

# 数字函数微分算法误差分析

路 浩 如  
(浙 江 大 学)

## 摘 要

在数字函数发生方法中,微分算法和齐田法形式不同,但就它们的基本特点及发生函数时的误差而言,两者并没有重要的区别。微分法发生的曲线与给定函数之间的误差包括基本误差和走步误差。基本误差系微分法发生曲线时实际逼近的函数(称为逼近函数)与给定函数间的误差。逼近函数可以从给定的函数导出。走步误差为微分法发生曲线与逼近函数间因步法不同而产生的误差。本文证明了用微分法发生二阶、三阶函数时的基本误差相当大,走步误差比基本误差要小得多。

## 一、前 言

数字函数发生技术应用于机床数控、自动制图、自动设计及图形处理等方面。目前广泛采用的数字函数发生方法有微分分析法(又称积分法)和代数法。七十年代又有日本安川电机的“齐田法”和我国浙江大学的“正负法”相继发表。在美国和西欧,数字函数发生方法主要用微分分析法。

上述这些方法,就算法而言,不是函数的微分就是函数的差分。据此可以把它们区分为“微分算法”和“差分算法”两大类。

用微分算法发生函数时存在积累误差,但对这种误差大小,则缺乏深入的分析研究。本文介绍用微分算法发生各种基本函数时所逼近的函数及最大误差。

## 二、关于微分分析法和齐田法

数字微分分析法利用函数的微分关系近似表示数字函数发生中各离散格点之间有限增量的关系。这种近似,使发生的函数与给定函数之间出现了偏离,即误差。由于这种误差常随着函数的不断发生而逐步扩大,并在某一位置达到最大值,故称为积累误差。

按照数字微分分析法的原理,任意减小量化单位,其积累误差可以任意减小。然而,实际应用于函数发生时,离散格点之间的增量即步长不可能任意缩小。为了便于讨论,假设运算的量化单位等于步长。一般地说,微分法发生函数时,总是利用给定函数  $f(x, y) = 0$  的全微分关系:

或者导函数:

$$df = f'_x dx + f'_y dy, \quad (1)$$

$$dy/dx = -f'_x/f'_y. \quad (2)$$

如果引入参量  $t$ , 则可表示为

$$dx = f'_y dt, \quad (3)$$

$$dy = -f'_x dt. \quad (4)$$

设  $\Delta t$  近似于  $dt$ , 则有

$$\Delta x = f'_y \Delta t, \quad (5)$$

$$\Delta y = -f'_x \Delta t. \quad (6)$$

按节拍  $\Delta t$  使  $f'_y$  逐次累加, 得到  $x$  方向的增量  $\Delta x$ . 当  $\Delta x$  增量超过一步时, 输出  $\Delta x = 1$ . 同样, 对  $-f'_x$  的逐次累加得到  $y$  方向的增量  $\Delta y$ .

从以上微分分析法的基本原理可见, 此时函数的发生完全由函数的导数  $\frac{dy}{dx}$  所决定, 即曲线的发生是在不断朝着切线方向走步, 但在离散格点的情况下,  $\Delta x$  和  $\Delta y$  是有限的, 而每一次朝着切线方向的步长也是有限的. 以有限的增量代替无限小的微分, 势必导致越来越偏离给定函数, 形成积累误差.

对于沿着曲线方向的有限增量  $\Delta x$  和  $\Delta y$ , 它们的正确关系应是

$$\begin{aligned} \Delta f = & f'_x \Delta x + \frac{1}{2!} f''_x (\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} f'''_x (\Delta x)^3 + \cdots + f'_y \Delta y \\ & + \frac{1}{2!} f''_y (\Delta y)^2 + \frac{1}{3!} f'''_y (\Delta y)^3 + \cdots \end{aligned} \quad (7)$$

只有在  $f(x, y)$  为一次函数时, 由于  $f''_x$  和  $f''_y$  等高次导数都为零, 式 (7) 才与式 (1) 相同.

齐田法从形式上摆脱了函数微分分析法的传统结构, 但其算法原理是一致的. 齐田法把各种类型的曲线归纳为“回转型曲线”和“直进型曲线”, 但曲线发生都是以发生直线的算法作为基础, 寻求切线方向, 然后用发生直线的算法使曲线的发生前进一步. 这正是“微分算法”的特点.

齐田法归纳了简单易行的步法规律: 把  $x, y$  轴的走步看成是间隔为等差级数的脉冲列. 对直线而言, 这两等差级数的公差为零; 对于圆, 一个脉冲列的公差为  $+1$ ; 另一个公差为  $-1$ ; 对双曲线, 公差都是  $+1$ ; 对抛物线, 其一个公差为零, 另一个公差则为  $1$  等等. 这些概念正是从“微分算法”中引出的. 如:

1) 对直线  $B_0 x - A_0 y = 0$ , 有

$$dy/dx = B_0/A_0 \quad \text{或} \quad \Delta y/\Delta x = B_0/A_0,$$

即  $y$  脉冲与  $x$  脉冲数之比为  $B_0:A_0$ . 设脉冲间隔比例分别为  $1/\Delta x$  及  $1/\Delta y$ , 则有

$$\left(\frac{1}{\Delta x}\right) / \left(\frac{1}{\Delta y}\right) = B_0/A_0.$$

即  $x$  脉冲列与  $y$  脉冲列的脉冲间隔之比为  $B_0:A_0$ , 与变量  $x, y$  无关, 是公差为零的等差级数.

2) 对圆  $(x - A_0)^2 + (y + B_0)^2 = A_0^2 + B_0^2$ , 有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A_0 - x}{B_0 + y} \quad \text{或} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{A_0 - x}{B_0 + y},$$



则

$$\left(\frac{1}{\Delta x}\right) / \left(\frac{1}{\Delta y}\right) = \frac{A_0 - x}{B_0 + y}.$$

这时,  $x$  脉冲间隔为  $(A_0 - x)$ ,  $y$  脉冲间隔为  $(B_0 + y)$ .  $x, y$  的增量是 1, 亦即两脉冲列的公差为  $-1$  及  $+1$ .

3) 对双曲线  $(x + A_0)^2 - (y + B_0)^2 = A_0^2 - B_0^2$ ,  $x, y$  脉冲列同样是增量为 1 的等差级数.

依次类推, 可得到用齐田法发生各型曲线时脉冲列的公差关系. 由此可见, 在数字函数发生的基本特点和误差方面齐田法和微分算法没有重要的不同. 因此本文只分析用微分算法发生函数时的误差.

