.16605 *
7 1.15339 *
7.5 1.13271 *
8 1.10752 *
8.5 1.08077 *
9 1.05481 *
9.5 1.03132 *
10 1.01141 *
10.5 0.995636 *
11 0.984107 *
11.5 0.97661 *
12 0.972686 *
12.5 0.971729 *
13 0.973071 *
13.5 0.97604 *
14 0.980014 *
14.5 0.984454 *
15 0.988919 *
15.5 0.993079 *
16 0.996705 *
16.5 0.999668 *
17 1.00191 *
17.5 1.00346 *
18 1.00437 *
18.5 1.00473 *
19 1.00466 *
19.5 1.00427 *
20 1.00366 *
ready
```

图 13

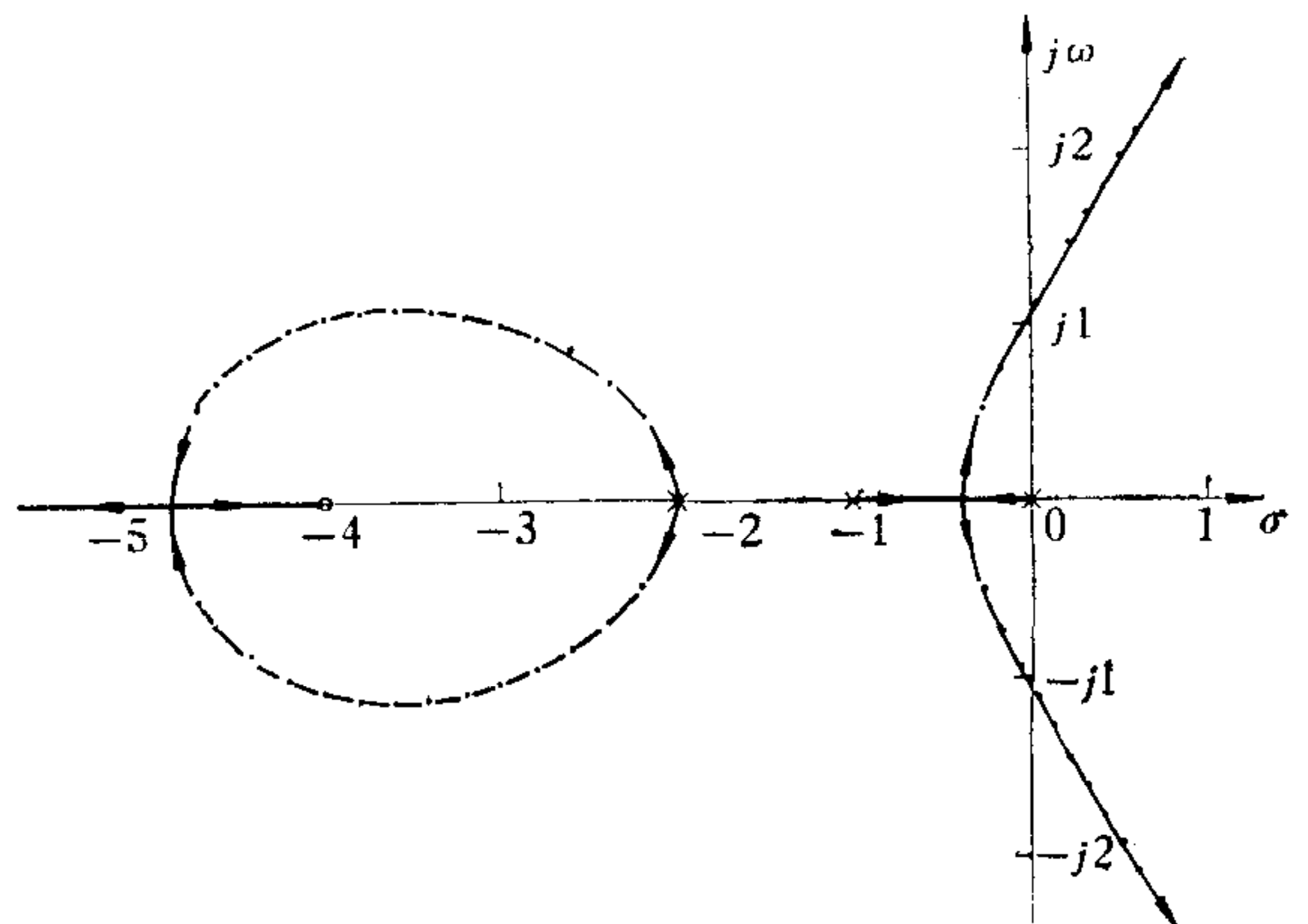


图 14

x	y	k
-4.7125	0.530278	152.955
-4.6125	0.671274	137.125
stop at 1436		
let h = -0.2		
run 1436		
-4.4125	0.859473	108.838
-4.2125	0.978765	84.8759
-4.0125	1.05447	64.8186
-3.8125	1.0974	48.2991
-3.6125	1.11067	34.9664
-3.4125	1.09919	24.421
-3.2125	1.06414	16.3338
-3.0125	1.0045	10.3148
-2.8125	0.920794	6.03783
-2.6125	0.810142	3.16883
