第 8 卷 第 4 期 自 动 化 学 报 Vol. 8, No. 4
1982 年 10 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Oct., 1982

高精度伺服系统的全局渐近稳定性

曾 昭 磐
(厦 门 大 学)

摘 要

本文用 Ляпунов 直接方法证明高精度伺服系统[1]的平衡位置是全局渐近稳定的.

王广雄[1]提出并研究了一个高精度伺服系统的大范围稳定性问题，用 Ляпунов 直接方法证明了该系统平衡位置的渐近稳定性，并估计了吸引区域. 本文将证明该伺服系统的平衡位置是全局渐近稳定的.

高精度伺服系统的状态方程形式为[1]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\theta}{dt}=\dot\theta,\\
&\frac{d\dot\theta}{dt}=\begin{cases}-a(\gamma u_1+u_c), & |\gamma u_1+u_c|\leqslant k\\ -k\,a\operatorname{sign}(\gamma u_1+u_c). & |\gamma u_1+u_c|>k\end{cases}\\
&\frac{du_c}{dt}=\begin{cases}bu_1, & |\gamma u_1+u_c|\leqslant k\\ \dfrac{b}{\gamma}\left[-u_c+k\operatorname{sign}(\gamma u_1+u_c)\right], & |\gamma u_1+u_c|>k\end{cases}\\
&u_1=c(\theta+d\dot\theta).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中 a, b, c, d, k, γ 为常数，$\gamma \neq 0$, $d \neq 0$, $c \neq 0$.

作线性变换

$$
\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\gamma cd & 0\\ \gamma c & \gamma cd & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\ \dot\theta\\ u_c\end{pmatrix},
\tag{2}
$$

把方程组(1)变为

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt}=m\varphi(\sigma),\\
&\frac{dx_2}{dt}=\frac{1}{d}x_1-m\varphi(\sigma),\\
&\frac{dx_3}{dt}=-\frac{b}{\gamma}x_3+\frac{b}{\gamma}\varphi(\sigma).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

这里 $m=\gamma cda$, $\varphi(\sigma)$ 为饱和函数:

本文于 1981 年 3 月 23 日收到.

$$\varphi(\sigma)=\begin{cases}\sigma, & |\sigma|\leqslant k\\ k\operatorname{sign}\sigma, & |\sigma|>k\end{cases} \tag{4}$$

其中 $\sigma=x_2+x_3$. 当 $\gamma cd\neq 0$ 时,变换(2)是非奇异的. 当 $\varphi(\sigma)=0$时,系统变为线性系统,其系数矩阵有两重零特征值,另一特征值为$-\frac{b}{\gamma}$.

取 σ 作为状态变量,则系统(3)与系统

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt}&=m\varphi(\sigma),\\ \frac{dy_2}{dt}&=-\frac{b}{\gamma}y_2+\frac{b}{\gamma}\varphi(\sigma),\\ \frac{d\sigma}{dt}&=-\frac{1}{d}y_1-\frac{b}{\gamma}y_2-\left(m-\frac{b}{\gamma}\right)\varphi(\sigma)\end{aligned} \tag{5}$$

稳定性等价,这里 $y_1=x_1$, $y_2=x_3$.

作 Ляпунов 函数

$$v(y_1,y_2,\sigma)=\varepsilon_1y_1^2+\varepsilon_2y_2^2+\int_0^\sigma\varphi(\sigma)d\sigma.$$

这里 ε_1, ε_2 为待定的正数. v 沿系统(5)的全导数为

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt}=&\left(2\varepsilon_1m-\frac{1}{d}\right)y_1\varphi(\sigma)-2\varepsilon_2\frac{b}{\gamma}y_2^2+(2\varepsilon_2-1)\frac{b}{\gamma}y_2\varphi(\sigma)\\ &-\left(m-\frac{b}{\gamma}\right)\varphi^2(\sigma).\end{aligned} \tag{6}$$

如果取

$$\varepsilon_1=\frac{1}{2md}, \tag{7}$$

则(7)变为

$$\frac{dv}{dt}=-2\varepsilon_2\frac{b}{\gamma}y_2^2-(1-2\varepsilon_2)\frac{b}{\gamma}y_2\varphi(\sigma)-\left(m-\frac{b}{\gamma}\right)\varphi^2(\sigma).$$

$\frac{dv}{dt}$ 形式上是变元 y_2, φ 的二次型. 因为 $\varphi=0$ 当且仅当 $\sigma=0$,故若 $\frac{dv}{dt}$ 是 y_2, φ 的定负二次型,即满足条件

$$\varepsilon_2\frac{b}{\gamma}>0 \tag{8}$$

和

$$-\left(\frac{b}{\gamma}\right)^2\varepsilon_2^2+\left(2m-\frac{b}{\gamma}\right)\left(\frac{b}{\gamma}\right)\varepsilon_2-\frac{1}{4}\left(\frac{b}{\gamma}\right)^2>0 \tag{9}$$

时, $\frac{dv}{dt}$ 关于 y_1, y_2, σ 常负,且仅当 $y_2=\sigma=0$ 时, $\frac{dv}{dt}=0$.

不等式(9)的左边是 ε_2 的二次三项式,容易看出,当不等式

$$\frac{b}{\gamma}>0,\qquad m-\frac{b}{\gamma}>0 \tag{10}$$

成立时，此二次三项式的零点是相异的正实数．当 ε_2 在这两个正实零点之间取值时，条件(9)成立．因此条件(10)保证了不等式(8)，(9)同时成立．

如果加上 $d > 0$，则由式(7)，$\varepsilon_1 > 0$．由式(4)，

$$\int_0^\sigma \varphi(\sigma)d\sigma > 0(\sigma \neq 0), \qquad \int_0^{\pm\infty} \varphi(\sigma)d\sigma = +\infty,$$

故 $v(y_1, y_2, \sigma)$ 定正、径向无界．

由系统(5)知，集合 $y_2 = \sigma = 0$ 中的系统(5)的最大不变集仅含原点．根据 J. P. LaSalle 的定理[2]，系统(5)的零解全局渐近稳定．因此有如下结论：

定理．如果 $d > 0$ 且条件(10)成立，则系统(1)的零解全局渐近稳定．

文献[1]给出的参数值为 $a = 0.46$，$b = \frac{1}{0.11}$，$c = 356$，$d = 0.1$，$k = 6$，$\gamma = 2$．显然这些参数值满足定理的条件，故文献[1]的高精度伺服系统的平衡位置全局渐近稳定．

参 考 文 献

[1] 王广雄，高精度伺服系统的大范围稳定性，自动化学报，5(1979)，211—219.
[2] J. P. LaSalle, S. Lefschetz, Stability by Liapunov's Direct Method with Applications, Academic Press (1961), 66.

GLOBAL ASYMPTOTIC STABILITY OF THE HIGH PRECISION SERVO SYSTEM

ZENG ZHAOPAN
(Xiamen University)

ABSTRACT

The global asymptotic stability of the high precision servo system[1] has been proved by the use of Lyapunov's direct method.