### 三、微分法发生二次、三次函数的基本误差

#### 1. 微分法发生二次函数的基本误差

用微分算法发生一次函数, 不存在积累误差. 现讨论发生二次函数的基本误差. 设给定函数为:

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (8)$$

用微分算法发生这个函数时利用的关系为:

$$\Delta f = (2Ax + By + D)\Delta x + (2Cy + Bx + E)\Delta y. \quad (9)$$

(9) 式可改写为

$$\begin{aligned} \Delta f = & \left[ 2A \left( x \pm \frac{1}{2} \right) + B \left( y \pm \frac{1}{2} \right) + D \right] \Delta x \mp A\Delta x \mp \frac{B}{2} \Delta x \\ & + \left[ 2C \left( y \pm \frac{1}{2} \right) + B \left( x \pm \frac{1}{2} \right) + E \right] \Delta y \mp C\Delta y \mp \frac{B}{2} \Delta y. \end{aligned}$$

以离散点来逼近上述函数时,  $\Delta x, \Delta y$  之值恒为 0 或  $\pm 1$ . 若  $\Delta x = +1$ , 则有  $\Delta x = (\Delta x)^2$ ; 若  $\Delta x = -1$ , 则有  $-\Delta x = (\Delta x)^2$ .  $\Delta y$  与  $(\Delta y)^2$  关系亦同. 此外, 若  $\Delta y = +1$  或  $-1$ , 有  $\Delta x\Delta y = \Delta x$  或  $-\Delta x$ . 同样, 若  $\Delta x = +1$  或  $-1$ , 则有  $\Delta x\Delta y = \Delta y$  或  $-\Delta y$ . 于是上式可写成

$$\begin{aligned} \Delta f = & \left[ 2A \left( x \pm \frac{1}{2} \right) + B \left( y \pm \frac{1}{2} \right) + D \right] \Delta x + A(\Delta x)^2 \\ & + \left[ 2C \left( y \pm \frac{1}{2} \right) + B \left( x \pm \frac{1}{2} \right) + E \right] \Delta y + C(\Delta y)^2 + B\Delta x\Delta y. \quad (10) \end{aligned}$$

其中  $\Delta x = +1$ , 取  $(x - 1/2)$ ,  $\Delta x = -1$  取  $(x + 1/2)$ ;  $\Delta y = +1$  取  $(y - 1/2)$ ,  $\Delta y = -1$  取  $(y + 1/2)$ .

如果给定函数由下式定义时

$$\begin{aligned} F(x, y) = & A \left( x \pm \frac{1}{2} \right)^2 + B \left( x \pm \frac{1}{2} \right) \left( y \pm \frac{1}{2} \right) + C \left( y \pm \frac{1}{2} \right)^2 \\ & + D \left( x \pm \frac{1}{2} \right) + E \left( y \pm \frac{1}{2} \right) + F = 0. \quad (11) \end{aligned}$$

则(10)与(11)式是增量关系。可见,用微分算法发生给定函数(8)式时,实际逼近的函数是(11)式。(11)式中的符号取决于 $\Delta x, \Delta y$ 的符号。从(8)和(11)式可见,曲线在同一起点的情况下,将给定函数(8)的原点坐标向上下左右位移 $\frac{1}{2}$ 得到式(11)。坐标原点移动的规则如表1。

表 1

曲线走向		坐标原点移到
$\Delta x$	$\Delta y$	
+1	+1	(1/2, 1/2)
-1	+1	(-1/2, 1/2)
-1	-1	(-1/2, -1/2)
+1	-1	(1/2, -1/2)

常数 $F$ 取决于每一走向段(该区域内曲线走向相同)的起始点即前一走向段的终点坐标 $(x_0, y_0)$ 。这里的坐标是对原坐标系而言。

$$F = -A \left(x_0 \pm \frac{1}{2}\right)^2 - B \left(x_0 \pm \frac{1}{2}\right) \left(y_0 \pm \frac{1}{2}\right) - C \left(y_0 \pm \frac{1}{2}\right)^2 - D \left(x_0 \pm \frac{1}{2}\right) - E \left(y_0 \pm \frac{1}{2}\right). \quad (12)$$

以发生圆的方程 $f(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$ 为例,若以 $(R, 0)$ 为起点顺时针发生,则第一走向段的四分之一圆的范围内,走向为 $\Delta x = -1, \Delta y = -1$ 。由(11), (12)式,其逼近函数为

$$(x + 1/2)^2 + (y + 1/2)^2 - (R + 1/2)^2 - 1/4 = 0.$$

由于 $(R + 1/2)^2 \gg \frac{1}{4}$ 故有 $(x + 1/2)^2 + (y + 1/2)^2 - (R + 1/2)^2 = 0$ ,即以 $(-1/2, -1/2)$ 为圆心, $(R + 1/2)$ 为半径的四分之一圆弧。在该段终点,偏离原函数一步。为了简化分析,第二个走向段的起点认为就是 $(0, -(R + 1))$ ,走向 $\Delta x = -1, \Delta y = 1$ ,实际逼近函数为 $(x + 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 - (R + 1 + 1/2)^2 = 0$ ,即第二走向段是以 $(-1/2, 1/2)$ 为圆心, $(R + 1 + 1/2)$ 为半径的四分之一圆。该段终点偏离给定函数已达两步。

如此类推,每走过一个走向段,偏离增加一步。发生整个圆时,积累误差达四步(图1),得到的是一个螺距为4步的螺线。上述误差仅指逼近函数与给定函数之间的误差,称之为基本误差。

用同样的方法发生一个整椭圆时,基本误差达 $2 \left(1 + \frac{a}{b}\right)$ 。这里 $a$ 为长轴, $b$ 为短轴。例如 $a/b = 10$ 时,基本误差可达22步。显然,椭圆的长短轴之比越大误差也越大。

设给定抛物线,函数为 $x^2 - 2py = 0$ ,从起始点 $(x_0, y_0)$ 自左向右发生曲线时,逼近函数为:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2p\left(y - \frac{4x_0 - 1}{8p}\right) = 0.$$

即原给定函数的坐标原点位移至  $(1/2, (4x_0 - 1)/8p)$ 。结果如图 2 所示。逼近函数与给定函数的最大误差发生在抛物线的顶点，达  $|(4x_0 - 1)/8p| \approx |x_0/2p|$ ，为给定函数在起点的导数  $s_0 = \frac{dy}{dx} \Big|_{x_0, y_0} = \frac{x_0}{p}$  绝对值之半，与  $|x_0|$  成正比。

对双曲线函数  $x^2 - c^2y^2 - r^2 = 0$ ，从曲线左上支的一点  $(x_0, y_0)$  开始向下发生曲线时，第一个走向段的逼近函数为

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - c^2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - r'^2 &= 0, \\ r'^2 &= r^2 - x_0\left(\frac{1}{s_0} + 1\right) - \frac{1}{4}(c^2 - 1). \end{aligned}$$