-2.4125	0.666749	1.39573
-2.2125	0.474539	0.430688
-2.0125	0.11217	1.31394e-2
run 2000		
give the parameters of the main poles		
input x and y		

根据计算机计算结果可绘成准确的根轨迹图，如图 14 所示。¹⁾

四

上述用计算机准确计算根轨迹的方法，可以推广到变参量根轨迹的计算，即除增益外，设其它参数可变，例如，设比例微分环节的时间常数可变，一种方法是用上面的程序，每次给出该可变参数的数值，再求增益由零增至无穷大的根轨迹，从而得到一簇根轨迹，

再从这簇根轨迹中得出该参量变化(而增益则保持某一确定数值)时闭环系统根的变化规律，如图 15 及图 16 所示，图 15 对应于四阶系统 $T_1 = 1, T = 0.5, C = 1$ 而 T_0 可变，分别等于 0.1, 0.2, 0.33333, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7 等，可用计算机分别求出根轨迹，再令 $K = 1, 2, 3, 4$ 即可求得在不同 K 值下 T_0 可变的根轨迹。图 16 则对应另一组参数，已注明于图中。

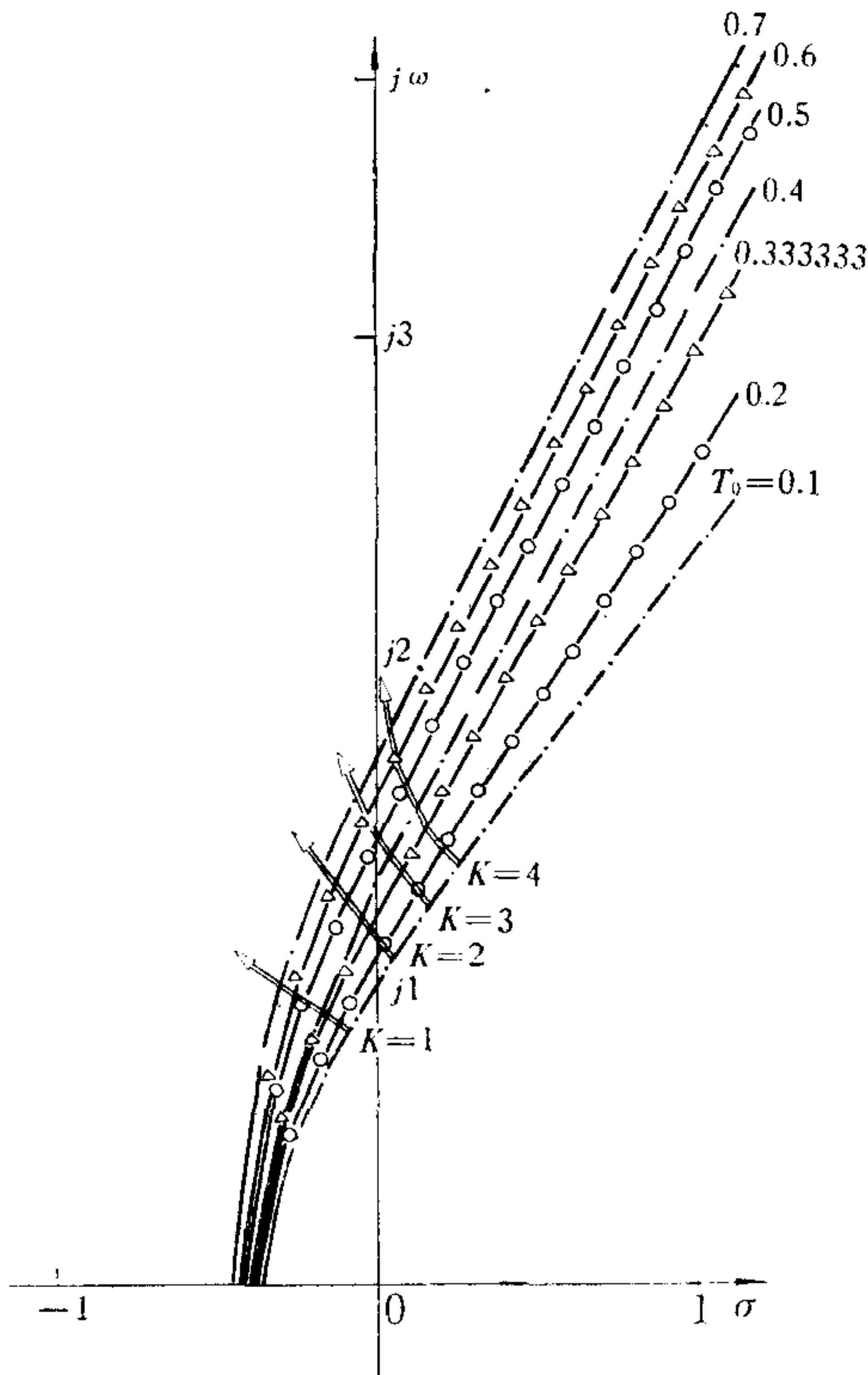


图 15 四阶系统根轨迹簇

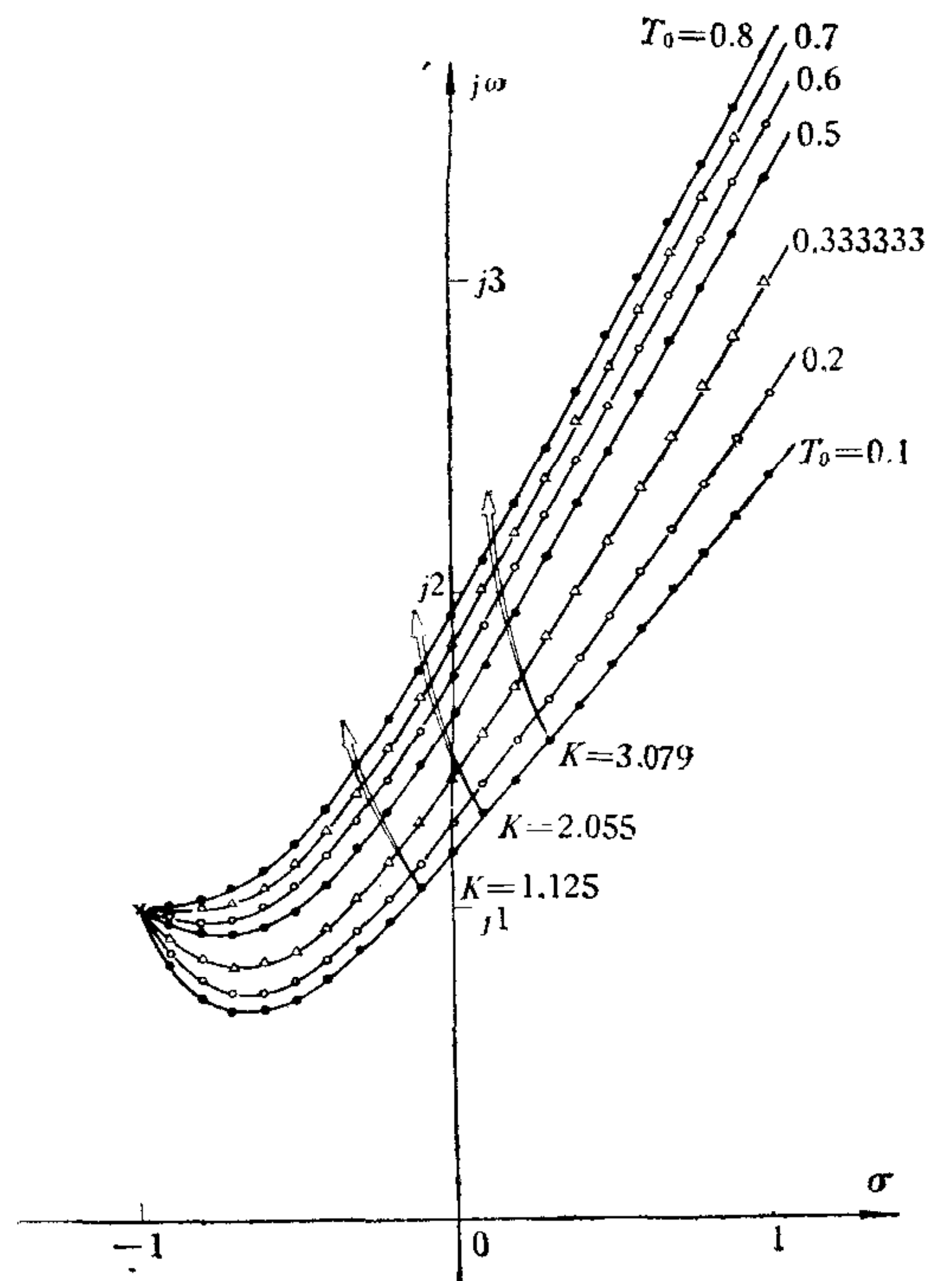


图 16 四阶系统根轨迹簇

$T_1 = 0.333333 \quad T = 0.7071 \quad C = 0.7071$

1) 一般参考文献中，该系统根轨迹左方误为椭圆，实为鸡蛋形，特此绘出供修正。

此外,还可以从半平面搜索法搜索根轨迹的概念出发,从已知四阶系统开环传递函数中,设法将新的参变量 T_0 从根轨迹方程式中提出来,得到一个新的根轨迹方程式,再用计算机计算。例如,四阶系统开环传递函数为:

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_0s + 1)}{s(T_1s + 1)(T^2s^2 + 2CTs + 1)}, \quad (33)$$

闭环系统特征方程为

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_0s + 1)}{s(T_1s + 1)(T^2s^2 + 2CTs + 1)} = -1. \quad (34)$$

移项得

$$-K(T_0s + 1) = s(T_1s + 1)(T^2s^2 + 2CTs + 1), \quad (35)$$

写成多项式形式

$$-T_0s = R_4s^4 + R_3s^3 + R_2s^2 + R_1s + R_0. \quad (36)$$

其中:

$$R_4 = \frac{T_1T^2}{K}, \quad R_3 = \frac{2CT_1T + T^2}{K}, \quad R_2 = \frac{T_1 + 2CT}{K}, \quad R_1 = \frac{1}{K}, \quad R_0 = 1.$$

再以 $s = \sigma + j\omega$ 代入(36)式,得

$$\begin{aligned} -T_0(\sigma + j\omega) = & R_4(\sigma + j\omega)^4 + R_3(\sigma + j\omega)^3 \\ & + R_2(\sigma + j\omega)^2 + R_1(\sigma + j\omega) + R_0 \end{aligned} \quad (37)$$