其中  $s_0$  为给定函数在起点的导数  $s_0 = x_0/c^2y_0$ 。由图 3 可知，最大基本误差发生在双曲线顶点，其值为  $(r - r' + \frac{1}{2})$ 。当起始点距顶点足够远时， $s_0$  将近似为  $-\frac{1}{c}$ ，若  $\frac{1}{4}(c^2 - 1)$  忽略不计，则

$$r'^2 \approx r^2 + x_0(c - 1).$$

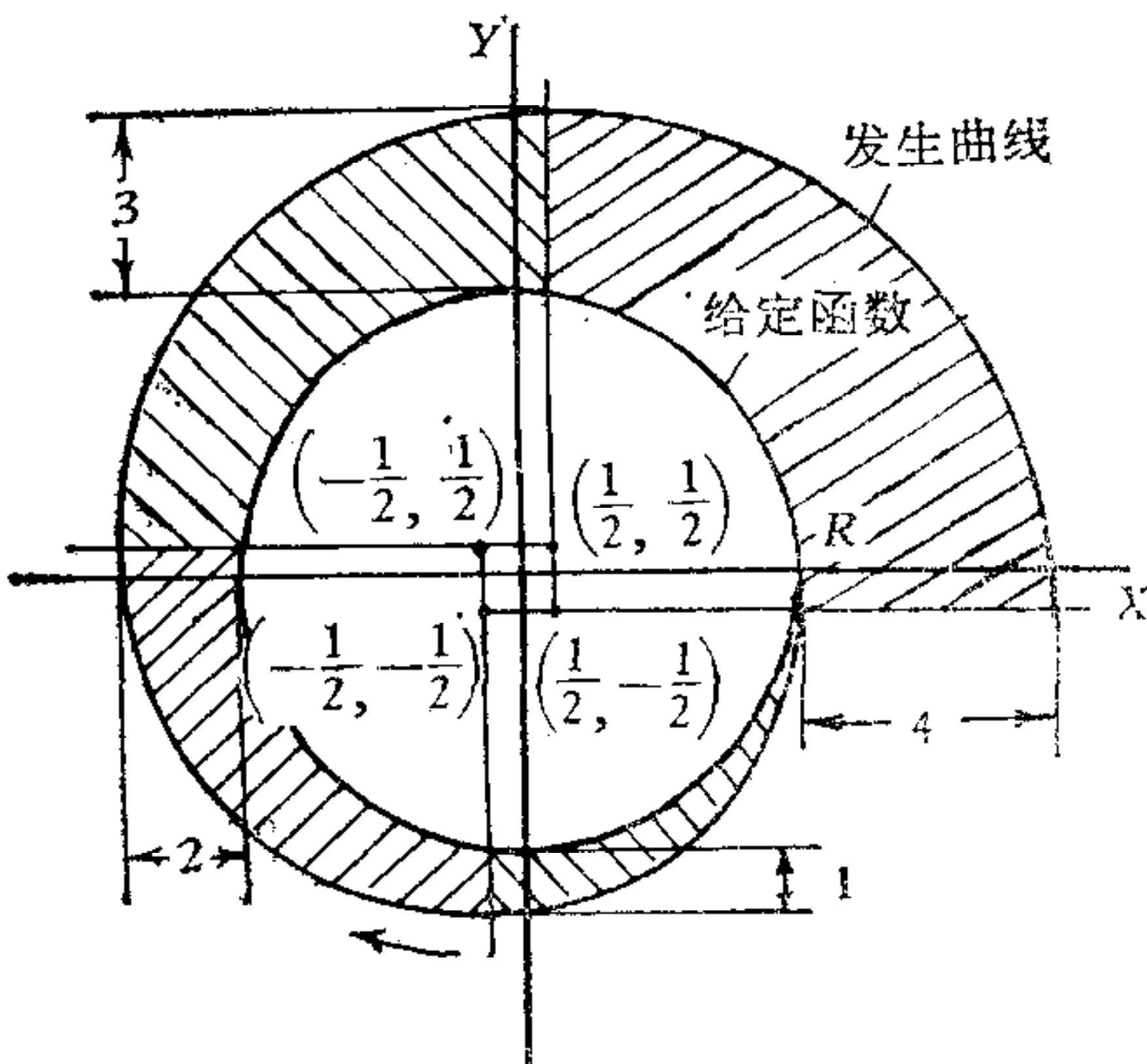


图 1

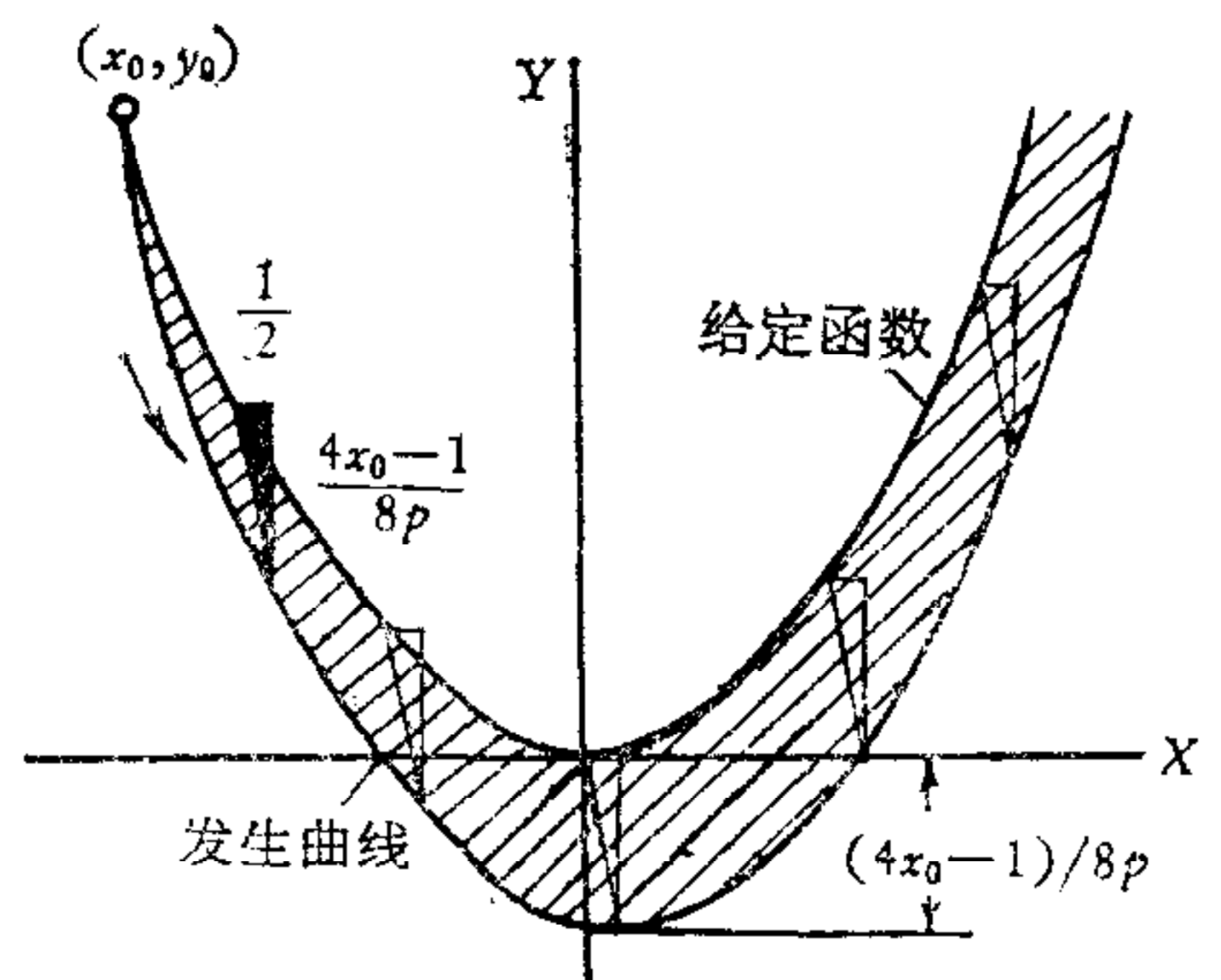


图 2

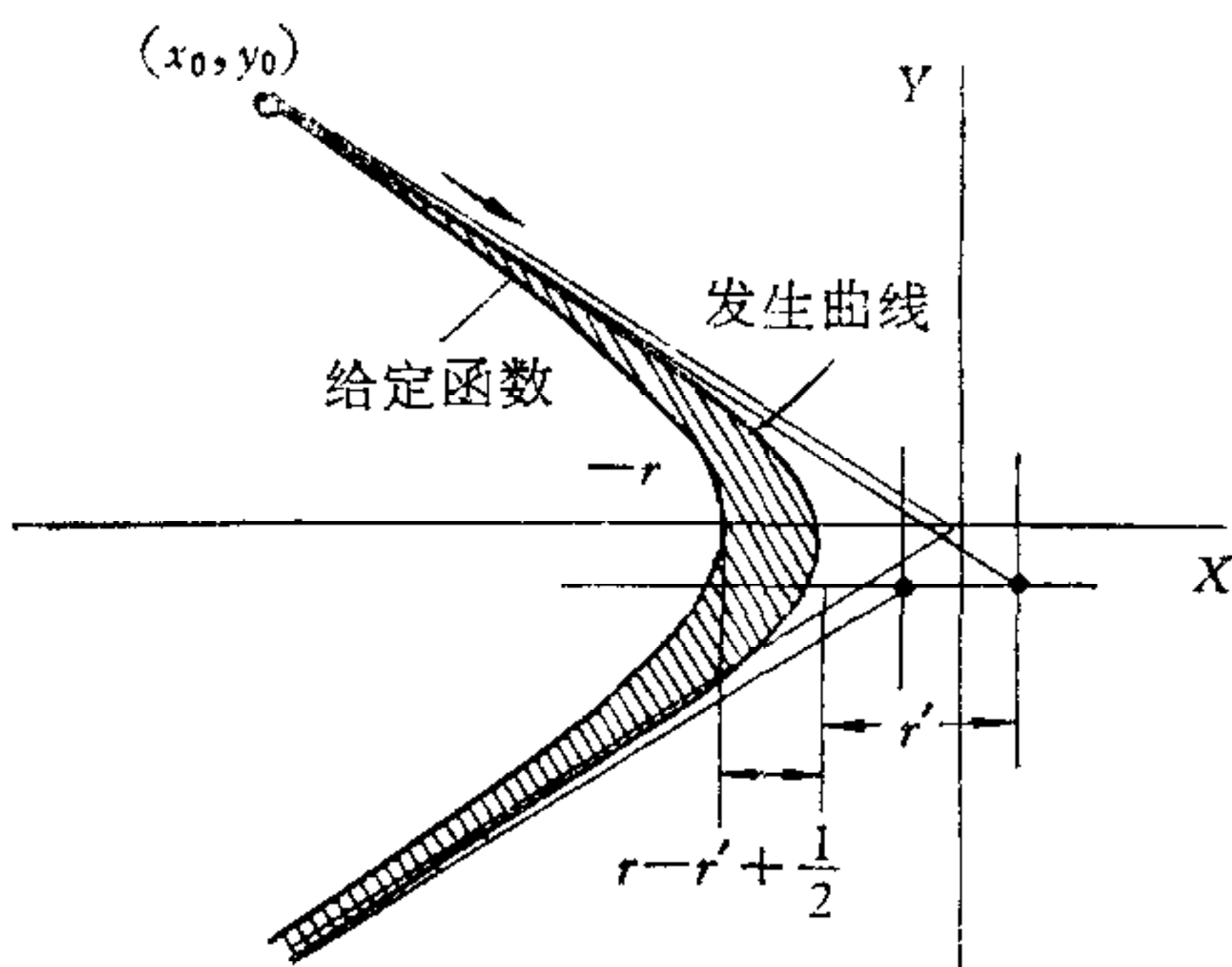


图 3

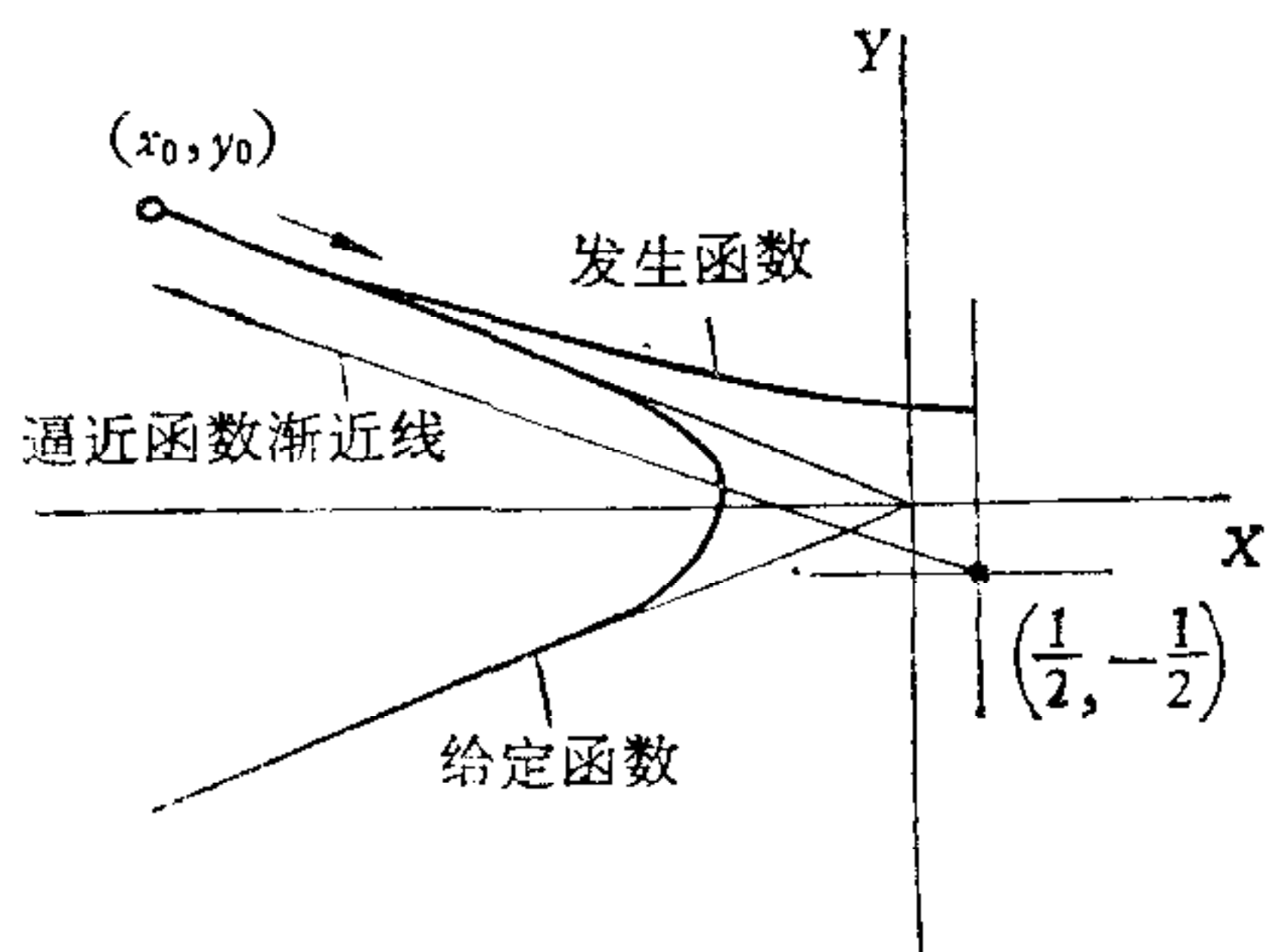


图 4



于是当  $x_0 = -r^2/(c-1)$  时, 逼近函数有  $r'^2 = 0$  (即起始点位于逼近函数渐近线上), 成为直线

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) + c\left(y + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

在顶点的最大误差达  $\left(r + \frac{1}{2}\right)$ . 如果起始点在最左方, 将有  $r'^2 < 0$ , 这意味逼近函数成为

$$-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + c^2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - (-r'^2) = 0,$$

曲线的转折方向将完全错误 (图 4). 这是由于起始点已位于逼近函数渐近线的另一侧.

## 2. 用微分法发生三次函数的基本误差

用微分算法分析发生三次函数的基本误差时, 函数中的二次项都用上面的办法确定它们在逼近函数中各自的相应项. 三次项  $x^3$  的增量按微分近似取为  $3x^2\Delta x$ . 在  $\Delta x \pm 1$  时,  $3x^2\Delta x$  可写成

$$3x^2\Delta x = \left[3\left(x \pm \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]\Delta x + 3\left(x \pm \frac{1}{2}\right)(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3. \quad (13)$$

其中  $\pm \frac{1}{2}$  的符号与 (10) 式的符号选取原则相同. 注意到

$$\Delta\left(x \pm \frac{1}{2}\right)^3 = 3\left(x \pm \frac{1}{2}\right)^2\Delta x + 3\left(x \pm \frac{1}{2}\right)(\Delta x)^2 + \Delta x^3,$$

$$\Delta\left(-\frac{1}{4}x\right) = -\frac{1}{4}\Delta x,$$

故有  $\Delta\left[\left(x \pm \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x \pm \frac{1}{2}\right)\right] = 3x^2\Delta x$ , 即  $x^3$  项的逼近函数.

同样可以证明  $x^2y$  的微分近似  $(2xy\Delta x + x^2\Delta y)$  可写成  $2xy\Delta x + x^2\Delta y = \Delta\left[\left(x \pm \frac{1}{2}\right)^2\left(y \pm \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(y \pm \frac{1}{2}\right)\right]$ .  $xy^2$  项逼近于  $\left[\left(x \pm \frac{1}{2}\right)\left(y \pm \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(x \pm \frac{1}{2}\right)\right]$ . 对任意三次函数

$$f(x, y) = Ax + By + Cx^2 + Dxy + Ey^2 + Fx^3 + Gx^2y + Hxy^2 + Iy^3 = 0, \quad (14)$$

其逼近函数为

$$\begin{aligned} F(x, y) = & \left(A + \frac{H-F}{4}\right)\left(x \pm \frac{1}{2}\right) + \left(B + \frac{G-I}{4}\right)\left(y \pm \frac{1}{2}\right) + C\left(x \pm \frac{1}{2}\right)^2 \\ & + D\left(x \pm \frac{1}{2}\right)\left(y \pm \frac{1}{2}\right) + E\left(y \pm \frac{1}{2}\right)^2 + F\left(x \pm \frac{1}{2}\right)^3 \\ & + G\left(x \pm \frac{1}{2}\right)^2\left(y \pm \frac{1}{2}\right) + H\left(x \pm \frac{1}{2}\right)\left(y \pm \frac{1}{2}\right)^2 \\ & + I\left(y \pm \frac{1}{2}\right)^3 + J = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $\pm \frac{1}{2}$  的符号与 (10) 式的符号选取原则相同.