将括号展开,把实部虚部分开,令实部等于实部,虚部等于虚部,得:

$$-T_0\sigma = R_4\omega^4 - [6R_4\sigma^2 + 3R_3\sigma + R_2]\omega^2 + R_4\sigma^4 + R_3\sigma^3 + R_2\sigma^2 + R_1\sigma + R_0 \quad (38)$$

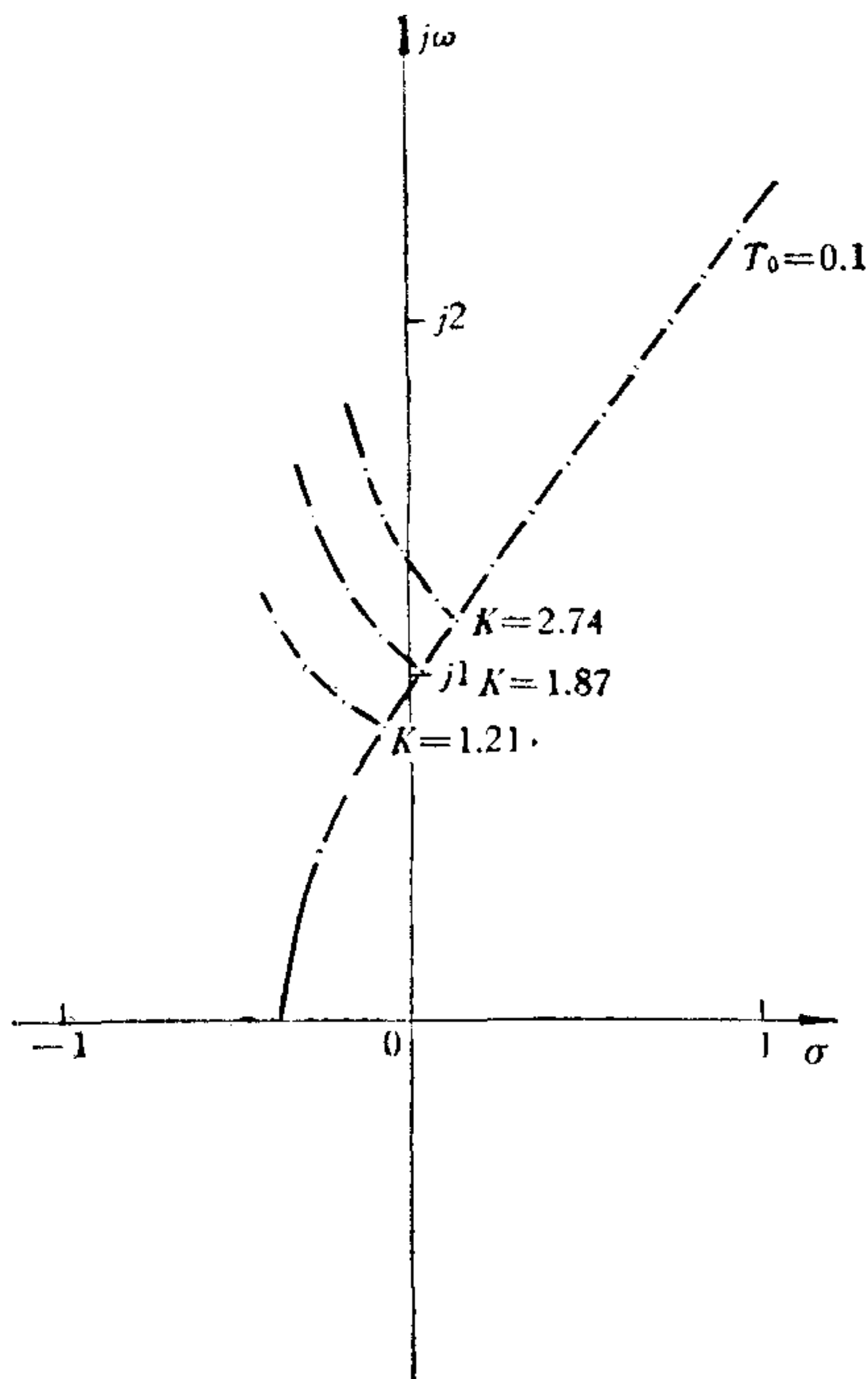


图 17 四阶系统 T_0 可变根轨迹簇

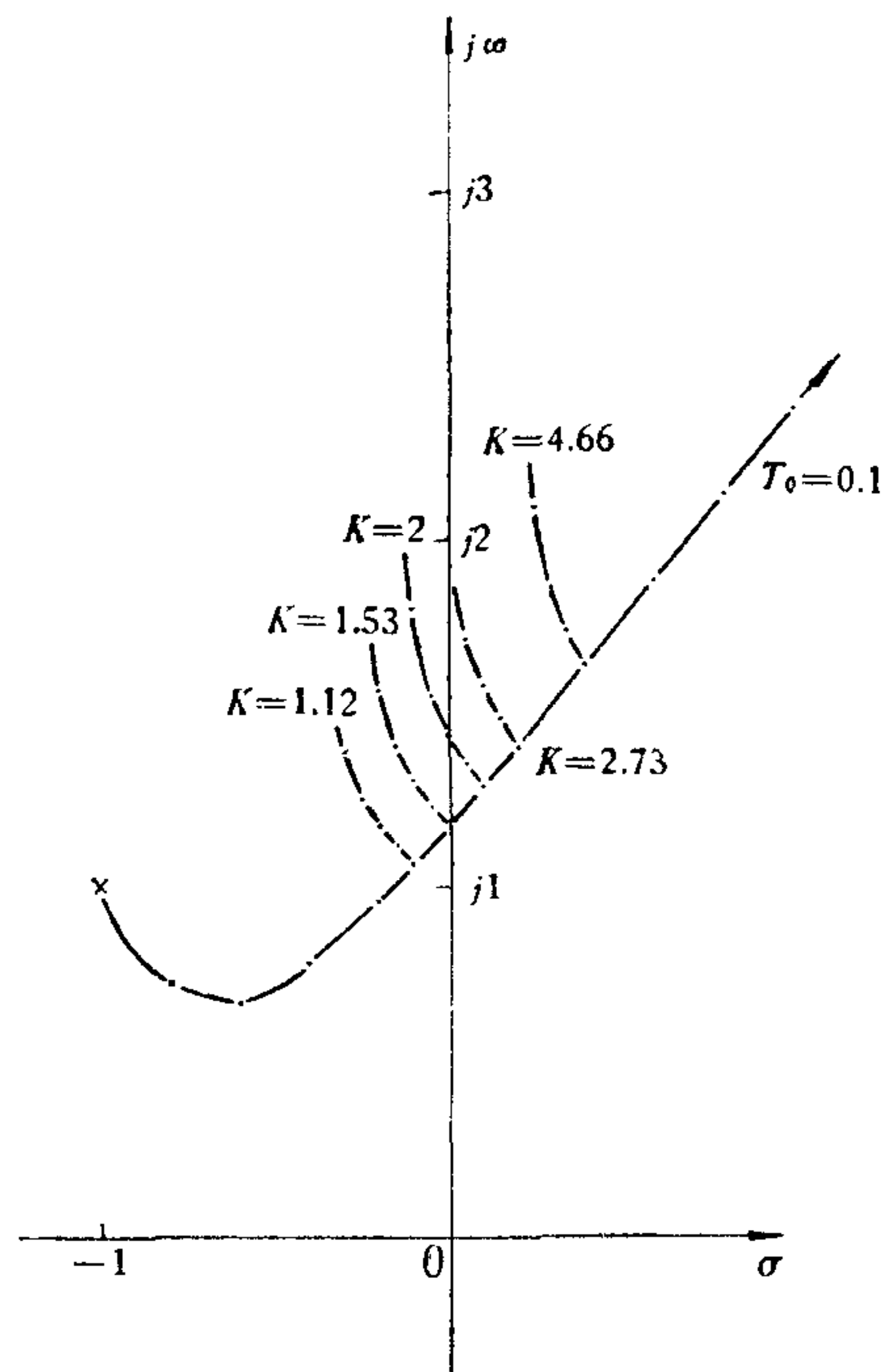


图 18 四阶系统 T_0 可变根轨迹簇

及

$$-j\{[4R_4\sigma^3 + 3R_3\sigma^2 + 2R_2\sigma + R_1]\omega - [4R_4\sigma + R_3]\omega^3\} = jT_0\omega. \quad (39)$$

将式(39)进一步简化为

$$-T_0 = [4R_4\sigma^3 + 3R_3\sigma^2 + 2R_2\sigma + R_1] - [4R_4\sigma + R_3]\omega^2, \quad (40)$$

代入(38)式得新的根轨迹方程式

$$F_4\omega^4 + F_2\omega^2 + F_0 = 0. \quad (41)$$

其中:

$$F_4 = -R_4, \quad F_2 = 2R_4\sigma^2 + 2R_3\sigma + R_2, \quad F_0 = 3R_4\sigma^4 + 2R_3\sigma^3 + R_2\sigma - R_0.$$

值得注意的是式(41)与式(32)有完全相同的形式,也就是只有 ω 的偶次幂项。这就保证在 $\sigma + j\omega$ 平面内,根轨迹上各点 σ, ω 都是实数。