在曲线的一个走向段内， $\pm 1/2$  的符号确定后，方程式 (15) 的常数项  $J$  由该走向段的起始点  $(x_0, y_0)$  的值确定：

$$F(x_0, y_0) = 0. \tag{16}$$

实际上，在数字函数发生过程中，方程式(14)的系数  $A, B$  总满足  $|A| \gg |H-F|/4$ ， $|B| \gg |G-I|/4$ ，于是 (15) 式可写成

$$F(x, y) = f\left(x \pm \frac{1}{2}, y \pm \frac{1}{2}\right) + J = 0, \tag{17}$$

即将给定函数坐标原点位移而保持起点不动，坐标原点的位移仍按表 1 确定。

以三次函数  $x^3 - ay = 0$  为例，从某起始点  $(x_0, y_0)$  自下而上发生曲线时，其逼近函数为

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 - a\left(y - \frac{12x_0^2 - 6x_0 + 1}{8a}\right) = 0,$$

即将给定函数的坐标原点位移到  $(1/2, (12x_0^2 - 6x_0 + 1)/8a)$ 。由此可知，基本误差发生在曲线的拐点，其值为  $(12x_0^2 - 6x_0 + 1)/8a$ 。在  $x_0$  的绝对值很大时，可有最大基本误差为  $3x_0^2/2a$ 。此值正是函数在起始点  $(x_0, y_0)$  处导数  $s_0$  的一半(图 5)。

又如当给定函数为  $f(x, y) = ax - by + cx^2 + dx^3 = 0$ ，自  $(x_0, y_0)$  开始自上而下发生曲线时，其逼近函数为

$$F(x, y) = a\left(x + \frac{1}{2}\right) - b\left(y + \frac{12dx_0^2 + (8c + 6d)x_0 + 4a + 2c + d}{8b}\right) + c\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + d\left(x + \frac{1}{2}\right)^3 = 0$$

即将给定函数的坐标原点位移到

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{12dx_0^2 + (8c + 6d)x_0 + 4a + 2c + d}{8b}\right).$$

基本误差在拐点处，其值就是  $y$  的位移量。当  $x_0$  足够大时，最大基本误差为函数在起点的

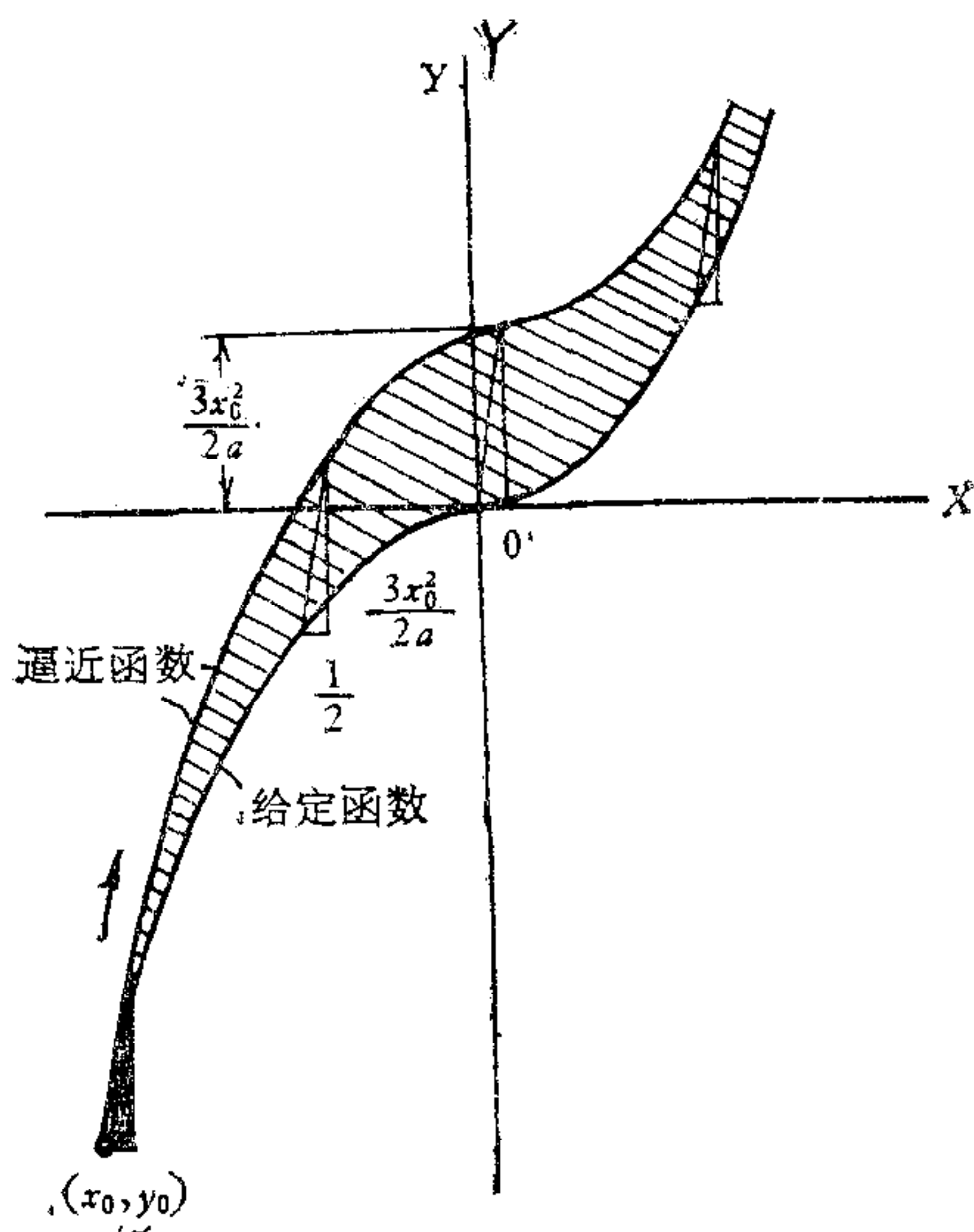


图 5

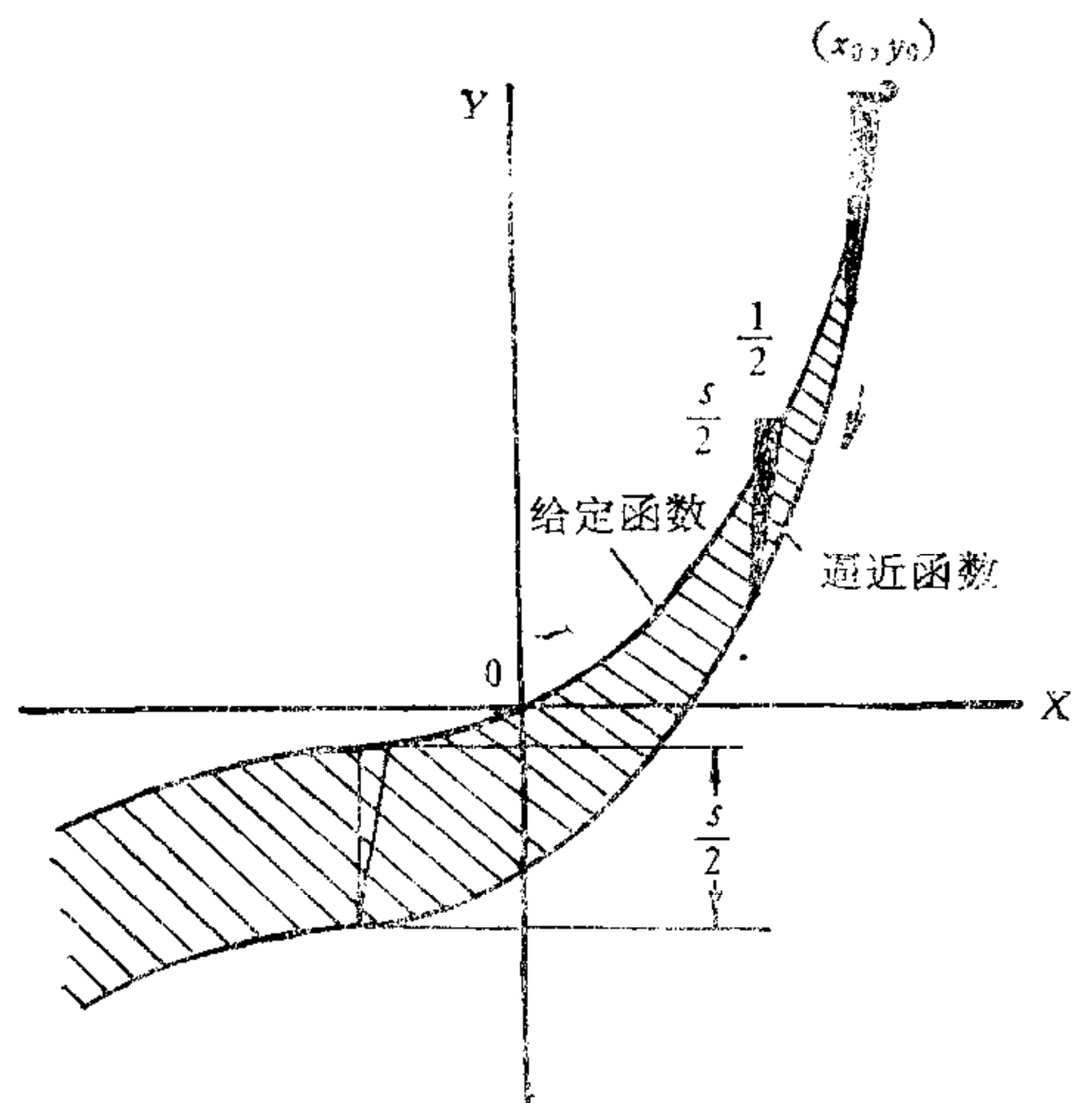


图 6



导数的一半,即  $s_0/2 = (3dx_0^2 + 2cx_0 + a)/2b$ (图 6).

从二次(抛物线)函数及三次函数的例子可见发生曲线的最大基本误差为起始点斜率的一半. 容易证明,显函数都有这个特点. 实际上,对显函数  $y = f(x)$ ,若起始点坐标足够大,则曲线起始点的斜率变化缓慢,此时将曲线在  $x$  方向移动  $1/2$ ,再移动  $y$  方向,使曲线仍经过  $(x_0, y_0)$ ,则  $y$  方向的位移量必近似为  $s_0/2$ . 见图 5,图 6.

### 四、发生曲线与逼近函数之间的走步误差

在微分算法中,由于将函数的全微分近似为函数值的增量,每一点的函数值取决于函数发生过程中到达该点以前所经过的途径,即取决于函数发生的步法. 例如: 如果使  $x$  增 1,而后再减 1 回到原来的位置,这将使该点的函数值发生变化. 另外一方面,当前所在点的位置又影响该点以后的步法和途径. 因此,发生的曲线与逼近函数之间还会有一定的误差,称之为走步误差. 它与所用的微分算法的步法有关.

微分算法的步法大致有两种:

- 1) 当坐标增量累计超过一步时,走步.
- 2) 当函数值增量累计超过相当于一歩的函数值增量时,走步.

这两种步法的算法程序如图 7、图 8.以步法 2)所发生的曲线与逼近函数之间的走步误差最小,步法 1)所发生的曲线与逼近函数之间的走步误差较大.走步误差与基本误差相比是很小的.用图 7、图 8 的程序图在计算机上作发生曲线的运算,证明了上述分析结果.