作一系列平行于复平面虚轴的平行线 $\sigma = \text{const.}$ 它与根轨迹的交点决定于(41)的解。计算机很容易办到。图17,18分别为按计算机求得的数据所绘制的根轨迹簇。

五

结论 本文提出的在复平面上半平面搜索根轨迹的方法,实质上是一种解析方法。本来,论证根轨迹的存在就是用二阶系统解析的结果加以推论的,只是在电子计算机问世之前,用解析法求四阶或四阶以上的根轨迹是难以实现的,于是伊文思提出了螺旋尺法。唐纳豪也曾提出过作平行于虚轴的直线求同根轨迹交点的概念,但是唐纳豪推导的公式有误¹⁾,只对 $\sigma=0$ 即虚轴与根轨迹的交点才有效,没有普遍应用的实际效果。本文介绍用计算机计算根轨迹,是继承伊文思方法和唐纳豪方法中的正确思路,纠正了唐纳豪推导公式失误之处,用计算机作为工具,实现了迅速准确地计算线性定常系统的根轨迹。一九八〇年四月到六月曾在清华大学自动化系系统模拟实验室的DJS-131机上作了大量的例题,一九八一年四月在新疆科委计算中心DJS-154机上又重复了上述例题,结果完全相同,证明该方法是正确的,可供研究根轨迹法及用根轨迹法进行线性定常系统数字仿真时参考。

本文在构思及计算过程中得到清华大学熊光楞、李芳芸等同志的帮助。作者在新疆工学院为工业自动化77届讲课时介绍了这种方法,并组织同学推导五阶、六阶根轨迹方程式,王跃杰、贾鲁丁、瓮正科同学推导了这些公式,由瓮正科同学推导了通用公式,最后由作者修改定稿。此方法对任意阶线性定常系统的计算方法及程序设计,由应届毕业生黄琳娜、胡玫艳同学完成,并在DJS-154机上通过。

参 考 文 献

- [1] 刘豹,自动调节理论基础,科学出版社,1963年。
- [2] 绪方胜彦著,卢伯英等译,现代控制工程,科学出版社,1976年。
- [3] S. M. 欣内尔斯,现代控制系统理论及应用,机械工业出版社,1980年版。
- [4] B. C. Kuo, Automatic Control Systems, 3-rd ed. Prentice-Hall, Inc., 1975.
- [5] 清华大学自动化系编, TQ-15 机 BASIC 算法语言常用程序库(一,二册),1979年。

1) 见参考文献[1] p204—205.

A METHOD FOR SEARCHING THE ROOT LOCI BY COMPUTER IN THE HALF COMPLEX PLANE

HUANG ZHIXIANG

(Xinjiang Engineering Institute)

ABSTRACT

In this paper a method for searching the root loci by the computer is presented. The geometrical concept is to make a lot of parallel lines of the imaginary axis in the complex plane, and to decide the points which satisfy both the root loci and the parallel lines by the computer.

The computation will be simplified, since the variable gain K would not appear in the equation of the root loci.

学术活动简讯

中国自动化学会 1982 年活动计划

序号	项 目 名 称	时 间	主 办 委 员 会	通 讯 地 址
1	“三遥”传感器学术交流会	4 季度	遥测遥感遥控	北京 9200 信箱 74 分箱
2	全国自动化技术应用学术交流会	4 季度	应用	北京市丰台冶金部自动化所
3	计算机辅助设计学术交流会	10 月	系统仿真	北京航空学院模拟器组
4	生物信息处理讨论会	4 月	生物控制论与医学工程	北京 349 信箱
5	全国控制理论及其应用学术交流会	5 月	控制理论	北京市中关村系统科学所
6	计算机在自动化中应用学术交流会	3 季度	计算机应用	北京 927 信箱
7	电气自动化学术交流会	待定	电气自动化	天津电气传动研究所
8	自动化仪表与装置学术交流会	待定	仪表与装置	上海漕宝路 103 号
9	微型机在空间及运动体控制系统中的应用	3 季度	空间及运动体控制	北京 2729 信箱
10	模式识别系统专题讨论会	3 季度	模式识别与机器智能	北京 2728 信箱
11	生物医学信号处理和识别专题讨论会	4 季度	模式识别与机器智能	北京 2728 信箱
12	全国高等院校自动化专业教育工作讨论会	秋	教育工作	北京清华大学自动化系
13	教育工作委员会第二次全体会议	冬	教育工作	北京清华大学自动化系
14	系统工程学术交流会	4 季度	系统工程	北京市德外一机部自动化所
15	《自动化学报》和《信息与控制》编委会议	3 季度	两刊编委会	北京 2728 信箱
16	IFAC 多文种“词汇”审定会	待定	名词	上海斜土路电气自动化所
17	“中国自动化词典”编辑工作筹备会	待定	名词	上海斜土路电气自动化所
18	自动化基础知识丛书编委会(1)	5 月	普及工作	北京新街口自动化工业公司
19	自动化基础知识丛书编委会(2)	3 季度	普及工作	北京新街口自动化工业公司
20	普及工作会议	3 季度	普及工作	北京新街口自动化工业公司
21	自动化学会科技咨询工作会议	3 季度	科技咨询服务部	北京 2728 信箱