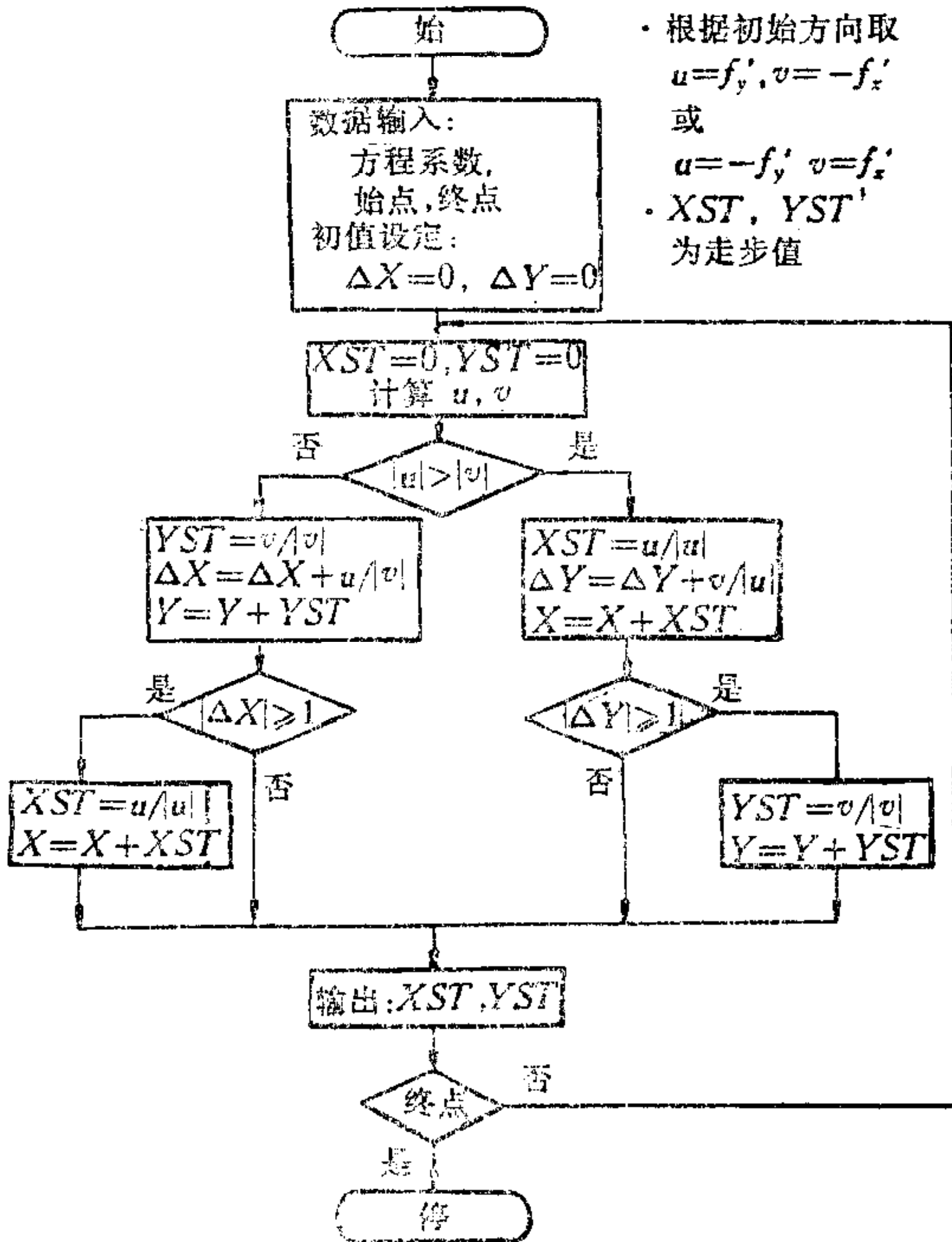


图 7

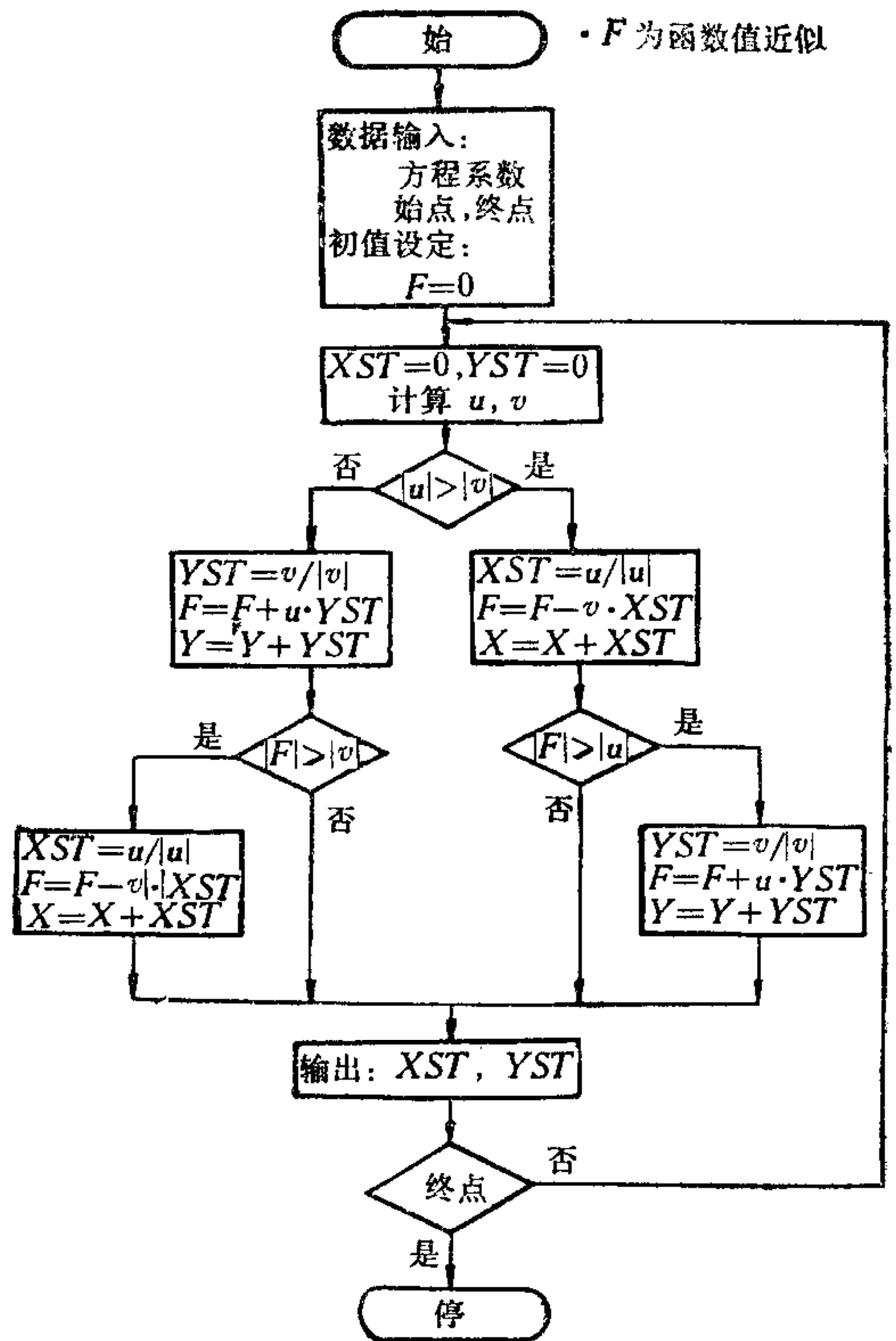


图 8



## 五、结 论

数字函数发生方法分为“微分算法”和“差分算法”。齐田法的算法特点完全等效于微分分析法，是微分分析法的变型算法。

除一次函数外，用微分算法发生曲线都有积累误差，包括基本误差和走步误差。发生圆的基本误差为 4 步；椭圆为  $2\left(1 + \frac{a}{b}\right)$  步；抛物线及三次显函数有  $\frac{s_0}{2}$  步 ( $s_0$  为起始点斜率)；在发生双曲线时还可能改变弯曲方向。走步误差视步法不同而异，但这种偏离小于基本误差。利用图 7 及图 8 算法程序图在计算机上作几种典型曲线的发生运算，证实了全文分析的结果。

## 参 考 文 献

- [1] E. Götz, Digital arbeitende Interpolatoren für numerische Bahnsteuerungen, AEG-Mitt., B. 51, H. 1/2, S. 34—44, 1961.
- [2] 穗板, コンピュータグラフィックス, 産業図書株式会社, 昭和 49 年 1 月 28 日.
- [3] 齐田伸雄, 新レフ関数概念の创造, 安川電機, 38 (1974), No. 3.

## ERROR ANALYSIS FOR DIFFERENTIAL ALGORITHM OF DIGITAL FUNCTION GENERATION

LU HAORU

(Zhejiang University)

### ABSTRACT

In methods of function generation, DDA and SFT (SAITA function generation) have quite different forms, although their basic characteristics and errors of function generation have no major differences. The errors between a curve generated by differential algorithm and its original given function consists of basic error and stepping error. A function generated by a differential algorithm approximates a function (properly called an approximate function) which deviates from its original function. This error is called "basic error". The approximated function can be derived from the given function itself. Curves generated by differential algorithm may also more or less deviate from their approximated function owing to different stepping approaches. This causes "stepping error". Analysis for polynomial functions of the second and third order shows that deviation of approximated functions from their given functions may be quite significant. The stepping error is generally much smaller than that of basic errors.